Differentialgleichungen für Ingenieure
WS 06/07

6. Vorlesung

Michael Karow

Themen heute:

1. Die geschlossene Lösungsformel für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.
2. Die Matrixexponentialfunktion
3. Diagonalsierbarkeit
4. Jordansche Normalform

Einleitung:

Die geschlossene Lösungsformel für die skalare lineare DGL mit konstantem Koeffizienten a

Sei $a \in \mathbb{C}$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$ und $b : J \to \mathbb{C}$ stetig.
Sei ausserdem $y : J \to \mathbb{C}$ eine Lösung der DGL

$$\dot{y}(t) = a\, y(t) + b(t)$$

Dann gilt

$$y(t) = \underbrace{e^{a(t-t_0)}\, y(t_0)}_{=:y_h(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b(\tau)\, d\tau}_{=:y_p(t)} .$$

Eräuterungen:

- Die Funktion $y_h(t)$ löst das AWP

  $$\dot{y}_h(t) = a\, y_h(t), \qquad y_h(t_0) = y(t_0).$$

  Wenn $y(t_0) = 0$ dann ist $y_h(t) \equiv 0$.

- Die Funktion $y_p(t)$ löst das AWP

  $$\dot{y}_p(t) = a\, y_p(t) + b(t), \qquad y_p(t_0) = 0.$$

  Wenn $b(t) \equiv 0$ dann ist $y_p(t) \equiv 0$.
  Das Integral, durch welches y_p definiert ist, nennt man **Faltungsintegral**.

Herleitung der geschlossenen Lösungsformel

Ansatz (Variation der Konstanten): $y(t) = e^{at}c(t) \quad (*)$.
Aus dem Ansatz folgt:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= a\,e^{at}c(t) + e^{at}\,\dot{c}(t), \\ a\,y(t) + b(t) &= a\,e^{at}c(t) + b(t). \end{aligned}$$

Gleichsetzen der linken und damit auch der rechten Seiten dieser Gleichungen ergibt $e^{at}\,\dot{c}(t) = b(t)$, umgestellt

$$\dot{c}(t) = e^{-at}\,b(t) \quad \text{für alle } t \in J.$$

Aus Notationsgründen ersetzen wir hier die Variable t durch τ:

$$\dot{c}(\tau) = e^{-a\tau}\,b(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in J.$$

Diese Gleichung wird integriert:

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{c}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b(\tau)\,d\tau. \qquad (**)$$

Aus $(*)$ folgt ausserdem

$$c(t_0) = e^{-at_0}y(t_0). \quad (***)$$

Aus $(**)$ und $(***)$ folgt

$$c(t) = e^{-at_0}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-a\tau}b(\tau)\,d\tau.$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt die Lösungsformel

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}\,y(t_0) \; + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\,b(\tau)\,d\tau.$$

Bemerkungen:

- Grundlage der Herleitung der geschlossenen Lösungsformel ist die Tatsache, dass
$$\frac{d}{dt} e^{at} = a\, e^{at}. \qquad (*)$$

- Die geschlossene Lösungformel gilt auch für den vektorwertigen Fall
$$y(t) = \mathbf{y}(t) = \text{Vektor}, \quad b(t) = \mathbf{b}(t) = \text{Vektor}, \quad a = A = \text{Matrix},$$
wenn man den Ausdruck $e^{at} = e^{At}$ für Matrizen geeignet definiert, nämlich so, dass $(*)$ weiterhin gilt.

  Dies wird auf den nächsten Seiten genau erklärt.

Die Fundamentalmatrix für konstante Koeffizienten und die Matrix-Exponentialfunktion

Für quadratische Matrizen definiert man die **Exponentialfunktion** genau so wie für Zahlen, nämlich durch eine unendliche Reihe

$$e^{\mathbf{A}} := \exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{2\cdot 3} + \frac{\mathbf{A}^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Man kann zeigen, dass diese Definition stets sinnvoll ist, d.h. die Reihe konvergiert für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Für die Funktion $\mathbf{Y}(t) := \exp(\mathbf{A}\,t)$ folgt wie im skalaren Fall

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Y}}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \frac{(\mathbf{A}\,t)^2}{2} + \frac{(\mathbf{A}\,t)^3}{2\cdot 3} + \frac{(\mathbf{A}\,t)^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right) \\
&= \left(\mathbf{0} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^4 t^3}{2\cdot 3} + \ldots\right) \\
&= \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \frac{(\mathbf{A}\,t)^2}{2} + \frac{(\mathbf{A}\,t)^3}{2\cdot 3} + \ldots\right) = \mathbf{A}\,\mathbf{Y}(t).
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt $\mathbf{Y}(0) = \exp(\mathbf{O}) = \mathbf{I}$, also $\det(\mathbf{Y}(0)) = 1 \neq 0$. Folgerung:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \text{ ist eine Fundamentalmatrix} \\ \text{für die homogene DGL } \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t).\end{array}}$$

Die geschlossene Lösungsformel für die vektorwertige lineare DGL mit konstanter Koeffizienten-Matrix $\mathbf{A}$

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in J$ und $\mathbf{b} : J \to \mathbb{C}^n$ stetig.
Sei ausserdem $y : J \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung der DGL

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\, y(t) + \mathbf{b}(t)$$

Dann gilt

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\mathbf{y}(t_0) \; + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{b}(\tau)\, d\tau\,.$$

Bemerkung:

Die Herleitung dieser Formel geht genau wie im skalaren Fall.

Die Formel ist grundlegend für die Regelungstheorie.

Aud den folgenden Seiten geht es um die Berechnung von $e^{\mathbf{At}}$.

Dabei werden einige Begriffe aus der Linearen Algebra wiederholt.

Dieser Teil ist (zum Glück) nicht klausurrelevant.

Beispiel: Die Exonentialfunktion für Diagonalmatrizen

Sei $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$. Dann ist $(\Lambda t)^k = \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n t)^k \end{bmatrix}$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher

$$\exp(\Lambda\, t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda\, t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\,e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\,).$$

Folgerung: Das AWP

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\, y_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n\, y_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix}$$

hat die Lösung (das erkennt man auch ohne Matrixexponentialfunktion)

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \exp(\Lambda\, t) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\, v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\, v_n \end{bmatrix}.$$

Das Ähnlichkeitsprinzip

Erinnerung: Zwei quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heissen **ähnlich**, falls es eine invertierbare Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1}.$$

Ähnlichkeitsprinzip:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \exp(\mathbf{A}) = \mathbf{V}\,\exp(\mathbf{B})\,\mathbf{V}^{-1}.}$$

Beweis:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{A}^k &= (\mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1})\,(\mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1})(\mathbf{V}\,\mathbf{B}\ldots\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1})(\mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1}) \\ &= \mathbf{V}\,\mathbf{B}\,\underbrace{(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V})}_{=\mathbf{I}}\,\mathbf{B}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V})\,\mathbf{B}\ldots\mathbf{B}\,(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V})\,\mathbf{B}\,\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\,\mathbf{B}^k\,\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \exp(\mathbf{A}) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{V}\mathbf{B}^k\mathbf{V}^{-1}}{k!} = \mathbf{V}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^k}{k!}\right)\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\,\exp(\mathbf{B})\,\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Erinnerung: Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst **diagonalisierbar**, falls es eine invertierbare Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{V}^{-1}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Nach den bisher gewonnenen Resultaten berechnet sich die Matrix-Exponentialfunktion für diagonalisierbare Matrizen wie folgt:

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}\,t) &= \exp(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}\,t) \\ &= \exp(\mathbf{V}(\mathbf{\Lambda}\,t)\,\mathbf{V}^{-1}) \\ &= \mathbf{V}\exp(\mathbf{\Lambda}\,t)\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\,\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Fazit: Wenn eine Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist, dann kann man $\exp(\mathbf{A}\,t)$ berechnen, und so lineare DGL der Form $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$ lösen.

Fragen:

1. Wie diagonalisiert man eine Matrix?
2. Ist überhaupt jede Matrix diagonalisierbar?
3. Was bedeutet Diagonalisierbarkeit geometrisch?

Die geometrische Bedeutung von Diagonalisierbarkeit

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Sei ausserdem $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wobei die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bilden. Dann existiert $\mathbf{V}^{-1}$ und man hat folgende Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{V}^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\,\mathbf{V} = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\,[\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\,] = [\,\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\,] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad [\,\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n\,] = [\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda_n\,\mathbf{v}_n\,] \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_k = \lambda_k\,\mathbf{v}_k, \quad k = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie eine Basis von Eigenvektoren besitzt. Wenn die Gleichung

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{V}^{-1}$$

gilt, dann sind die Spalten von $\mathbf{V}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und die Diagonalelemente der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ sind die zugehörigen Eigenwerte.

Erinnerung: Die Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms**

$$\chi_A(\lambda) = \mathrm{det}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = \pm\lambda^n \mp \mathrm{spur}(\mathbf{A})\,\lambda^{n-1} \pm \ldots + \mathrm{det}(\mathbf{A}).$$

Sei λ_k ein Eigenwert, d.h. $\chi_A(\lambda_k) = 0$. Dann hat die Gleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda_k\,\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

von $\mathbf{0}$ verschiedene Lösungen $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Für diese gilt

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda_k\,\mathbf{v}.$$

Die Eigenvektoren $\mathbf{v}$ bilden (zusammen mit $\mathbf{0}$) einen Vektorraum (den **Eigenraum**), aus dem man eine Basis (des Eigenraums) auswählen kann.

Erinnerung: Zwei hinreichende Kriterien für Diagonalisierbarkeit

1. Wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms alle einfach sind, (d.h. wenn keine Nullstelle höhere Vielfachheit hat, $\lambda_k \neq \lambda_j$ für $k \neq j$), dann sind die Eigenräume eindimensional, d.h. der Eigenvektor $\mathbf{v}_k$ zum Eigenwert λ_k ist bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.
   Wählt man aus jedem Eigenraum einen Eigenvektor aus,
   so erhält so eine Basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ des ganzen Raums $\mathbb{C}^n$.

2. Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ reell und symmetrisch ist, dann sind alle Eigenwerte reelle Zahlen und gibt es eine Basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ von Eigenvektoren, auch wenn die Nullstellen des char. Polynoms höhere Vielfachheit haben.

   Extrembeispiel: Die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist reell und symmetrisch. Ihr einziger Eigenwert ist $\lambda = 1$. Alle Vektoren des $\mathbb{C}^n$ sind Eigenvektoren. Jede bliebige Basis ist eine Basis von Eigenvektoren.

Diese Kriterien sind nur hinreichend. Auch wenn sie nicht erfüllt sind, kann eine Basis von Eigenvektoren existieren, muss aber nicht. Weiter hinreichende Kriterien für Diagonalisierbarkeit findet man z.B. im Skript zur linearen Algebra.

Beispiel für nicht diagonalisierbare Matrizen: Jordanblöcke

Jordanblock der Dimension 4:

$$J_4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Der einige Eigenwert ist λ. Der Eigenraum ist eindimensional, denn die einzigen Eigenvektoren sind die Vielfachen des ersten Standard-Basisvektors:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$ Echte Jordanblöcke (Dimension > 1) sind nicht diagonalisierbar.

Bemerkung: Ein Jordanblock der Dimension 1 ist per Definition eine 1×1-Matrix:

$$J_1(\lambda) = [\lambda].$$

Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion für Jordanblöcke

$$\mathbf{J}_4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{N}}$$

N ist nilpotent:

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^4 = 0.$$

Daher:

$$\begin{aligned} \exp\left(\mathbf{J}_4(\lambda)\, t\right) &= \exp\left(t\,\lambda\,\mathbf{I} + t\,\mathbf{N}\right) \\ &= \exp\left(t\,\lambda\,\mathbf{I}\right) \exp\left(t\,\mathbf{N}\right) \\ &= \left(e^{\lambda\,t}\,\mathbf{I}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbf{N})^k}{k!} \\ &= \left(e^{\lambda\,t}\,\mathbf{I}\right) \sum_{k=0}^{3} \frac{(t\mathbf{N})^k}{k!} = e^{\lambda\,t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diese Summe kann man leicht ausrechnen↑

Eine **Jordan-Matrix** ist eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke Jordan-Blöcke sind.

Beispiel:

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & \lambda_1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & \lambda_2 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & \lambda_2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \lambda_2 & & & & & & \\
 & & & & & & & & \lambda_2 & & & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda_2 & & & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_3 & 1 & 0 & \\
 & & & & & & & & & & 0 & \lambda_3 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & \lambda_3 & \\
 & & & & & & & & & & & & & \lambda_4
\end{bmatrix}
$$

$$
= \mathrm{diag}\,(\, J_2(\lambda_1),\ J_3(\lambda_1),\ J_3(\lambda_2),\ J_1(\lambda_2),\ J_1(\lambda_2),\ J_3(\lambda_3)\,, J_1(\lambda_4)\,)
$$

Allgemein:

$$
\mathbf{J} = \mathrm{diag}\,(\,\mathbf{J}_{i_1}(\lambda_{k_1}), \ldots, \mathbf{J}_{i_r}(\lambda_{k_r})\,).
$$

Das Block-Prinzip

Sei $\mathbf{A}$ eine Blockdiagonalmatrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\,\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_r\,), \qquad \mathbf{A}_k \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}.$$

Dann gilt

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{bmatrix} \exp(\mathbf{A}_1\,t) & & & \\ & \exp(\mathbf{A}_2\,t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\mathbf{A}_r\,t) \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\,\exp(\mathbf{A}_1\,t), \ldots, \exp(\mathbf{A}_r\,t)\,).$$

Die zugehörige Rechnung ist dieselbe wie für Diagonalmatrizen.

Insbesondere für Jordanmatrizen gilt:

$$\mathbf{J} = \mathrm{diag}\,(\,\mathbf{J}_{i_1}(\lambda_{k_1}), \ldots, \mathbf{J}_{i_r}(\lambda_{k_r})\,) \;\Rightarrow\; \exp(\mathbf{J}\,t) = \mathrm{diag}\,(\,\exp(\mathbf{J}_{i_1}(\lambda_{k_1})\,t), \ldots, \exp(\mathbf{J}_{i_r}(\lambda_{k_r})\,t)\,).$$

Satz von der Jordanschen Normalform:

Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es eine invertierbare Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Jordan-Matrix $\mathbf{J}$, so daß

$$A = \mathbf{V}\,\mathbf{J}\,\mathbf{V}^{-1}.$$

Kurz: Jede quadratische Matrix ist **ähnlich** zu einer Jordan-Matrix.

Zusatz: $\mathbf{J}$ ist bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke eindeutig bestimmt.

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{J}$ haben dieselben Eigenwerte.

Folgerung:

Ähnlichkeitsprinzip & Blockprinzip & Jordansche Normalform $\Rightarrow$

Matrix-Exponentialfunktion ist berechenbar:

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \mathbf{V}\,\exp(\mathbf{J}\,t)\,\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{V}\,\mathrm{diag}\Big(\exp(\mathbf{J}_{i_1}(\lambda_{k_1})\,t), \ldots, \exp(\mathbf{J}_{i_r}(\lambda_{k_r})\,t)\Big)\;\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned}$$

Jordanketten und Hauptvektoren (verallgemeinerte Eigenvektoren)

Definition: Eine endliche Folge $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ von Vektoren heißt **Jordankette** für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ wenn:

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & = & \lambda\,\mathbf{v}_1 & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_1 & = & \mathbf{0} & \mathbf{0} & = & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^p\,\mathbf{v}_p \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_2 & = & \lambda\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_2 & = & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 & = & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^{p-1}\,\mathbf{v}_p \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_3 & = & \lambda\,\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 & = & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^{p-2}\,\mathbf{v}_p \\
 & \vdots & \Leftrightarrow & & \vdots & \Leftrightarrow & & \vdots & \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_{p-2} & = & \lambda\,\mathbf{v}_{p-2} + \mathbf{v}_{p-3} & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_{p-2} & = & \mathbf{v}_{p-3} & \mathbf{v}_{p-3} & = & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^3\,\mathbf{v}_p \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_{p-1} & = & \lambda\,\mathbf{v}_{p-1} + \mathbf{v}_{p-2} & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_{p-1} & = & \mathbf{v}_{p-2} & \mathbf{v}_{p-2} & = & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})^2\,\mathbf{v}_p \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_p & = & \lambda\,\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1} & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}_p & = & \mathbf{v}_{p-1} & \mathbf{v}_{p-1} & = & (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{v}_p
\end{array}
$$

Die Glieder einer Jordankette heissen **Hauptvektoren (verallgem. Eigenvektoren)**

Eigenvektoren: $(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Hauptvektoren: $(A-\lambda\,\mathbf{I})^j\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ für ein $j \in \mathbb{N}$

Matrixformulierung: Sei $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_p]$. Dann gilt: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ ist eine Jordan-Kette für $\mathbf{A}$ genau dann, wenn

$$\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \text{0} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{0} & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{V}\,\mathbf{J}_p(\lambda)$$

Mehr zu dieser Gleichung auf der nächsten Seite.

Beispiel zur Matrixformulierung der Jordankettengleichungen

Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{C}^n$. Dann rechnet man folgendermaßen:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & = & \lambda\,\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & = & \lambda\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_3 & = & \lambda\,\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \mathbf{A}\,[\,\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_3\,] & = & [\,\mathbf{A}\mathbf{v}_1,\, \mathbf{A}\mathbf{v}_2,\, \mathbf{A}\mathbf{v}_3\,] \\ & = & [\,\lambda\,\mathbf{v}_1,\ \lambda\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1,\ \lambda\,\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\,] \\ & = & [\,\mathbf{v}_1\,\lambda,\ \mathbf{v}_1\cdot 1 + \mathbf{v}_2\cdot\lambda,\ \mathbf{v}_2\cdot 1 + \mathbf{v}_3\cdot\lambda\,] \\ & = & [\,\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_3\,] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ & = & \mathbf{V}\,\mathbf{J}. \end{array}$$

Angenommen, die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bilden bereits eine Basis des ganzen Raumes $\mathbb{C}^n$, $n = 3$. Dann kann man die eben gewonnene Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\,\mathbf{J}$ von rechts mit $\mathbf{V}^{-1}$ multiplizieren und bekommt so

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{J}\,\mathbf{V}^{-1} \qquad (*)$$

Analog verfährt man, wenn man eine Basis aus mehreren Jordanketten hat.

Umgekehrt gilt:

Wenn die Identität $(*)$ für eine Jordanmatrix $\mathbf{J}$ besteht, dann bilden die Spalten von $\mathbf{V}$ Jordanketten. Dies begründet die folgende

Alternative Formulierung des Satzes von der Jordanschen Normalform:

Jede quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt eine Basis von Jordanketten.

Frage: Die Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion ist kompliziert.
Muss man wirklich damit arbeiten, um die DGL

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

zu lösen?

Antwort: Die Matrixexponentialfunktion ist ein wichtiges Mittel,
um lineare DGL theoretisch zu verstehen.
Man sollte wenigstens mal davon gehört haben.
Bei der Berechnung von Lösungen kann man aber
direkter vorgehen (Eigenwertmethode),