Differentialgleichungen für Ingenieure
WS 06/07

13. Vorlesung

Michael Karow

Thema heute:

- Mehrdimensionale Rand- und Eigenwertprobleme
- Wellengleichung und Schwingungsgleichung
- Schwingungen einer Membran
- Besselfunktionen

Einleitung. Bisher wurden folgende Typen von partiellen DGL erwähnt:

$$(1a)\quad \mu(x)\,\dot u(x,t) - (k(x)\,u(x,t)')' = f(x,t) \qquad \text{kurz:}\quad \mu\,\dot u - (k\,u')' = f,$$
$$(2a)\quad \mu(x)\,\ddot u(x,t) - (k(x)\,u(x,t)')' = f(x,t) \qquad \text{kurz:}\quad \mu\,\ddot u - (k\,u')' = f,$$
$$(3a)\quad \mu(x)\,\ddot u(x,t) + (k(x)\,u(x,t)'')'' = f(x,t) \qquad \text{kurz:}\quad \mu\,\ddot u + (k\,u'')'' = f,$$

und räumlich mehrdimensionalen Fall:

$$(1b)\quad \mu(\mathbf{x})\,\dot u(\mathbf{x},t) - \mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) = f(\mathbf{x},t) \qquad \text{kurz:}\quad \mu\,\dot u - \mathrm{div}(k\,\nabla u) = f,$$
$$(2b)\quad \mu(\mathbf{x})\,\ddot u(\mathbf{x},t) - \mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) = f(\mathbf{x},t) \qquad \text{kurz:}\quad \mu\,\ddot u - \mathrm{div}(k\,\nabla u) = f,$$
$$(3b)\quad \mu\,\ddot u(\mathbf{x},t) + K\,\Delta\Delta u(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t) \qquad \text{kurz:}\quad \mu\,\ddot u + K\,\Delta\Delta u = f.$$

Hinzu kommen in allen Fällen **Randbedingungen** und **Anfangsbedingungen**.

Einige Bemerkungen:

• Man erhält (1a) bzw. (2a), wenn man (1b) bzw. (2b) für den eindimensionalen Fall $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$ hinschreibt.

• Schreibt man die Plattengleichung (3b) für den eindimensionalen Fall hin, so bekommt die Balkenbiegegleichung (3a) für den Fall, dass $k(x) = const = K$ und $\mu(x) = const = \mu$.

• Partielle DGL der obigen Typen kommen in den Anwendungen häufig vor. Ihr Lösungsverhalten ist sehr gut untersucht. Alle obigen Gleichungen sind linear. Dies sind natürlich nur einige lineare Gleichungen, mit denen man es in den Anwendungen zu tun hat. Die DGL für die Biegelinie u eines vorgespannten Balkens auf elastischem Untergrund mit Berücksichtigung der Rotationsträgheit der Querschnittsflächen ist z.B.:

$$\mu\ddot u - (\mu\,r^2\ddot u')' + (EI\,u'')'' - \tau\,u'' + c\,u = f.$$

• Eine DGL vom Typ (1) heisst **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**.

• Eine DGL vom Typ (2) nennt man **lineare Wellengleichung** (im weiteren Sinne).

Grundsätzliches zur homogenen Wärmeleitungsgleichung/Wellengleichung I

Die Gleichungen lauten

$$\mu(\mathbf{x})\,\dot{u}(\mathbf{x},t) + L[u](\mathbf{x},t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mu(\mathbf{x})\,\ddot{u}(\mathbf{x},t) + L[u](\mathbf{x},t) = 0$$

wobei

$$L[u](\mathbf{x},t) = -\mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla u(\mathbf{x},t)).$$

Man kann wieder einen Separationsansatz der Form

$$u(\mathbf{x},t) = T(t)\,U(\mathbf{x})$$

machen und bekommt mit derselben Rechnung wie im eindimensionalen Fall (siehe Vorlesung 12) das folgende **Eigenwertproblem** für U:

$$L[U](\mathbf{x}) = \lambda\,\mu(\mathbf{x})\,U(\mathbf{x}).$$

Für den zeitabhängige Anteil gilt

1. bei der Wärmeleitungsgleichung:

   $T(t) + \lambda\,T(t) = 0;$ Lösung: $T(t) = e^{-\lambda\,t}c$

2. bei der Wellengleichung:

   $T(t) + \lambda^2\,T(t) = 0;$ Lösung: $T(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,t - \phi) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\,t),$ (falls $\lambda \neq 0$)

   wobei $A, c, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ frei wählbare Parameter sind.

Grundsätzliches zur homogenen Wärmeleitungsgleichung/Wellengleichung II

Wir betrachten nun den Operator $L[u](\mathbf{x}) = -\mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla u(\mathbf{x}))$ auf einem endlichen Gebiet G mit stückweise glattem Rand. Auf diesem seien die folgenden homogenen Randbedingungen gegeben (siehe Folie zur Wärmeleitungsgleichung):

1. $u(\mathbf{x}) = 0$ $\quad \mathbf{x} \in \text{Dirichlet} - \text{Rand}(G)$,
2. $\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$ $\quad x \in \text{Neumann} - \text{Rand}(G)$,
3. $\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})\,u(\mathbf{x}) = 0,$ $\quad x \in \text{Robin} - \text{Rand}(G)$

Ausserdem sei

$$\langle v, w\rangle := \int_G \overline{v(\mathbf{x})} w(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \qquad \text{(Skalarprodukt)}.$$

Dann gilt

$$\langle L[v], w\rangle = \langle v, L[w]\rangle = \int_G \overline{\nabla v(\mathbf{x})} \cdot \nabla w(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{\text{Robin}-\text{Rand}(G)} \alpha(\mathbf{x})\,k(\mathbf{x})\,\overline{v(\mathbf{x})}\,w(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \qquad (*)$$

für alle komplexwertigen Funktionen v, w, die die obigen Randbedingungen erfüllen, und auf die der Operator L angewendet werden kann. Die Identität $(*)$ beweist man mit partieller Integration (Anwendung der Integralformel von Green).

Folgerung: L ist selbstadjungiert (genaueres dazu in der VL).

Setzt man in $(*)$ $v = w = u$, so folgt:

$$\langle L[u], u\rangle = \int_G \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\,d\mathbf{x} + \int_{\text{Robin}-\text{Rand}(G)} \alpha(\mathbf{x})\,k(\mathbf{x})\,|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x},$$

$\Rightarrow$ Wenn k, α positive Funktionen sind, dann ist L zumindest positiv semi-definit, d.h. $\langle L[u], u\rangle \geq 0$ für alle u.

Grundsätzliches zur homogenen Wärmeleitungsgleichung/Wellengleichung III

Folgerung aus der Selbstadjungiertheit von $L[u](\mathbf{x}) = -\mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla u(\mathbf{x}))$:

Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle v, w\rangle_\mu := \int_G \overline{v(\mathbf{x})} w(\mathbf{x})\,\mu(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Formal: Wenn $L[U_1](\mathbf{x}) = \lambda_1\,\mu(\mathbf{x})\,U_1(\mathbf{x})$ und $L[U_2](\mathbf{x}) = \lambda_2\,\mu(\mathbf{x})\,U_2(\mathbf{x})$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
dann ist $\langle U_1, U_2\rangle_\mu = 0$.

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Funktion μ positiv ist.

Folgerung aus der positiven Semi-Definitheit von $L[u](\mathbf{x}) = -\mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla u(\mathbf{x}))$:

Alle Eigenwerte von L sind nicht negativ.

Die beiden Folgerungen ergeben sich durch dieselbe Schlussweise wie in Vorlesung 13.

Bemerkung 1: In den meisten praktischen Fällen (etwa, wenn der ganze Rand Dirichlet-Rand ist) ist L sogar positiv definit. Dann sind auch alle Eigenwerte positiv.

Bemerkung 2: Der in Vorlesung 12 angegebene Hauptsatz über Eigenwerte und Eigenfunktionen bei 1-dimensionalen Randwertproblemen gilt sinngemäss auch im mehrdimensionalen Fall, wenn das Gebiet G endlich ist. Insbesondere kann man eine Funktion $v : G \to \mathbb{C}$ quadrat-integrierbare Funktion nach Eigenfunktionen entwickeln:

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,U_k(x), \qquad c_k = \langle U_k, v\rangle_\mu,$$

wobei $U_1, U_2, \ldots$ eine Orthonormalbasis von Eigenfunktionen ist.

Grundsätzliches zur homogenen Wärmeleitungsgleichung/Wellengleichung IV

Im Fall $k(\mathbf{x}) = const = 1$ hat man

$$L[u](\mathbf{x}) = -\mathrm{div}(k(\mathbf{x})\,\nabla u(\mathbf{x})) = -\mathrm{div}(\nabla u(\mathbf{x})) = -\Delta u(\mathbf{x}).$$

Dies ist der wichtigste Spezialfall. Alle über L gemachten Aussagen gelten insbesondere für den $(-\Delta)$ -Operator:

Dieser Operator ist selbstadjungiert und positiv semi-definit (meistens sogar positiv definit), alle Eigenwerte sind nicht negativ (bzw. positiv) und man kann eine quadrat-integrierbare Funktion $v : G \to \mathbb{C}$ nach Eigenfunktionen entwickeln.

Grundsätzliches zur Wellengleichung I

Wir betrachten die Bewegungsgleichung für die Schwingung einer Membran:

$$\boxed{\mu\, \ddot{u} - \tau\, \Delta u = \widetilde{f}}$$

Dabei sind $\mu > 0$ und $\tau > 0$ konstant. Die Funktion $\widetilde{f} = \widetilde{f}(\mathbf{x}, t)$ ist die Lastschüttung. Teilen durch μ ergibt

$$\ddot{u} - \frac{\tau}{\mu}\Delta u = \frac{\widetilde{f}}{\mu}.$$

Wir setzen nun $f = \frac{\widetilde{f}}{\mu}$ und

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}.}$$

Mit diesen Konventionen lautet die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{u} - c^2\, \Delta u = f. \qquad (*)}$$

Dies ist die Wellengleichung im engeren Sinne. So steht sie in einführenden Büchern über partielle DGL. Viele Autoren schreiben die Wellengleichung allerdings in der Form

$$\frac{1}{c^2}\ddot{u} - \Delta u = g,$$

wobei dann natürlich $g = f/c^2 = \widetilde{f}/\tau$.

Wie wir noch sehen werden, ist c die **Signalausbreitungsgeschwindigkeit**, wenn ein Medium mit der Bewegungsgleichung $(*)$ an einer Stelle $\mathbf{x}$ angeregt wird.

Grundsätzliches zur Wellengleichung II

Wir führen den Separationsansatz $u(\mathbf{x},t) = T(t)\,U(\mathbf{x})$ noch einmal konkret für die homogene Wellengleichung

$$\ddot{u} - c^2\,\Delta u = 0 \qquad (*)$$

durch. Einsetzen des Ansatzes in $(*)$ ergibt $\ddot{T}(t)\,U(\mathbf{x}) - c^2\,T(t)\,\Delta U(\mathbf{x}) = 0$.

Teilen der Gleichung durch $T(t)\,U(\mathbf{x})$ und umstellen ergibt:

$$\frac{-c^2\Delta U(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x})} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Daraus folgen die beiden Gleichungen

$$-c^2\,\Delta U(\mathbf{x}) = \lambda\,U(\mathbf{x}), \qquad \ddot{T}(t) + \lambda\,T(t) = 0. \qquad (**)$$

Wie schon mehrmals erwähnt, hat die rechte Gleichung die allgemeine Lösung ($\lambda \neq 0$):

$$T(t) = A\,\cos(\sqrt{\lambda}\,t - \phi) = c_1\,\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + c_2\,\sin(\sqrt{\lambda}\,t).$$

Die linke Gleichung in $(**)$ ist die Eigenwert-Eigenvektorgleichung für den Operator $-c^2\,\Delta$. Aus unseren allgemeinen Überlegungen wissen wir, dass die Eigenwerte λ dieses Operators nicht negativ sind. Wir führen nun folgende in der Literatur üblichen Notationen ein:

$$\omega := \sqrt{\lambda}, \qquad k := \omega/c$$

Indem man die linke Gleichung in $(**)$ durch $-c^2$ teilt und dann alles auf die linke Seite bringt, bekommt man

$$(\Delta + k^2)U(\mathbf{x}) = 0$$

Diese Gleichung nennt man die **Helmholz'sche Schwingungsgleichung**.

Die Konstante k heisst **Wellenzahl** (Begründung später)

Grundsätzliches zur Wellengleichung III

Wir fassen zusammen: Die homogene Wellengleichung

$$\ddot{u} - c^2 \Delta u = 0 \qquad (*)$$

hat Separationslösungen der Form

$$u(\mathbf{x}, t) = T(t)\, U(\mathbf{x})$$

wobei der ortsabhängige Anteil (notwendigerweise) die

Helmholtz'sche Schwingungsgleichung

$$(\Delta + k^2) U(\mathbf{x}) = 0$$

löst. Der zeitabhängige Anteil ist von der Form

$$T(t) = A \cos(\omega\, t - \phi) = c_1 \cos(\omega\, t) + c_2 \sin(\omega\, t),$$

wobei

$$\omega = c\, k$$

und $A, \phi, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ beliebig wählbare Konstanten sind.

Wichtig: Die Helmholtz'sche Schwingungslgleichung hat bei gegebenen homogenen Randbedingungen nur für bestimmte Werte von k von 0 verschiedene Lösungen U, die auch die Randbedingungen erfüllen. Diese Werte und die zugehörigen Lösungen kann man im allgemeinen nur numerisch finden. In einfachen Situationen gibt es geschlossene Lösungen, wie auf den folgenden Seiten gezeigt wird.

Lösung der Schwingungsgleichung für eine rechteckige Membran I

Gesucht sind von 0 verschiedene Lösungen $U : [0, a] \times [0, b] \to \mathbb{R}$ des Randwertproblems

$$(\Delta + k^2)\, U(x, y) = 0, \qquad \text{und} \quad U(x, y) = 0 \text{ falls } x \in \{0, a\} \text{ oder } y \in \{0, b\}.$$

Zur Lösung macht man wieder einen **Separationsansatz**: $U(x, y) = X(x)\, Y(y)$.

Damit die Randbedingungen erfüllt sind, muss gelten:

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0.$$

Einsetzen des Ansatzes in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} 0 = (\Delta + k^2)\, U(x, y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) X(x)\, Y(y) \\ &= X''(x)\, Y(y) + X(x)\, Y''(y) + k^2\, X(x)\, Y(y). \end{aligned}$$

Teilen durch $X(x)\, Y(y)$ und Umstellen, so dass alle von x abhängigen Terme auf der einen Seite stehen und alle von y abhängigen auf der anderen, ergibt:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + k^2 = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} =: \lambda$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$X''(x) + (k^2 - \lambda)\, X(x) = 0, \qquad Y''(y) + \lambda\, Y(y) = 0,$$

Der Fall $\lambda = 0$ scheidet aus, denn dann ist $Y(y) = c_1\, y + c_2$ und aus den Randbedingungen folgt $c_1 = c_2 = 0$, also $Y(y) \equiv 0$. Dies gibt die uninteressante Lösung $U(x, y) \equiv 0$.

Also $\lambda \neq 0$ und damit $Y(y) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, y) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, y)$. Aus den Randbedingungen folgt $c_1 = 0$, $\lambda = (\frac{\pi}{b}\, j)^2$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $c_2 = 1$ bekommen wir:

$$Y(y) = c_2 \sin\left(\frac{\pi\, j}{b}\, y \right), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Lösung der Schwingungsgleichung für eine rechteckige Membran II

Mit derselben Argumentation wie eben bekommt man aus der Gleichung

$$X''(x) + \underbrace{(k^2 - \lambda)}_{=:\widetilde{\lambda}} X(x) = 0,$$

dass $\widetilde{\lambda} = \left(\frac{\pi}{a}\ell\right)^2$, $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und

$$X(x) = \widetilde{c}_2 \sin(\sqrt{\widetilde{\lambda}}) = \widetilde{c}_2 \sin\left(\frac{\pi\,\ell}{a}\,x\right), \qquad \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Insgesamt

$$U(x, y) = X(x)\,Y(y) = A \sin\left(\frac{\pi\,\ell}{a}\,x\right) \sin\left(\frac{\pi\,j}{b}\,y\right) \qquad (*)$$

mit $A = c_2\,\widetilde{c}_2 \in \mathbb{R}$ und $j, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ausserdem:

$$k^2 = \widetilde{\lambda} + \lambda = \left(\frac{\pi\,\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\,j}{b}\right)^2.$$

Die zugehörigen reellen Lösungen der homogenen Wellengleichung $\ddot{u} - c^2 \Delta u = 0$ sind

$$u(x, y, t) = T(t)\,U(x, y) = A \cos(\omega\,t - \phi) \sin\left(\frac{\pi\,\ell}{a}\,x\right) \sin\left(\frac{\pi\,j}{b}\,y\right), \qquad \omega = k\,c,$$

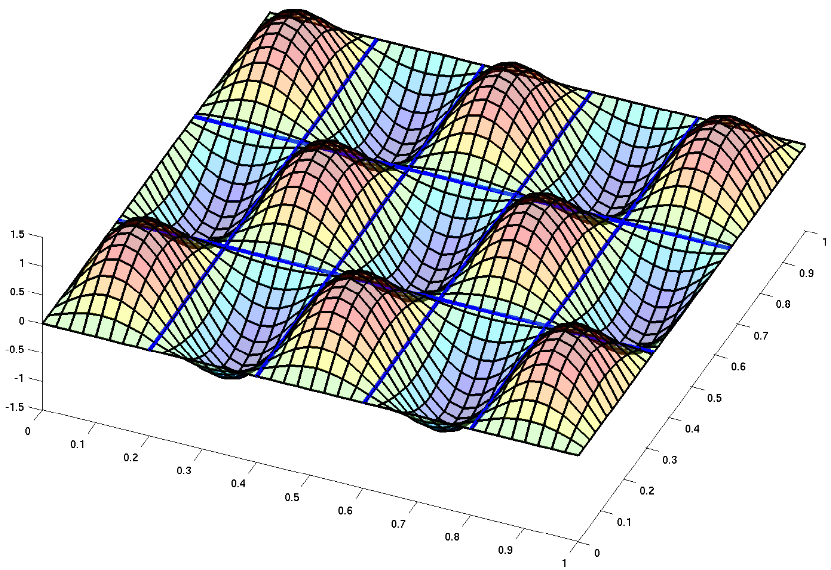
wobei $A, \phi \in \mathbb{R}$ beliebig.

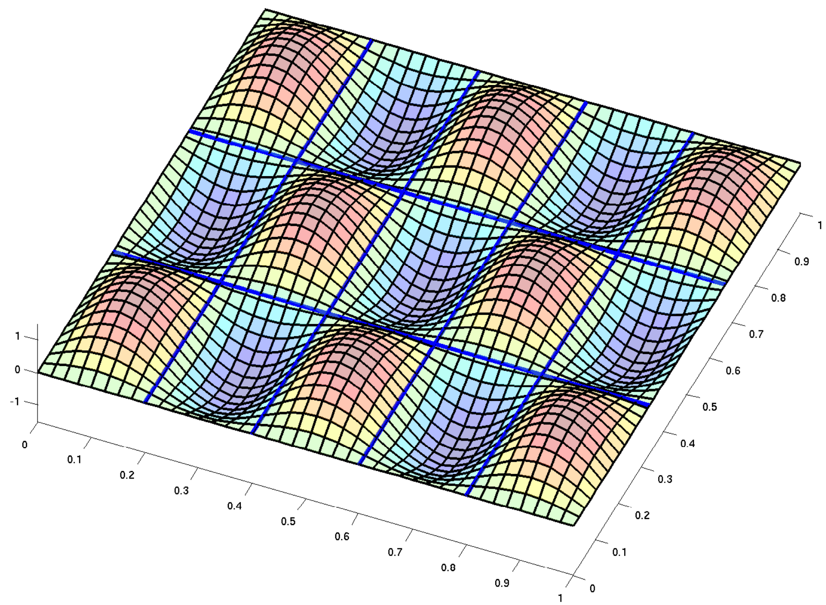
Lösung der Schwingungsgleichung für eine rechteckige Membran III

Illustration: zwei leicht verschiedene Ansichten der Eigenfunktion

$$U(x,y) = X(x)\,Y(y) = A \sin\left(\frac{\pi\,\ell}{a}\,x\right) \sin\left(\frac{\pi\,j}{b}\,y\right)$$

für $j = 5$, $\ell = 3$. Die blauen Strecken sind die Knotenlinien. Auf diesen Linien bleibt die Membran während der Eigenschwingung $u(x,y,t) = T(t)\,U(x,y)$ in Ruhe.





Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran I

Wir betrachten nun Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran mit Radius R, die am Rand fest eingespannt ist. Um die Schwingungsgleichung mit dieser Randbedingung zu lösen geht man am besten zu Polarkoordinaten (ρ, ϕ) über, die mit den kartesischen Koordinaten wie folgt zusammenhängen:

$$x = \rho\cos(\phi),\; y = \rho\sin(\phi),\; \rho = \sqrt{x^2+y^2},\; \tan(\phi) = y/x$$

Die Schwingungsgleichung lautet in Polarkoordinaten:

$$0 = (\Delta + k^2)\, U(x,y) = \left(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}_{(LP)} + k^2 \right) U(\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi)).$$

Dies ergibt eine etwas längere Rechnung. Der Operator (LP) ist der Laplace-Operator bzgl. Polarkoordinaten. Wir machen den Separationsansatz

$$U(\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi)) = R(\rho)\,\Phi(\phi).$$

Einsetzen des Ansatzes in die Schwingungsgleichung ergibt

$$0 = (R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho))\,\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)\,\Phi''(\phi) + k^2\, R(\rho)\,\Phi(\phi).$$

Teilen der Gleichung durch $R(\rho)\,\Phi(\phi)$, Multiplizieren mit ρ^2 und Umstellen ergibt:

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + k^2\,\rho^2 = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} =: \lambda$$

Weiter auf der nächsten Seite.

Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran II

Aus der eben gewonnenen Identität $\rho^2 \dfrac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \dfrac{R'(\rho)}{R(\rho)} + k^2 \rho^2 = -\dfrac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} =: \lambda$

folgen die Gleichungen

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + ((k\rho)^2 - \lambda) R(\rho) = 0, \qquad \Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0.$$

Die rechte Gleichung hat die Lösungen

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} A \cos(\sqrt{\lambda}\,\phi - \phi_0) & \text{wenn } \lambda \neq 0, \\ c_1 \phi + c_2 & \text{wenn } \lambda = 0. \end{cases}$$

Weil $U(x,y) = R(\rho)\,\Phi(\phi)$ differenzierbar sein soll, muss Φ 2π-periodisch sein. Dies impliziert $\lambda = n^2$, $\in \mathbb{N}$. Die linke Gleichung wird nun durch Einführung der neuen Größen

$$\xi := k\,\rho, \qquad f(\xi) = R(\xi/k) = R(\rho)$$

noch etwas modifiziert. Man hat

$$\begin{aligned} 0 &= \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + ((k\rho)^2 - n^2) R(\rho) \\ &= (k\,\rho)^2 \frac{R''((k\,\rho)/k)}{k^2} + (k\,\rho) \frac{R'((k\,\rho)/k)}{k} + ((k\rho)^2 - n^2) R((k\,\rho)/k) \\ &= \xi^2 \frac{R''(\xi/k)}{k^2} + \xi \frac{R'(\xi/k)}{k} + (\xi^2 - n^2) R(\xi/k) \\ &= \xi^2 f''(\xi) + \xi f'(\xi) + (\xi^2 - n^2) f(\xi) \end{aligned}$$

Diese DGL für f heisst **Besselsche Differentialgleichung**.

Es ist eine lineare DGL 2. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran III

Wir haben damit folgendes Ergebnis erhalten:

Alle Lösungen der Helmholtz'schen Schwingungsgleichung $(\Delta + k^2)\, U(x,y) = 0$, die sich als Produkt $U(x,y) = R(\rho)\, \Phi(\phi)$ schreiben lassen, haben die Form

$$U(x,y) = \underbrace{A \cos(n\,\phi - \phi_0)}_{\Phi(\phi)}\, \underbrace{f(k\rho)}_{R(\rho)}.$$

Dabei ist f eine Lösung der **Bessel'schen Differentialgleichung**

$$\xi^2\, f''(\xi) + \xi\, f'(\xi) + (\xi^2 - n^2)\, f(\xi) = 0.$$

Bemerkung: f hängt von n ab.

Randbedingung: Damit

$$U(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \text{(Der Rand der Membran ist unbeweglich)}$$

muss gelten, dass $f(kr) = 0$. Dies ist eine Bedingung an die Wellenzahl k.

Problem: Wie sehen die Lösungen der Bessel'schen DGL aus?

Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran IV

Eine längere Rechnung mit einem Potenzreihenansatz (siehe Skript) zeigt:

Die Besselsche Differentialgleichung zum Paramter $n \in \mathbb{N}$

$$\xi^2 f''(\xi) + \xi f'(\xi) + (\xi^2 - n^2) f(\xi) = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$f(\xi) = c_1 J_n(\xi) + c_2 N_n(\xi), \qquad \xi > 0$$

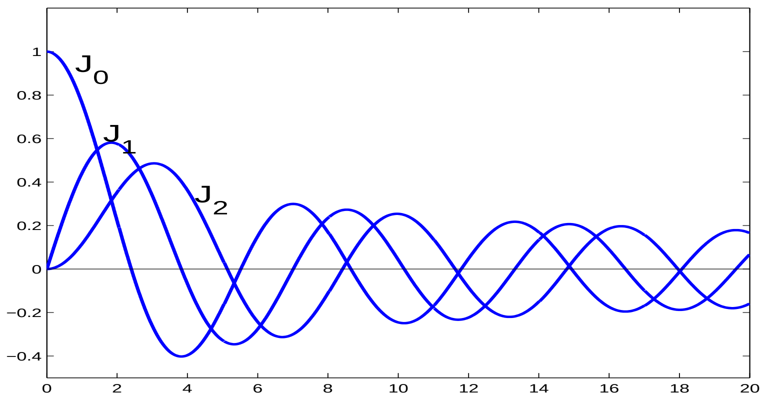
wobei

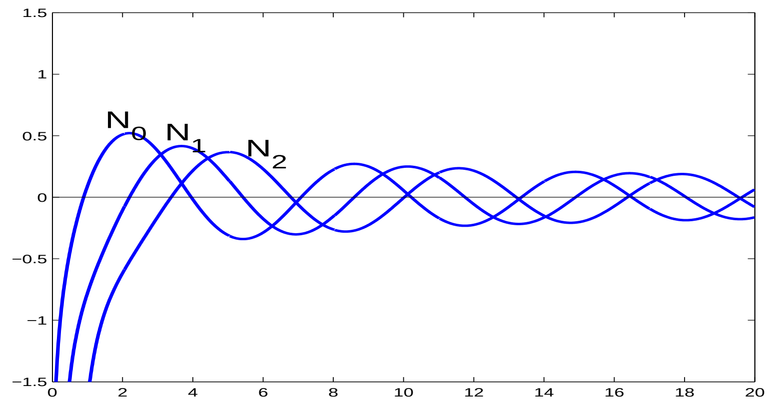
$$\lim_{\xi\to 0} N_n(\xi) = -\infty, \qquad \lim_{\xi\to 0} J_n(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

und

$$J_n(\xi) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2m+n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\xi \sin(t) - n\,t)\, dt$$

Die Funktionen J_n heissen **Besselfunktionen 1. Art**.
Die Funktionen N_n heissen **Besselfunktionen 2. Art** oder auch **Neumannfunktionen**.
Zur Definition von N_n und zur Definition von J_n für nicht ganzzahlige n siehe Skript.





Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran V

Jede Besselfunktion J_n hat unendlich viele Nullstellen

$$0 \leq \nu_{n,1} < \nu_{n,2} < \nu_{n,3} \dots$$

Endergebnis:
Das Randwertproblem für die Schwingungsgleichung der am Rand eingespannten kreisförmigen Membran vom Radius r,

$$(\Delta + k^2)\, U(x,y) = 0, \qquad \text{und} \quad U(x,y) = 0 \quad \text{für } \sqrt{x^2 + y^2} = r,$$

hat die Separationslösungen

$$U(x,y) = A \cos(n\,\phi - \phi_0)\, J_n(k\,\rho), \quad \text{mit } : k = \frac{\nu_{n,j}}{r},$$

wobei $A, \phi_0 \in \mathbb{R}$ beliebig wählbare Konstanten sind, und $x = \rho\cos(\phi),\ y = \rho\sin(\phi)$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass das Randwertproblem für keine anderen Werte k von 0 verschiedene Lösungen hat.

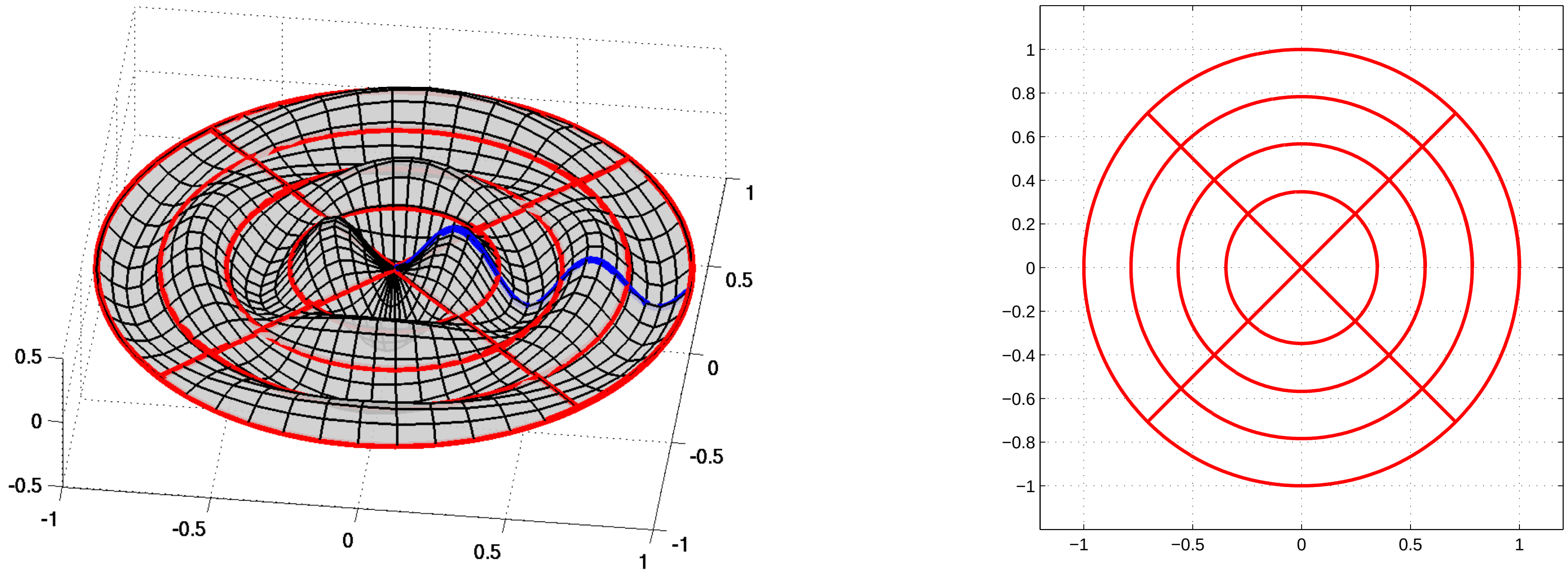
Ein Beispiel, das zeigt, wie eine der obigen Lösungen aussieht,
findet man auf der nächsten Seite. Ein Film dazu wird in der VL gezeigt.

Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran VI

Die Bilder unten zeigen die Separationslösung

$$U = \cos(2\,\phi)\,J_2(\nu_{2,4}\,\rho)$$

und die Knotenlinien $U = 0$ (rot) für eine eingespannte Membran vom Radius $r = 1$.
Die blaue Kurve ist der Graph der skalierten Besselfunktion $\rho \mapsto J_2(\nu_{2,4}\,\rho)$.
Die Radien der kreisförmigen Knotenlinien sind die Nullstellen dieser Funktion.



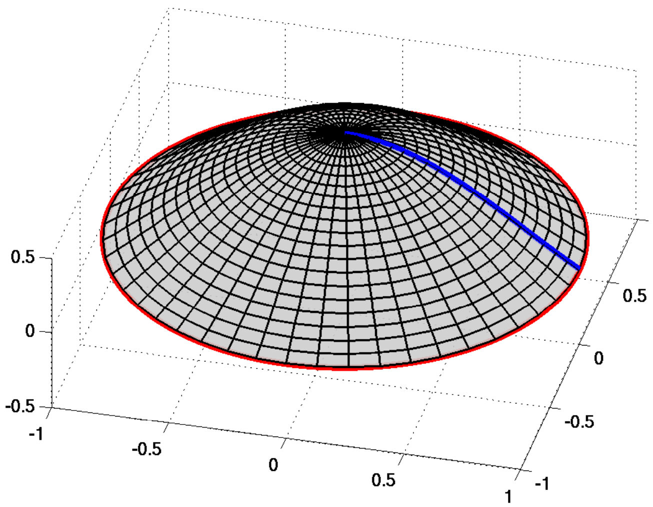
Animation der zugehörigen Bewegung (stehende Welle) in der Vorlesung.

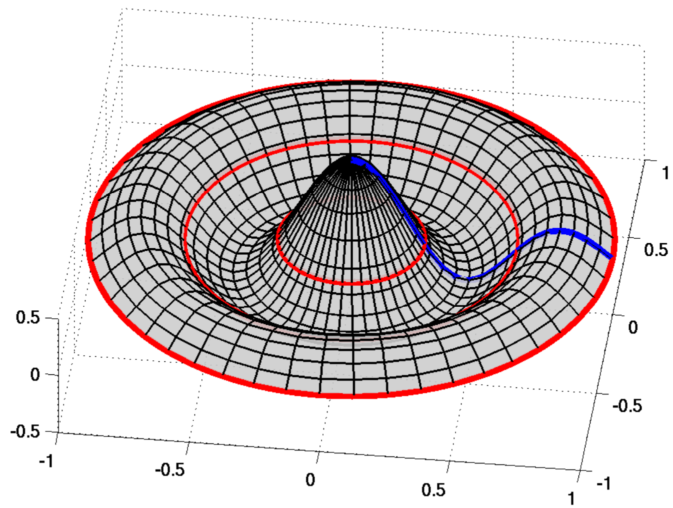
Freie Schwingungen einer kreisförmigen Membran VII

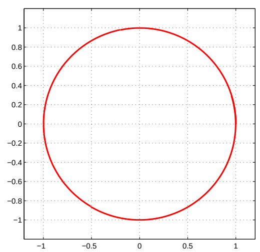
Für den Fall $n = 0$ erhält man die rotationssymmetrischen Lösungen

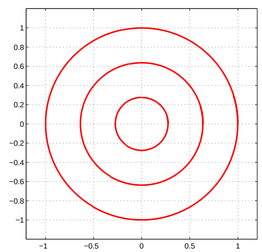
$$U = \cos(0\,\phi)\,J_0(\nu_{0,j}\,\rho) = J_0(\nu_{0,j}\,\rho)$$

Die Bilder unten zeigen die Fälle $j = 0$ (Grundschwingung) und $j = 3$.
Die blaue Kurve ist der Graph der skalierten Besselfunktion $\rho \mapsto J_0(\nu_{0,j}\,\rho)$.
Die Radien der kreisförmigen Knotenlinien sind die Nullstellen dieser Funktion.









Animation der zugehörigen Bewegung (stehende Welle) in der Vorlesung.