

Differentialgleichungen für Ingenieure

WS 05/06

11. Vorlesung

Michael Karow

Thema heute:

- Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung
- Separationsansatz
- d'Alembert-Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung
- Kugelwellen, inhomogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$
- 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung

Wellengleichung und andere partielle DGL

Die einfachsten und gleichzeitig sehr wichtigen partiellen DGL 2. Ordnung sind

$$\text{Wellengleichung: } \ddot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\text{Wärmeleitungsgl. (Diffusionsgl.): } \dot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$\text{Poisson-Gleichung: } \Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ oder } -\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$$\text{Laplace-Gleichung: } \Delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Leichte Verallgemeinerungen von (1) und (2) sind

$$\mu(\mathbf{x}) \ddot{u}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) = \mu(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \dot{u}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t)) = \mu(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Dabei ist $\operatorname{div}(v)$ die Divergenz des Vektorfeldes v und ∇u der Gradient des Skalarfeldes u . **Erinnerung:** $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$. In den Anwendungen sind $\kappa, \mu > 0$. Wenn κ, μ nicht von $\mathbf{x}$ abhängen, sondern konstant sind, dann kann man κ vor das Integral ziehen und (5), (6) durch μ teilen. Man bekommt so die Gleichungen (1) und (2) mit $c = \sqrt{\kappa/\mu}$.

Terminologie: Die obigen DGL heißen homogen, wenn $f \equiv 0$. Die Lösungen von (4) nennt man harmonische Funktionen.

Merke: Partielle DGL haben im allgemeinen sehr viele Lösungen. Um eine eindeutige Lösung zu bekommen braucht man **Anfangs- und/oder Randbedingungen**.

Nebenbemerkung: Man teilt die linearen partiellen DGL 2. Ordnung in die Typen 'hyperbolisch', 'parabolisch' und 'elliptisch' ein. Bei dieser Einteilung sind (1) und (5) hyperbolisch, (2) und (6) parabolisch und (3) und (4) elliptisch. (siehe Literatur)

Die Wellengleichung

Die Wellengleichung lautet

$$\text{in einer Dimension: } \ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\text{in } n \text{ Dimensionen: } \ddot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist $c > 0$ und Δ ist der Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Die Wellengleichung ist eine lineare partielle DGL 2. Ordnung. Wie wir noch sehen werden, ist c die Geschwindigkeit, mit der sich die Lösungen der Wellengleichung ausbreiten oder (räumlich) bewegen. Es gibt aber auch Lösungen (stehende Wellen), die sich räumlich nicht bewegen.

Die Wellengleichung kommt in vielen physikalischen Zusammenhängen vor. Beispiele:

- Ausbreitung von Schall (Schallwellen) in Fluiden: u =Druck o. Dichte, c =Schallgeschw..
- Ausbreitung elektromagnetischer Felder: u =elektr. oder magnet. Feldstärke oder ein Potential. c =Lichtgeschwindigkeit.
- Auslenkung einer Membran (Trommelfell) oder der schwingenden Saite.
- longitudinale Verschiebungen der Querschnittsflächen in einem elastischen Stab.
- Bewegung der Oberfläche von Wasser (also Wellen im umgangssprachlichen Sinn).

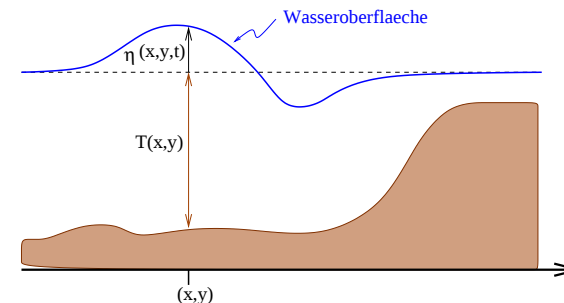
In den meisten dieser Beispiele ist die Wellengleichung nur eine Näherung (Linearisierung) einer komplizierteren DGL, die das jeweilige Phänomen exakter beschreibt.

Beispiel: Linearisierte Flachwassergleichung

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(x, y, t) - \operatorname{div}(g T(x, y) \nabla \eta(x, y, t)) = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= \text{Erhebung (engl.: elevation) der Wasseroberfläche} \\ T(x, y) &= \text{Tiefe de Bodens } (T > 0) \\ g &= \text{Fallbeschleunigung} \end{aligned}$$



Beispiel: Bewegungsgleichung einer schubstarren Platte

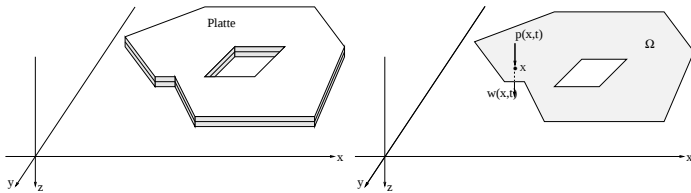
$$\rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K \Delta w = p \quad + \text{Randbedingungen,}$$

wobei

$w = w(\mathbf{x}, t)$	Verschiebung des Punkts $\mathbf{x}$ in z -Richtung
$p = p(\mathbf{x}, t)$	Lastschüttung
d	Plattendicke
ρ	Dichte
K	Plattensteifigkeit

Es ist

$$K = \frac{E d^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \begin{array}{ll} E & \text{E-Modul} \\ \nu & \text{Querkontraktionszahl} \end{array}$$



Der Separationsansatz für die 1-dimensionale homogene Wellengleichung

Wir betrachten die homogene Wellengleichung in einer Raumdimension:

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0.$$

Separationsansatz:

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Einsetzen des Ansatzes in die DGL ergibt:

$$X(x) \ddot{T}(t) - c^2 X''(x) T(t) = 0.$$

Diese Gleichung teilt man durch $X(x) T(t)$ und sortiert die von t abhängigen Teile auf die eine Seite und die von x abhängigen Terme auf die andere Seite. Dann hat man

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Wenn man nun in Gedanken x konstant lässt und t variiert, dann stellt man fest, dass der Quotient $\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$ gar nicht von t abhängt, sondern konstant ist. Dasselbe gilt für die rechte Seite der Gleichung. Also ist

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} =: \lambda. \quad (*)$$

Die Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ kann zunächst beliebig sein. Durch physikalisch-mathematische Einschränkungen (Randbedingungen etc.) sind dann aber doch nur bestimmte Werte von λ relevant. Aus (*) bekommt man 2 gewöhnliche DGL, nämlich

$$\ddot{T}(t) = \lambda T(t), \quad X''(x) = \frac{\lambda}{c^2} X(x).$$

Wie löst man partielle DGL?

Zur Lösung partieller DGL gibt es sehr viele Techniken. Die einfachste Technik für homogene lineare DGL ist der

Separationsansatz (Produktansatz) von Bernoulli.

Dabei sucht man Lösungen, die Produkte von Funktionen in jeweils einer Variablen sind, z. B.:

$$u(t, \mathbf{x}) = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = T(t) X_1(x_1) X_2(x_2) \dots X_n(x_n). \quad (**)$$

Setzt man mit einem solchen Ansatz in die partielle DGL ein, dann bekommt gewöhnliche DGL für die gesuchten Funktionen $T, X_1, X_2, \dots, X_n$. In diesen gewöhnlichen DGL kommen frei wählbare Konstanten vor, die man an die gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen anpassen muss. Die Konstanten kann man als Eigenwerte eines Differentialoperators auffassen. Die Aufgaben, die gewöhnlichen DGL zu lösen, nennt man daher

Eigenwertprobleme.

Durch einen Ansatz der Form (**) bekommt man zwar viele Lösungen der partiellen DGL, aber längst nicht alle. In der Regel erhält man aber alle Lösungen, indem man die Produktlösungen linear kombiniert. Man muss dabei Linearkombinationen mit unendlich vielen Summanden (d.h. unendliche Reihen oder sogar Integrale) bilden.

Auf der nächsten Seite kommt das einfachste relevante Beispiel.

Die DGL $\dot{T}(t) = \lambda T(t)$ als Eigenwertproblem

Die DGL $\dot{T}(t) = \lambda T(t)$ kann man auch (etwas umständlich) in folgender Form schreiben:

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) = \lambda T(t). \quad (**)$$

Dabei ist $\frac{d^2}{dt^2}$ der Differentialoperator des 2-maligen Ableitens.

Erinnerung:

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Seien $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ so dass

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Dann nennt man λ einen Eigenwert von $\mathbf{A}$, und $\mathbf{v}$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

Dies motiviert die folgende Terminologie:

Wenn (**) gilt, und $T(t) \neq 0$ dann nennt man λ einen **Eigenwert** des Differentialoperators $\frac{d^2}{dt^2}$. $T(t)$ ist eine zugehörige **Eigenfunktion**.

Die DGL (**) nennt man ein **Eigenwertproblem**.

Meistens fordert man auch noch, dass $T(t)$ bestimmte Randbedingungen erfüllen muss. Dadurch ergeben sich Einschränkungen an λ (siehe nächste VL).

Lösungen des Eigenwertproblems $\ddot{T}(t) = \lambda T(t)$

Je nach Vorzeichen von λ hat man 3 Fälle.

1. Fall: $\lambda = 0$

In diesem Fall lautet die DGL: $\ddot{T}(t) = 0$.

Die allgemeine Lösung ist: $T(t) = c_1 + c_2 t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ beliebig.

2. Fall: $\lambda > 0$.

Notation: $\lambda = \omega^2$ mit $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$.

Die DGL lautet dann $\ddot{T}(t) = \omega^2 T(t)$.

Die allgemeine Lösung ist $T(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ beliebig.

Die Lösungen für diese Fälle sind entweder konstant oder werden für große (positive oder negative) Zeiten beliebig groß. Diese Lösungen sind daher physikalisch uninteressant und werden nicht weiter betrachtet.

Das Ergebnis des Separationsansatzes

Wir haben gesehen, dass sich aus dem Ansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ für die DGL

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u(x, t) = 0 \quad (*)$$

die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\ddot{T}(t) = \lambda T(t), \quad \ddot{X}(x) = \frac{\lambda}{c^2} X(x).$$

Physikalisch relevante Lösungen hat man für $\lambda = -\omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}$. Man bekommt dann

$$T(t) = R_0 \cos(\omega t - \phi_0), \quad X(x) = R_1 \cos(kx - \phi_1), \quad -k^2 = \lambda/c^2 = -\omega^2/c^2.$$

Insgesamt (mit $A = R_0 R_1$ und $A, \omega, k, \phi_0, \phi_1 \in \mathbb{R}$):

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - \phi_0) \cos(kx - \phi_1) \quad k^2 c^2 = \omega^2 \quad (**)$$

Weitere Lösungen von (*) bekommt man, indem man Lösungen vom Typ (**) addiert:

$$u(x, t) = \sum_j A_j \cos(\omega_j t - \phi_{0j}) \cos(k_j x - \phi_{1j}) \quad k_j^2 = c^2 \omega_j^2$$

Die Summe kann unendlich viele Summanden haben.

Lösungen des Eigenwertproblems $\ddot{T}(t) = \lambda T(t)$

3. Fall: $\lambda < 0$. Notation: $\lambda = -\omega^2$ mit $\pm\omega = \sqrt{-\lambda}$. Die DGL lautet dann $\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$.

Die allgemeine Lösung kann in verschiedenen Formen angegeben werden:
(blau gedruckte Terme sind wichtige Ergebnisse)

$$\begin{aligned} T(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, & c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ beliebig} \\ &= c_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + c_2 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=: \tilde{c}_1} \cos(\omega t) + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{=: \tilde{c}_2} \sin(\omega t) \\ &= \tilde{c}_1 \cos(\omega t) + \tilde{c}_2 \sin(\omega t) & \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{C} \text{ beliebig} \\ &= \Re(\underbrace{(\tilde{c}_1 - i\tilde{c}_2)}_{=: c} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))) & \text{falls } \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R} \\ &= \Re(c e^{i\omega t}) & c \in \mathbb{C} \text{ beliebig} \\ &= \Re(R e^{i\phi} e^{i\omega t}) & c = R e^{i\phi}, R \geq 0, \phi \in \mathbb{R} \\ &= R \Re(e^{i(\omega t + \phi)}) \\ &= R \cos(\omega t + \phi) & R \geq 0, \phi \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Man kann auch mit Imaginärteilen statt mit Realteilen rechnen:

$$T(t) = \tilde{c}_1 \cos(\omega t) + \tilde{c}_2 \sin(\omega t) = \Im((\tilde{c}_2 + i\tilde{c}_1) e^{i\omega t}) = \dots = R \sin(\omega t + \tilde{\phi}),$$

wobei $\tilde{\phi} \in \mathbb{R}$ beliebig. Da eine Sinus-Funktion aber nur eine phasenverschobene Cosinus-Funktion ist, bekommt man auf diese Weise kein neues Ergebnis. Ebenso kann man auch $R < 0$ wählen, ohne neue Ergebnisse zu erhalten, denn dies entspricht einer weiteren Phasenverschiebung um π .

Die homogene Wellengleichung ohne Randbedingungen

Wir betrachten die homogene 1-dimensionale Wellengleichung

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (*)$$

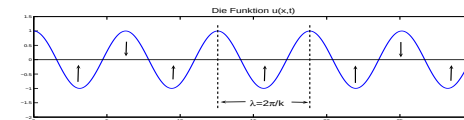
wobei wir Randbedingungen ausser Acht lassen. Durch einen Separationsansatz oder intelligentes Raten bekommt man die reellen Lösungen

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - \phi_0) \cos(kx - \phi_1),$$

wobei die Konstanten $A, \phi_0, \phi_1 \in \mathbb{R}$ beliebig sind, und für die Konstanten $\omega, k \in \mathbb{R}$ folgende Beziehung gelten muss:

$$\omega^2 = c^2 k^2.$$

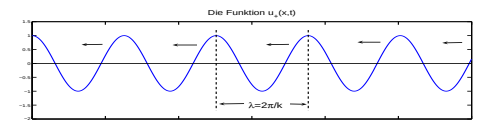
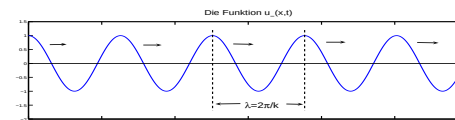
Diese Lösungen sind **stehende Wellen** der **Wellenlänge** $\lambda = 2\pi/k$.



Andere Lösungen von (*) sind

$$u_-(x, t) = A \cos(kx - \omega t - \phi), \quad u_+(x, t) = A \cos(kx + \omega t - \phi).$$

Dies sind **laufende Wellen** der **Wellenlänge** $\lambda = 2\pi/k$. Wenn ω und k gleiches Vorzeichen haben, dann laufen die Wellen u_- nach rechts und die Wellen u_+ nach links:



Die Wellen bewegen sich mit der Geschwindigkeit $c = |\omega|/|k|$.

(Begründung kommt gleich). Der Parameter k heisst **Wellenzahl**.

Die Geschwindigkeit der laufenden Wellen

Wir betrachten einen geometrischen Punkt, der sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts bewegt:

$$x(t) = x_0 + ct.$$

Setzt man $x(t)$ in die Funktion u_- für die nach rechts laufende Cosinus-Welle ein, so folgt ($\omega, k > 0$):

$$\begin{aligned} u_-(x(t), t) &= A \cos(kx(t) - \omega t - \phi) \\ &= A \cos(k(x_0 + ct) - \omega t - \phi) \\ &= A \cos(kx_0 + \underbrace{(kc - \omega)}_{=0} t - \phi) \\ &= A \cos(kx_0 - \phi) \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

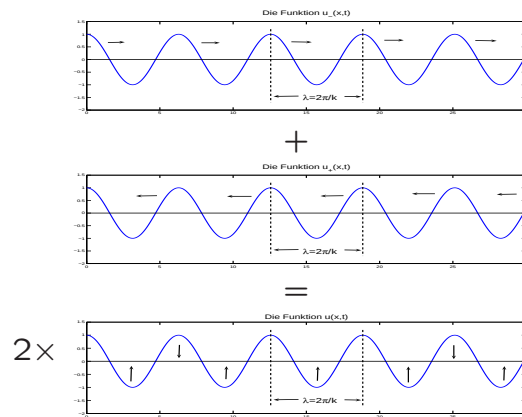
Der Wert von u_- an dem bewegten Punkt $x(t)$ ist also konstant.

Also: Der Graph von u_- bewegt sich mit der Geschwindigkeit c nach rechts.

Siehe Animation in der Vorlesung.

Stehende Wellen als Überlagerung von laufenden Wellen

Eben wurde demonstriert, dass man laufende Wellen als Überlagerung von stehenden Wellen erhalten kann. Umgekehrt bekommt man stehende Wellen als Überlagerung gegenläufiger laufender Wellen:



Beweis davon:

$$\begin{aligned} \cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t) &= \Re(e^{i(kx + \omega t)}) + \Re(e^{i(kx - \omega t)}) \\ &= \Re(e^{i(kx + \omega t)} + e^{i(kx - \omega t)}) \\ &= \Re(e^{ik}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})) = \Re(e^{ik} 2 \cos(\omega t)) \\ &= 2 \cos(kx) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Laufende Wellen als Überlagerung von stehenden Wellen

Man kann laufende Wellen als Überlagerung zweier zueinander (räumlich und zeitlich) verschobener stehender Wellen erhalten.

Beispiel: Betrachte die stehenden Wellen

$$u_1(x, t) = \cos(kx) \cos(\omega t), \quad u_2(x, t) = \sin(kx) \sin(\omega t).$$

Addition (physikalisch: Überlagerung, Superposition) ergibt:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) + u_2(x, t) &= \cos(kx) \cos(\omega t) + \sin(kx) \sin(\omega t) \\ &= \Re([\cos(kx) + i \sin(kx)] [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)]) \\ &= \Re(e^{ikx} e^{-i\omega t}) \\ &= \Re(e^{i(kx - \omega t)}) \\ &= \cos(kx - \omega t). \\ &\quad \uparrow \text{laufende Welle.} \end{aligned}$$

Laufende Cosinus-Wellen in komplexer Darstellung

Es ist (Notation: $\Re$ = Realteil)

$$\begin{aligned} A \cos(kx - \omega t - \phi) &= A \Re(e^{i(kx - \omega t - \phi)}) \\ &= \Re(A e^{i(kx - \omega t - \phi)}) \\ &= \Re(A e^{i(kx - \omega t)} e^{-i\phi}) \\ &= \Re(A e^{-i\phi} e^{i(kx - \omega t)}) \\ &= \Re(a e^{i(kx - \omega t)}) \end{aligned}$$

mit der komplexen Amplitude $a = A e^{-i\phi} \in \mathbb{C}$.

Notation: ω als Funktion von k

Die Funktionen $A \cos(kx \pm \omega t - \phi)$ sind nur dann Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0,$$

wenn $\omega^2 = c^2 k^2$, also $\omega = \pm c k$.

Wir entscheiden uns für ein Vorzeichen und setzen

$$\omega(k) = c|k|$$

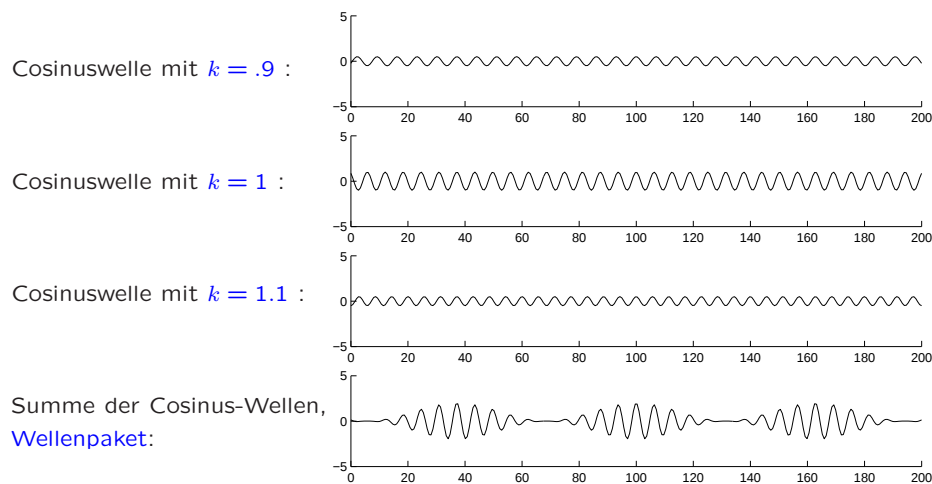
Mit dieser Konvention ist die Funktion

$$A \cos(kx - \omega(k)t - \phi) = \Re \left(a e^{i(kx - \omega(k)t)} \right), \quad a = A e^{-i\phi} \in \mathbb{C}$$

eine nach rechts laufende Welle, wenn $k > 0$,

eine nach links laufende Welle, wenn $k < 0$.

Beispiel: Ein Wellenpaket aus 3 Cosinus-Wellen



In allen Fällen in diesem Beispiel ist $\omega = 1$.

Merkwürdiges Phänomen:

Die oberen drei Wellen laufen nach rechts, die Überlagerung aber nach links (siehe Animation in der VL).

Superposition von Cosinus-Wellen: Wellenpakete

Da die DGL $\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0$ linear und homogen ist, sind Linearkombinationen von Lösungen ebenfalls Lösungen. Endliche Summen von Cosinuswellen

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n \Re \left(a(k_j) e^{i(k_j x - \omega(k_j) t)} \right) = \Re \left(\sum_{j=1}^n a(k_j) e^{i(k_j x - \omega(k_j) t)} \right), \quad (*)$$

$$k_j \in \mathbb{R}, \quad \omega(k_j) = c|k_j|, \quad a(k_j) \in \mathbb{C},$$

sind also stets Lösungen der homogenen Wellengleichung. Unendliche Reihen ($n = \infty$) sind ebenfalls Lösungen, wenn die Amplituden $a(k_j)$ so sind, dass man partielle Ableitungen nach x und t unter das Summenzeichen ziehen darf.

Man kann sogar das Summenzeichen durch das Integralzeichen ersetzen und bekommt Lösungen der Form

$$u(x, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \right), \quad (*)$$

wobei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine gegebene komplexwertige Funktion ist. Dies gibt nur dann eine Lösung wenn man die Ableitungen nach x und t unter das Integralzeichen ziehen darf.

Lösungen der Form (**) (oder auch der Form (*) wenn man viele Summanden hat) nennt man auch **Wellenpakete**.

Dispersionsrelation, Gruppengeschwindigkeit

Neben der Standard-Wellengleichung $\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = 0$ kommen in den Anwendungen auch andere partielle DGL vor, die Cosinus-Wellen als Lösungen haben.

Beispiel: Die DGL (Balken mit Vorspannung)

$$\ddot{u}(x, t) - d u''(x, t) + EI u^{(4)}(x, t) = 0$$

hat die Lösungen

$$u(x, t) = \Re \left(a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \right),$$

wobei

$$\omega(k) = \sqrt{d^2 k^2 + EI k^4}$$

Eine solche Beziehung zwischen k und ω heisst **Dispersionsrelation**.

(Die Dispersionsrelation bei der Wellengleichung ist $\omega(k) = c|k|$) Ein Wellenpaket, das nur aus Wellen mit Wellenzahlen in einem kleinen Intervall um k_0 zusammengesetzt ist,

$$u(x, t) = \Re \left(\int_{k_0 - \epsilon}^{k_0 + \epsilon} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \right), \quad \epsilon > 0 \text{ klein,}$$

bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0),$$

obwohl sich die einzelnen Wellen mit der Geschwindigkeit

$$c_p(k_0) = \omega(k_0)/k_0$$

bewegen. c_g heisst **Gruppengeschwindigkeit**. c_p heisst **Phasengeschwindigkeit**.

Bei der Standardwellengleichung ist stets $c_g(k_0) = c_p(k_0)$, also

Phasengeschwindigkeit=Gruppengeschwindigkeit.

Siehe Animation in der Vorlesung.

Der mehrdimensionale Fall: Ebene Wellen I

Wir betrachten nun die n -dimensionale homogene Wellengleichung

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3 \text{ oder größer.}$$

Sei $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ irgendein Vektor (**Wellenvektor**).

Wie man leicht durch direktes Nachrechnen verifiziert, sind die Funktionen

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= A \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n - \omega(\mathbf{k}) t - \phi) \\ &= A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi) = \Re \left(a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t)} \right), \quad a = A e^{-i\phi}, \\ &\quad \uparrow \text{Skalarprodukt} \end{aligned}$$

Lösungen der Wellengleichung, sofern

$$\omega(\mathbf{k}) = c \|\mathbf{k}\|, \quad \|\mathbf{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2}.$$

Diese Lösungen heißen **Ebene Wellen**, und zwar aus folgendem Grund: Die Mengen

$$E_\alpha := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \alpha \}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

sind Geraden ($n = 2$), Ebenen ($n = 3$) oder Hyperebenen ($n > 3$). Auf diesen Mengen hat u bei festgehaltenem t überall denselben Wert. Der Wellenvektor steht senkrecht auf allen E_α . Die Welle bewegt sich in Richtung $\mathbf{k}$.

Gleichungen für Elektromagnetische Wellen (z.B. Licht, Radiowellen) in einem isotropen ungeladenen Nichtleiter:

$$\ddot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \ddot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

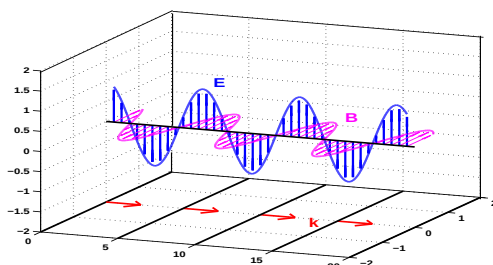
wobei $\mathbf{E}$ = elektrische Feldstärke, $\mathbf{B}$ =magnetische Induktion, c =Lichtgeschw..

Nebenbedingungen: $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}.$

Die Gleichungen haben Lösungen der Form

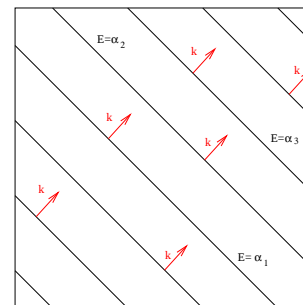
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t).$$

Dabei sind $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{k}$ zueinander senkrecht, $\|\mathbf{B}_0\| = \|\mathbf{E}_0\|/c$, und $\omega = \|\mathbf{k}\| c$.



Der mehrdimensionale Fall: Ebene Wellen II

Illustration zu ebenen Wellen:



Natürlich kann man mit ebenen Wellen auch Wellenpakete bilden:

$$u(\mathbf{x}, t) = \Re \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t)} d\mathbf{k} \right), \quad a(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$$

Der mehrdimensionale Fall: Ebene Wellen III

Bisher haben wir für die homogene Wellengleichung

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (*)$$

Lösungen der Form

$$A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi), \quad \omega(\mathbf{k}) = c \|\mathbf{k}\|$$

betrachtet. Es kommt allerdings gar nicht darauf an, dass die Funktion, in die das Argument $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi$ eingesetzt wird, der Cosinus ist:

Behauptung: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine 2mal diff'bare Funktion. Dann ist

$$f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi), \quad \omega(\mathbf{k}) = c \|\mathbf{k}\|$$

eine Lösung von (*).

Beweis durch direktes Nachrechnen:

Die zweite partielle Ableitung von u nach der ersten Komponente von $\mathbf{x}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n - \omega(\mathbf{k}) t - \phi) \\ &= k_1^2 f''(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n - \omega(\mathbf{k}) t - \phi). \end{aligned}$$

Analog für alle anderen Komponenten. Addition der Ableitungen ergibt

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u(\mathbf{x}, t) = (k_1^2 + \dots + k_n^2) f''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi) \\ &= \|\mathbf{k}\|^2 f''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi). \end{aligned}$$

Die zweite partielle Ableitung von u nach t ist

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{k})^2 f''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi) = c^2 \|\mathbf{k}\|^2 f''(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t - \phi). \quad q.e.d.$$

Die allgemeine Lösung im 1-dimensionalen Fall: Der Satz von d'Alembert

Wir betrachten wieder die 1-dimensionale homogene Wellengleichung

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u''(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Wie wir wissen, hat diese Gleichung u.a. die Lösungen

$$u(x,t) = \tilde{f}(kx - (ck)t), \quad \tilde{f} \text{ 2mal diff'bar.}$$

Wir setzen $f(\xi) := \tilde{f}(k\xi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tilde{f}(kx - (ck)t) \\ &= \tilde{f}(k(x - ct)) \\ &= f(x - ct) \quad (**) \end{aligned}$$

Man kann direkt nachrechnen, dass jede Funktion vom Typ (**) mit 2mal diff'baren f eine Lösung ist. Ebenso sind die Funktionen $f(x + ct)$ Lösungen.

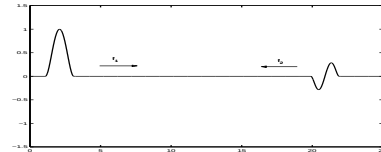
Satz von d'Alembert:

Alle Lösungen von (*), die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, sind von der Form

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct),$$

wobei $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ beliebige 2mal diff'bare Funktionen sind.

Die Welle $f_1(x - ct)$ läuft nach rechts,
die Welle $f_2(x + ct)$ läuft nach links.



Das Anfangswertproblem für die 1-dimensionale Wellengleichung II: der inhomogene Fall

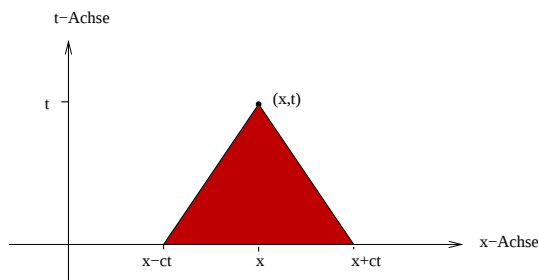
Gegeben sei das AWP

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u''(x,t) = f(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x).$$

Die Lösung ist (Herleitung siehe Literatur):

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Daraus erkennt man: Der Wert der Lösung im Punkt (x,t) hängt nur von den Werten von u_0, v_0 und f in dem im Bild angegebenen Dreieck ab.



Das Anfangswertproblem für die 1-dimensionale Wellengleichung I:

Anpassung der d'Alembert-Lösung an Anfangsbedingungen

Gegeben sei das AWP

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u''(x,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x).$$

Die Lösung ist

$$u(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (*)$$

mit

$$f_1(x - ct) = \frac{1}{2} u_0(x - ct) - \frac{1}{2c} V_0(x - ct), \quad (1)$$

$$f_2(x + ct) = \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} V_0(x + ct) \quad (2).$$

Dabei ist V_0 eine beliebige Stammfunktion von v_0 .

Beweis durch Nachrechnen (siehe Tutorium). Eine Stammfunktion ist z.B.

$$V_0(x) = \int_0^x v_0(\xi) d\xi.$$

Wenn man dies in (1), (2) einsetzt und dann in (*) etwas umsortiert, bekommt man das Endergebnis

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi.$$

Weitere Lösungen der homogenen Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$: Kugelwellen

homogene Wellengleichung: $\ddot{u} - c^2 \Delta u = 0$

Bisher besprochen: **Ebene Wellen**

$$u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \omega / \|\mathbf{k}\| = c.$$

Weitere Lösungen im $\mathbb{R}^3$: **Kugelwellen (Zentrum y)**

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \frac{f(r \pm ct)}{r}, \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 2mal diffbar,} \\ &= \frac{\tilde{f}(t \mp r/c)}{r} \quad \tilde{f}(\xi) = f(-c\xi) \end{aligned}$$

Inhomogene Wellengleichung: $\ddot{u} - c^2 \Delta u = p$

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}$$

(Kirchhoff'sche Formel, Superposition von Kugelwellen)

Anwendung der Kirchhoff'schen Formel:

Erzeugung von EM-Wellen durch Ladungen und Ströme

Inhomogene Wellengleichungen für das elektromagnetische Feld in einem homogenen isotropen Medium:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} - \Delta \mathbf{E} &= -\frac{1}{\epsilon} \nabla \rho - \mu \dot{\mathbf{J}}, \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} - \Delta \mathbf{B} &= \mu \mathbf{J},\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{J}$ =Stromdichte, ρ =Ladungsdichte, ϵ, μ Materialkonstanten. Man hat

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c = \text{Lichtgeschwindigkeit}.$$

Die Kirchhoff'sche Formel liefert z.B. für $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu \mathbf{J}(\mathbf{y}, t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/c)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}$$

⇒ Magnetfelder werden durch Ströme erzeugt.

Die Grundleistung (Green'sche Funktion) der Wärmeleitungsgleichung I

Aus den Separationslösungen $u(x, t) = A e^{-k^2 t} \cos(kx - \phi)$ kann man durch Linearkombination weitere Lösungen für die Wärmeleitungsgl. bekommen. Diese sind von der Form

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{-k_j^2 t} \cos(k_j x - \phi_j)$$

oder

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j e^{-k_j^2 t} \cos(k_j x - \phi_j)$$

oder

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-k^2 t} \cos(kx - \phi(k)) dk$$

Insbesondere ist die folgende Funktion g eine Lösung.

$$g(x, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} \cos(kx) dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0$$

↑ Siehe Skript

Die Funktion g ist für jedes $t > 0$ eine **Gaußsche Glockenkurve**. Sie wird für $t \rightarrow 0_+$ beliebig hoch und schmal. Man hat stets $\int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dx = 1$. Aus diesem Grund konvergiert die Funktionenfamilie $g(x, t)$ gegen die δ -Funktion. Formal:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(x, t) = \delta(x).$$

Die Funktion g nennt man die **Grundleistung der Wärmeleitungsgleichung**, weil man mit ihr Anfangswertprobleme durch ein Faltungsintegral lösen kann. Siehe nächste Seite.

Der Separationsansatz für die 1-dimensionale homogene Wärmeleitungsgl.

Die homogene Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung) in einer Raumdimension lautet in ihrer einfachsten Form:

$$\dot{u}(x, t) - u''(x, t) = 0.$$

Separationsansatz:

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Einsetzen des Ansatzes in die DGL ergibt:

$$X(x) \dot{T}(t) - X''(x) T(t) = 0.$$

Diese Gleichung teilt man durch $X(x) T(t)$ und sortiert die von t abhängigen Teile auf die eine Seite und die von x abhängigen Terme auf die andere Seite. Dann hat man

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = \lambda. \quad (*)$$

Aus (*) bekommt man 2 gewöhnliche DGL, nämlich

$$\dot{T}(t) = \lambda T(t), \quad X''(x) = \lambda X(x).$$

Physikalisch relevante Lösungen bekommt man für $\lambda = -k^2$, $k \in \mathbb{R}$. Die Lösungen sind

$$T(t) = c e^{-k^2 t}, \quad X(x) = R \cos(kx - \phi).$$

Für $u(x, t) = T(t) X(x)$ bekommt man so die **Separationslösungen** ($A = cR$):

$$u(x, t) = A e^{-k^2 t} \cos(kx - \phi).$$

Die Grundleistung (Green'sche Funktion) der Wärmeleitungsgleichung II

Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitung in einem unbegrenzten homogenen Wärmeleiter mit Energiezufuhr f lautet:

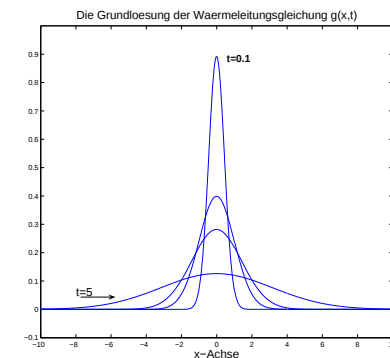
$$\dot{u}(x, t) - u''(x, t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Die Lösung für $t > 0$ ist die Summe von zwei Faltungsintegralen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Dabei ist g die Grundleistung:

$$g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$



Das Anfangswertproblem für die 1-dimensionale Wellengleichung III:

Darstellung durch Greensche Funktionen

Für das AWP der 1-dimensionalen Wellengleichung

$$\ddot{u}(x, t) - c^2 u''(x, t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x).$$

wurde bereits die folgende Lösung angegeben:

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Diese Lösung lässt sich ebenso wie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung als Summe von Faltungsintegralen schreiben:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x - \xi, t) v_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

mit den Green'schen Funktionen (Grundlösungen)

$$g_0(x, t) = \frac{\delta(x - ct) + \delta(x + ct)}{2}, \quad g_1(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & \text{für } |x| \leq ct, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$