Über das Lösen von Einheiten- und Indexformgleichungen in algebraischen Zahlkörpern

K. Wildanger
Technische Universität Berlin

30. November 1998

Abstract

Let K be an algebraic number field with non-zero $\alpha, \beta \in K$. Siegel showed in 1929 that there are only finitely many units $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in K which satisfy the unit equation $\alpha\,\varepsilon_1 + \beta\,\varepsilon_2 = 1$. In this article we present a new algorithm for solving unit equations which utilizes methods from the geometry of numbers. For the first time unit equations in number fields up to unit rank 10 and with more than 100,000 solutions are solved. By applying our algorithm to index form equations we compute all power integral bases in the cyclotomic number fields up to degree 12 and in $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$, $\mathbb{Q}(\zeta_{19})$, $\mathbb{Q}(\zeta_{23})$.

In dieser Arbeit wird das Lösen von Einheiten- und Indexformgleichungen in algebraischen Zahlkörpern behandelt. Beiden Problemstellungen ist gemein, daß sie jeweils nur endlich viele Lösungen besitzen. Algorithmen zur vollständigen Berechnung dieser Lösungen wurden möglich durch Ergebnisse von A. Baker zu Linearformen in den Logarithmen algebraischer Zahlen.

Das Lösen einer Einheitengleichung besteht im wesentlichen aus drei Schritten. Zuerst leitet man anhand der Resultate Bakers große obere Schranken für die Lösungen her. Diese Schranken werden im zweiten Schritt des Verfahrens mit dem LLL-Algorithmus reduziert. Im letzten Schritt, welcher die weitaus meiste Rechenzeit beansprucht, müssen alle unterhalb der Schranken liegenden Einheiten daraufhin überprüft werden, ob sie Lösungen der Einheitengleichung sind. Wir beschreiben im ersten Abschnitt dieser Arbeit ein neues Verfahren, mit dem diese Überprüfung effizienter als bislang durchgeführt werden kann. Mit dem Verfahren, welches Methoden aus der Geometrie der Zahlen benutzt, lösten wir Einheitengleichungen in Zahlkörpern bis hin zum Einheitenrang 10. Als Beispiel behandeln wir hier das Lösen einer Einheitengleichung in $\mathbb{Q}(\zeta_{19})$.