Zur Berechnung von Galoisgruppen

Diplomarbeit
von
Katharina Geißler

Angefertigt am Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Berlin
Berlin 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 3

2 Grundlagen 5
- 2.1 Gruppen . . . 5
- 2.2 Permutationsgruppen . . . 8
- 2.3 Imprimitivitätsgebiete und Blöcke . . . 9
- 2.4 Kranzprodukte . . . 11
- 2.5 Der Satz von Krasner und Kaloujnine . . . 14
- 2.6 Körpertheorie und Galoistheorie . . . 15

3 Das Verfahren von Stauduhar 21
- 3.1 Die Idee des Verfahrens . . . 21
- 3.2 Invariante Polynome . . . 24
- 3.3 Die Resolvente . . . 27
- 3.4 Tschirnhausentransformationen . . . 34
- 3.5 Präzision . . . 35
- 3.6 Zusammenfassung . . . 40

4 Berechnung der Daten 43
- 4.1 Berechnung G-relativer H-invarianter Polynome . . . 43
- 4.2 Maximale Konjugationsklassen . . . 46

5 Verbesserungen des Verfahrens 51
- 5.1 Das van der Waerden-Kriterium . . . 51
- 5.2 Konstruierte G-relative H-invariante Polynome . . . 53
- 5.3 Verkürzte Nebenklassenrepräsentanten . . . 60

6 Erweiterungen des Verfahrens 63
- 6.1 Teilkörper, Blöcke, Galoisgruppen . . . 63
- 6.2 Zwei Methoden . . . 65
- 6.3 Vergleich zum unerweiterten Verfahren . . . 66

7 Beispiele 69

Literaturverzeichnis **77**

Anhang I **81**

Anhang II **99**

Kapitel 1

Einleitung

Die Entwicklung der klassischen Algebra gelangt Anfang des 19. Jahrhunderts zu einem Kulminationspunkt durch die Arbeiten des Evariste Galois (1811-1832). Er machte in seinem kurzen und tragischen Leben geniale und fortwirkende Entdeckungen. Die Theorie von Galois beschäftigt sich mit den endlichen separablen Erweiterungen eines Körpers K und insbesondere mit deren Isomorphismen und Automorphismen. Jedem Polynom f in K läßt sich eindeutig eine Gruppe zuordnen, die sogenannte Galoisgruppe, welche die Struktur der kleinsten Körpererweiterung von K beschreibt, die alle Nullstellen von f enthält.

Die Berechnung der Galoisgruppe eines ganzrationalen normierten irreduziblen Polynoms vom Grad n ist Ziel dieser Arbeit. Theoretisch wurde dieses Problem schon von van der Waerden [36] gelöst: Es läßt sich auf die Faktorisierung eines Polynoms vom Grad $n!$, dessen Koeffizienten symmetrische Funktionen der Wurzeln von f sind, reduzieren. In der Praxis entwickelten sich zwei effiziente Methoden zur Berechnung von Galoisgruppen. Die erste Methode verwendet sogenannte Resolventen und setzt die Kenntnis der transitiven Gruppen des jeweiligen Grades voraus. Hier sind im wesentlichen die Verfahren von Stauduhar [34] und Soicher & McKay [32], [33] zu nennen. Die zweite Methode besteht aus zwei Teilen: erstens der Berechnung des Zerfällungskörpers von f und zweitens der Berechnung der Galoisgruppe mit Hilfe eines primitiven Elements des Zerfällungskörpers. Die Berechnung des Zerfällungskörpers geschieht durch sukzessive Erweiterung des Grundkörpers mittels Adjunktion der Wurzeln von f, wobei Faktorisierungsalgorithmen von Polynomen über algebraischen Zahlkörpern verwendet werden. Diese Methode wird in [1] vorgestellt und scheint für kleine Grade auch recht effektiv zu sein. Möchte man aber, wie in unserem Fall, Galoisgruppen größerer Grade berechnen, so bemerken die Autoren in [37], daß die Faktorisierungen über sukzessiven Erweiterungskörpern erhebliche Schwierigkeiten bereiten, und verweisen für diese Grade auf die erste Methode.

In dieser Arbeit stellen wir das Verfahren von Stauduhar [34] vor, welches sich im wesentlichen auf die Auswertung von Resolventen stützt, d.h. Polynomen, deren

Zerfällungskörper Teilkörper des Zerfällungskörpers von f ist. Wir werden dieses Verfahren für Polynome vom Grad $n \leq 12$ diskutieren und an entscheidenden Stellen verbessern. Zusätzlich werden auch neue Methoden basierend auf einem Algorithmus zur Teilkörperberechnung integriert. Gänzlich neu ist die Berechnung der für das Verfahren erforderlichen Daten und die Implementierung dieser Methode für den Grad $n = 12$. Die Schwierigkeiten liegen hierbei im wesentlichen in der erheblichen Anzahl der transitiven Gruppen, der wachsenden Ordnung der Gruppen, sowie der Größe der Indizes der S_{12} bzw. A_{12} zu den anderen transitiven Gruppen, was sich im Grad der Resolvente wiederspiegelt. Für alle angesprochenen Probleme werden Lösungsstrategien entwickelt und miteinander kombiniert, so daß effektive Berechnungen der Galoisgruppe auch in diesem Fall möglich sind.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Definitionen und Sätze zusammengestellt, die für die folgenden Kapitel benötigt werden. Kapitel 3 beschreibt zunächst allgemein die Ideen des Verfahrens von Stauduhar und liefert dann die Kernsätze für den Algorithmus. Berechnungsmethoden der für dieses Verfahren im voraus bekannten Daten werden im darauffolgenden Kapitel entwickelt. Kapitel 5 ist ganz den Verbesserungen des Verfahrens gewidmet. Zum einen verringern wir durch zusätzliche Informationen die Anzahl der in Frage kommenden Galoisgruppen, zum anderen gelingt es uns, einen Teil der benötigten Daten so umzuwandeln, daß erhebliche Verbesserungen für das Laufzeitverhalten des Algorithmus zu verzeichnen sind. In Kapitel 6 zeigen wir, wie man durch Berechnung von Teilkörpern eines algebraischen Zahlkörpers auf Blocksysteme der Galoisgruppe schließen kann. Somit wird es möglich, die Galoisgruppe in geeignete Kranzprodukte einzubetten und die Einstiegspunkte im Verfahren von Stauduhar variabel zu halten. Besonders im Fall $n = 12$ stellt diese Erweiterung eine reizvolle und effektive Variante dar, wie wir anhand von Beispielen belegen. Das letzte Kapitel demonstriert das Verhalten der Galoisgruppenberechnung, anhand von einer Vielzahl von Beispielen, auch im Vergleich mit anderen Computeralgebrasystemen. Schließlich geben wir im Anhang I Graphen der Untergruppengitter der S_n für $4 \leq n \leq 12$ an, und im Anhang II eine Zusammenstellung der von uns berechneten Daten.

Kapitel 2

Grundlagen

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Algebra, Gruppentheorie und algebraischen Zahlentheorie bereitgestellt, auf die wir uns in dieser Arbeit beziehen wollen. Ausführlichere Darstellungen mit Beweisen können beispielsweise in [20], [25], [8] und [30] gefunden werden.

2.1 Gruppen

Wir wollen hier einige Voraussetzungen für diese Arbeit machen: Die betrachteten Gruppen sind endlich. Gruppen operieren von links. Dementsprechend betrachten wir Nebenklassen der Form gH, die wir als Linksnebenklassen aus der Nebenklassenmenge G/H bezeichnen. Vollständige Repräsentantensysteme bezeichnen wir mit $G//H$. Abbildungen werden ebenfalls von links geschrieben. Ist Ω eine endliche nichtleere Menge, so bezeichnen wir die Menge aller Permutationen von Ω mit S_Ω. Folglich können wir Ω durch Umnumerierung der Elemente mit einem Anfangsstück der natürlichen Zahlen identifizieren. Wir bezeichnen die Gruppe $S_{\{1,\dots,n\}}$ aller Permutationen von $\{1,\dots,n\}$ als S_n und nennen sie symmetrische Gruppe vom Grad n. Konsistent mit der Linksoperation ergeben sich dann Produkte von Permutationen in der Form $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ für $\sigma, \tau \in S_n$. Es gilt also in Zykelschreibweise $(1,3,4)(3,4) = (3,1)$. Ist H eine (echte) Untergruppe von G, so wollen wir dies in der Form $H \leq G$ $(H < G)$ notieren. Gilt zusätzlich, daß H normal in G ist, so verwenden wir die Notation $H \trianglelefteq G$ $(H \triangleleft G)$. Die Anzahl der linken Nebenklassenrepräsentanten von $G//H$ ist der Index von H in G, den wir mit $[\,G\!:\!H\,]$ bezeichnen wollen.

Definition 2.1.1 *Sei G eine Gruppe und Ω eine nichtleere Menge. Wir sagen, daß G auf Ω operiert, wenn es einen Homomorphismus von Gruppen*

$$\begin{aligned} \tau : G &\longrightarrow S_\Omega \\ g &\longmapsto \tau(g) = \tau_g \end{aligned}$$

von G in die Gruppe aller Permutationen von Ω gibt. Die Anwendung eines $g \in G$ auf ein $\omega \in \Omega$ schreiben wir auch in der Form $g(\omega) = g\omega = \tau_g(\omega)$. Diese Situation notieren wir mit (G, Ω).

Man erhält so eine Abbildung

$$\begin{aligned} G \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (g, \omega) &\longmapsto \sigma\omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit (i) $1\omega = \omega$ und (ii) $(g_1 g_2)\omega = g_1(g_2\omega)$, $(g_1, g_2 \in G)$.
Ist umgekehrt die Abbildung (2.1) mit den Eigenschaften (i) und (ii) gegeben, so operiert G auf Ω vermöge $\tau : G \longrightarrow S_\Omega$, definiert durch $\tau(g)(\omega) = g\omega$.

Definition 2.1.2 *Die Permutationsgruppe G operiere auf der Menge Ω, und es sei H eine Untergruppe von G.*

(i) Für $\omega \in \Omega$ bezeichnen wir die Menge

$$Orb_G(\omega) := \{\, g\omega \mid g \in G \,\}$$

als die Bahn oder den Orbit von ω.

(ii) Eine duale Rolle zu der Menge der Bilder von ω spielt die Menge der Elemente von G, die ω invariant lassen:

$$Stab_G(\omega) := \{\, g \in G \mid g\omega = \omega \,\}$$

heißt der Stabilisator oder Punktstabilisator von ω in G.
Sprechen wir vom Stabilisator von H in G, so ist damit die Menge

$$Stab_G(H) := \{\, g \in G \mid gH = H \,\}$$

gemeint.

(iii) G heißt transitiv auf Ω, wenn Ω nur aus einer Bahn besteht, d.h. wenn gilt

$$\Omega = Orb_G(\omega), \quad (\omega \in \Omega).$$

Wie man leicht sieht, ist G genau dann transitiv, wenn zu jedem Paar $\omega, \nu \in \Omega$ ein $g \in G$ existiert mit $g\omega = \nu$.
Die wichtigsten Eigenschaften von Bahnen und Stabilisatoren werden im nächsten Satz zusammengefaßt.

Satz 2.1.3 *Sei G eine Gruppe, die auf der Menge Ω operiert. Seien $g, h \in G$ und $\omega, \nu \in \Omega$. Dann gilt:*

(i) *Zwei Bahnen $Orb_G(\omega)$ und $Orb_G(\nu)$ sind entweder gleich (als Mengen) oder disjunkt, d.h. die Menge aller Bahnen bilden eine Partition von Ω.*

(ii) *Der Punktstabilisator $Stab_G(\omega)$ ist eine Untergruppe von G und $Stab_G(\nu) = gStab_G(\omega)g^{-1}$ für $\nu = g\omega$. Darüberhinaus gilt $g\omega = h\omega \iff gStab_G(\omega) = hStab_G(\omega)$.*

(iii) *(Bahn-Stabilisator-Eigenschaft) $|\,Orb_G(\omega)\,| = |\,G : Stab_G(\omega)\,|$ für alle $\omega \in \Omega$. Insbesondere gilt für endliches G, daß $|\,Orb_G(\omega)\,|\,|\,Stab_G(\omega)\,| = |\,G\,|$.*

Definition 2.1.4 *Sei G eine Gruppe. G operiert dann auf der Menge $\Omega = G$ vermöge $(\sigma, \tau) \longrightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}$. Sei $\sigma \longrightarrow T_\sigma$ der zugehörige Homomorphismus in S_G, also $T_\sigma(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Die Bahn eines $\tau \in G$ bezüglich dieser Operation, also die Menge*

$$\{\sigma\tau\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in G\}$$

heißt die Konjugationsklasse von τ in G.

Die Definition der Konjugationsklasse läßt sich auf Untergruppen H von G erweitern.

Definition 2.1.5 *Sei $H \leq G$ und $\sigma \in G$. Dann heißt $\sigma H\sigma^{-1} := \{\sigma h\sigma^{-1} \,|\, h \in H\}$ die mittels σ zu H konjugierte Gruppe, und die Menge*

$$\{\sigma H\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in G\}$$

ist die G-Konjugationsklasse von H.

Die Konjugationsklasse einer Untergruppe $H \leq G$ ist also nichts anderes als die Bahn von H unter den Permutationen von G (G operiert durch Konjugation). Wir wollen nun noch eine weitere Definition einführen, mit deren Hilfe wir Aussagen über die Anzahl der zu H konjugierten Gruppen in G machen können.

Definition 2.1.6 *Sei $H \leq G$ und G operiere auf $\Omega = G$ bezüglich Konjugation. Der Stabilisator von H in G heißt der Normalisator von H in G, und wir bezeichnen ihn mit*

$$N_G(H) := \{\sigma \in G \,|\, \sigma H\sigma^{-1} = H\}.$$

Definitionsgemäß gilt $H \trianglelefteq N_G(H)$. Nach Satz 2.1.3 (*iii*) ist für endliche Gruppen $|\,G : N_G(H)\,|$ die Anzahl der zu H konjugierten Untergruppen von G.

2.2 Permutationsgruppen

Definition 2.2.1 *Den Homomorphismus* τ *aus Definition 2.1.1 nennt man auch Permutationsdarstellung von* G *vom Grad* $|\Omega|$*. Ist* τ *ein Monomorphismus (das einzige Element aus* G*, daß alle Elemente aus* Ω *festläßt, ist die Identität), so heißt die Abbildung treu. In diesem Fall bezeichnen wir* (G, Ω) *als eine Permutationsgruppe.*

Da die nicht abelsche Gruppe der Ordnung 6 sowohl durch eine transitive Permutationsgruppe der Ordnung 3 (S_3) als auch durch eine transitive Permutationsgruppe der Ordnung 6 ($D_6(6)$) treu dargestellt werden kann, müssen wir Permutationsgruppen unterscheiden, die als abstrakte Gruppen isomorph sind:

Definition 2.2.2 *Zwei Permutationsgruppen* (G, Ω) *und* (H, Δ) *heißen äquivalent (isomorph), wenn es eine Bijektion* $\psi : \Omega \longrightarrow \Delta$ *und einen Isomorphismus* $\phi : G \longrightarrow H$ *gibt, so daß*

$$\psi(g\omega) = \phi(g)\psi(\omega)$$

für alle $\omega \in \Omega$ *und* $g \in G$ *gilt.*

Stimmen die Mengen Ω und Δ überein, so ist ψ eine Permutation auf Ω, und die Bedingung läuft auf die Konjugiertheit von G und H in der Gruppe S_Ω hinaus.

Alle homomorphen Bilder von G sind durch Faktorgruppen von G modulo einer normalen Untergruppe gegeben. Alle transitiven Permutationsdarstellungen von G kann man durch linke Nebenklassen von Untergruppen von G finden. Wir wollen ein wichtiges Verfahren zur Konstruktion von Permutationsdarstellungen beschreiben:

Satz 2.2.3 *Sei* H *eine Untergruppe von* G *vom Index* n*, und sei* $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_iH$ *die Nebenklassenzerlegung von* G *nach* H*. Dann erhalten wir einen Epimorphismus* σ *von* G *auf eine transitive Untergruppe von* S_n *auf der Ziffernmenge* $\{\, g_iH \mid i = 1, \ldots, n \,\}$*, wenn wir jedem* $g \in G$ *die Permutation*

$$\sigma(g) = \begin{pmatrix} g_iH \\ gg_iH \end{pmatrix}$$

zuordnen. Der Kern des Epimorphismus σ *ist der Durchschnitt aller Konjugierten* $g_iHg_i^{-1}$*. Wir bezeichnen den konstruierten Epimorphismus* σ *als die Permutationsdarstellung von* G *auf den Nebenklassen von* H*. Gilt* $\bigcap_{i=1}^{n} g_iHg_i^{-1} = \{1\}$*, so ist die Permutationsdarstellung treu.*

Beweis: Für alle $g, g' \in G$ haben wir

$$\sigma(gg') = \begin{pmatrix} g_iH \\ (gg')g_iH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_iH \\ g(g'g_i)H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_iH \\ gg_iH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_iH \\ g'g_iH \end{pmatrix} = \sigma(g)\sigma(g').$$

Somit ist σ ein Homomorphismus von G in S_n. Aus $(g_j g_i^{-1}) g_i H = g_j H$ folgt, daß das Bild von G unter σ eine transitive Permutationsgruppe ist. Sei nun $\sigma(g)$ die Identität, d.h. $g g_i H = g_i H$ für $1 \leq i \leq n$. Dies ist aber äquivalent zu $g \in \bigcap_{i=1}^{n} g_i H g_i^{-1}$. Somit ist auch klar, daß die Permutationsdarstellung treu ist, falls $Kern\,\sigma = \{1\}$ ist. □

Umgekehrt gilt der folgende Zusammenhang: Jede transitive Permutationsdarstellung von G vom Grad n korrespondiert zu einer Permutationsdarstellung, die durch die Operation von G auf den Nebenklassen von $G/Stab_G(\omega)$, $\omega \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben ist.

2.3 Imprimitivitätsgebiete und Blöcke

Wir wollen nun die Operation einer Gruppe G auf Ω auf Teilmengen B von Ω ausdehnen, indem wir $gB := \{ gb \mid b \in B \}$, $g \in G$ für alle $B \subseteq \Omega$ definieren.

Definition 2.3.1 *Sei G eine transitive Permutationsgruppe auf der Menge Ω.*

(i) Eine Teilmenge B von Ω heißt Block (Imprimitivitätsgebiet) von G, falls für alle $g \in G$ gilt:

$gB = B$ *oder* $gB \cap B = \emptyset$.

Die Anzahl der Elemente eines Blocks nennen wir Blocklänge.

(ii) Sind $B_1, \ldots, B_m$ Blöcke von G, so heißt $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ Blocksystem von G, falls gilt:

- *(a) $\bigcup_{1 \leq i \leq m} B_i = \Omega$.*
- *(b) $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$.*
- *(c) Alle Blöcke haben die gleiche Blocklänge.*

(iii) Die Blöcke, die in einem Blocksystem liegen, heißen zueinander konjugiert.

Mit anderen Worten ist $\mathfrak{B}$ genau dann ein Blocksystem für G, wenn $\mathfrak{B}$ eine Partition von Ω ist, die unter der Operation von G invariant ist. Jede transitive Gruppe besitzt die trivialen Blocksysteme $\mathfrak{B}_0 = \{ \{\omega\} \mid \omega \in \Omega \}$ und $\mathfrak{B}_\infty = \{ \Omega \}$. Alle anderen Blocksysteme heißen nichttrivial. Gleiche Namensgebung gilt für die in den Blocksystemen enthaltenen Blöcke. Mit Hilfe der letzten Bemerkung können wir eine Klassifizierung der transitiven Gruppen vornehmen.

Definition 2.3.2 *Die transitive Gruppe G heißt primitiv, falls sie keine nichttrivialen Blocksysteme besitzt, ansonsten nennen wir G imprimitiv.*

Wir betrachten im Zusammenhang mit transitiven imprimitiven Gruppen ausschließlich nichttriviale Blöcke bzw. Blocksysteme.

Definition 2.3.3 *Sei G eine transitive imprimitive Permutationsgruppe und B ein nichttrivialer Block von G. Wir bezeichnen die Gruppe $Stab_G(B) := \{\, g \in G \mid gB = B \,\}$ als den Blockstabilisator von B.*

Es seien kurz die ersten einfachen Folgerungen aus der Definition von Blöcken bzw. Blocksystemen erwähnt.

Folgerung 2.3.4 *Sei G eine transitive imprimitive Permutationsgruppe.*

(i) *Ist H eine Untergruppe von G, so ist jeder Block von G auch ein Block von H.*

(ii) *Sind B_1 und B_2 Blöcke von G, so ist ihr Durchschnitt ebenfalls ein Block von G.*

(iii) *Ist $g \in G$, H Untergruppe von G und B ein Block von H, so ist gB ein Block von gHg^{-1}.*

(iv) *Sei B ein Block von G. Die Menge $\mathfrak{B} := \{\, gB \,|\, g \in G//Stab_G(B) \,\}$ bildet ein Blocksystem von G.*

Der nächste Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß eine transitive Gruppe imprimitiv ist.

Satz 2.3.5 *Sei (G, Ω) eine transitive Permutationsgruppe und $b \in \Omega$. G ist genau dann imprimitiv, wenn $Stab_G(b)$ nicht maximal in G ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei G imprimitiv und B ein nichttrivialer Block von G mit $b \in B$. Sei K der Blockstabilisator $Stab_G(B)$ von B in G. K liegt echt zwischen $Stab_G(b)$ und G aufgrund der Tatsache, daß $B \subset \Omega$ und G transitiv ist. Wegen der Blockeigenschaft folgt zunächst $Stab_G(b) \leq K$. Weil aber zusätzlich $|B| > 1$ ist, gibt es ein von b verschiedenes Element $b_1 \in B$. Die Transitivität von G bewirkt die Existenz eines $g \in G$ mit $gb = b_1$. Für dieses g gilt $g \in K$ und $g \notin Stab_G(b)$.
„$\Leftarrow$“ Sei K eine echte Zwischengruppe von $Stab_G(b)$ und G. Wir setzen $B := Orb_K(b)$ und behaupten, daß B ein Block ist. Sei $b_1 \in B \cap gB$ für ein beliebiges $g \in G$. Dann ist $b_1 = kb = gk'b$ für geeignete $k, k' \in K$, woraus sich $k^{-1}gk' \in Stab_G(b)$ und $g \in K$ ergibt. Also $B = gB$ und die Blockeigenschaft ist bewiesen. Wegen $Stab_G(b) < K$ ist $|B| > 1$. Wie eben gezeigt, wird B von genau den Elementen aus K fixiert, und weil $K < G$ gilt, gibt es ein $g \in G$ mit $B \neq gB$, weswegen $B \neq \Omega$. B ist also ein nichttrivialer Block und G somit imprimitiv. $\square$

Folgerung 2.3.6 *Jede transitive Permutationsgruppe vom Primzahlgrad ist primitiv.*

Beweis: Sei G transitiv vom Primzahlgrad p. Für jedes $b \in \Omega$ ist $[G : Stab_G(b)]$ eine Primzahl. $Stab_G(b)$ ist somit maximal in G. $\square$

Da ein Blocksystem von G unter G invariant ist, erhält man zu jedem Blocksystem eine Permutationsdarstellung von G in die Gruppe $S_{\mathfrak{B}}$. Für $\mathfrak{B}_0$ ergibt sich eine zu G äquivalente Gruppe, für $\mathfrak{B}_\infty$ erhält man die triviale Gruppe.

2.4 Kranzprodukte

Bei der Beschäftigung mit imprimitiven Gruppen stößt man fast intuitiv auf Gruppen, die wir später als Kranzprodukte bezeichnen werden. Kranzprodukte spielen eine wichtige Rolle bei der Betrachtung von Permutationsgruppen, denn sie stellen in gewissem Sinn die „universellen“ transitiven imprimitiven Permutationsgruppen dar, wie wir später sehen werden. Bevor wir eine entsprechende Definition liefern, wollen wir an die Konstruktion des semidirekten Produktes erinnern, da die des Kranzproduktes darauf aufbaut.

Definition 2.4.1 *Seien K und H Gruppen und $\phi : H \longrightarrow Aut(K)$ ein Homomorphismus. Die Menge*

$$K \rtimes_\phi H := \{ (k,h) \mid k \in K, h \in H \}$$

mit der Verknüpfung $(k_1,h_1)(k_2,h_2) := (k_1\phi_{h_1}(k_2), h_1h_2)$ heißt semidirektes Produkt von K und H bezüglich ϕ.

Man rechnet ohne Schwierigkeiten nach, daß $G = K \rtimes_\phi H$ mit der definierten Verknüpfung eine Gruppe ist: $(1,1)$ ist das neutrale Element und $(k,h)^{-1} = (\phi_h(k)^{-1}, h^{-1})$ das inverse Element. G enthält die Untergruppen $H^\star := \{ (1,h) \mid h \in H \}$ und $K^\star := \{ (k,1) \mid k \in K \}$, die zu H und K isomorph sind. Weiterhin folgt $G = K^\star H^\star$, $K^\star$ ist Normalteiler in G und $K^\star \cap H^\star = 1$. Gelten umgekehrt die letzten drei Bedingungen, so ist G das semidirekte Produkt seiner Untergruppen H und K, wobei H auf K durch Konjugation operiert. Es sei noch bemerkt, daß das semidirekte Produkt durch seine Teilstrukturen K und H nicht eindeutig bestimmt ist. Erst wenn zu jedem $h \in H$ der Automorphismus $\phi : H \longmapsto Aut(K)$ explizit bekannt ist, ist die Struktur des semidirekten Produktes gegeben.

Wir vereinbaren folgende Bezeichnung.

Definition 2.4.2 *Sei Γ eine nichtleere Menge und K eine Gruppe. Die Menge aller Abbildungen von Γ nach K bezeichnen wir mit $Fun(\Gamma, K)$. Sie wird durch punktweise Verknüpfung zu einer Gruppe: $(\phi, \sigma)(\gamma) := \phi(\gamma)\sigma(\gamma)$ für alle $\phi, \sigma \in Fun(\Gamma, K)$ und $\gamma \in \Gamma$.*

Ist Γ endlich, d.h. $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, so ist die Gruppe $Fun(\Gamma, K)$ isomorph zum direkten Produkt $K^m = K \times \ldots \times K$ bezüglich des Isomorphismus $\sigma \longmapsto (\sigma(\gamma_1), \ldots, \sigma(\gamma_m))$, $\sigma \in Fun(\Gamma, K)$.

Wir hatten in der Einleitung geschrieben, daß man in sehr natürlicher Weise bei der Betrachtung von imprimitiven Gruppen auf die Konstruktion von Kranzprodukten stößt. Für eine anschauliche Beschreibung sei zum Beispiel $\mathfrak{B}$ eine Partition der Menge Ω in gleichmächtige Teilmengen. Die Gruppe G der Automorphismen von $\mathfrak{B}$ besteht aus allen $\sigma \in S_\Omega$ mit der Eigenschaft, daß für $B \subseteq \Omega$ gilt:

$$B \in \mathfrak{B} \Longleftrightarrow \sigma B \in \mathfrak{B}.$$

Wie wir wissen, operiert G auch auf $\mathfrak{B}$. Sei K der Kern der Permutationsdarstellung von G auf $\mathfrak{B}$. Man sieht leicht, daß K isomorph ist zu dem direkten Produkt von $|\,\mathfrak{B}\,|$ Kopien von S_B, $B \in \mathfrak{B}$. Während $S_{\mathfrak{B}}$ Informationen über die von G ausgeübten Permutationen der Blöcke enthält, so gibt K wieder, wie „innerhalb“ der Blöcke durch G permutiert wird. Durch geeignete Kombination von K und $S_{\mathfrak{B}}$ sollte es möglich sein, G zu rekonstruieren. Dies ist tatsächlich mit Hilfe des semidirekten Produkts möglich. Die folgenden Überlegungen sollen den Sachverhalt genauer beleuchten.

Definition 2.4.3 *Seien G und H Gruppen und Γ eine Menge, auf der H operiert. Die Menge*

$$G \wr_\Gamma H := Fun(\Gamma, G) \rtimes_\phi H$$

mit $\phi_h(\sigma) = \sigma \circ h^{-1}$ heißt Kranzprodukt von G und H bezüglich Γ.

Die Untergruppe $Fun(\Gamma, G)^\star := \{(\sigma, 1) \,|\, \sigma \in Fun(\Gamma, G)\} \cong Fun(\Gamma, G)$ heißt die Basis oder der Basisnormalteiler von $G \wr_\Gamma H$. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß G, H und Γ endlich sind. Dann erhalten wir $|Fun(\Gamma, G)| = |G|^{|\Gamma|}$ und somit

$$|G \wr_\Gamma H| = |Fun(\Gamma, G) \rtimes_\phi H| = |Fun(\Gamma, G)||H| = |G|^{|\Gamma|}|H|$$

Lemma 2.4.4 *Seien Λ und Γ nichtleere Mengen und $G \leq S_\Lambda$, $H \leq S_\Gamma$.*

(i) Das Kranzprodukt $G \wr_\Gamma H$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $S_{\Lambda \times \Gamma}$ unter $\psi : G \wr_\Gamma H \longrightarrow S_{\Lambda \times \Gamma}$ mit $\psi(\sigma_1, \sigma_2)\,(\lambda, \gamma) = (\,\sigma_1(\sigma_2(\gamma))\,(\lambda), \sigma_2(\gamma)\,)$ für alle $(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma$. $G \wr_\Gamma H$ operiert also als Permutationsgruppe auf $\Lambda \times \Gamma$.

(ii) $G \wr_\Gamma H$ als Permutationsgruppe betrachtet ist imprimitiv und operiert genau dann transitiv auf $\Lambda \times \Gamma$, wenn G transitiv auf Λ und H transitiv auf Γ operiert.

(iii) Seien $G \leq G'$ und $H \leq H'$. Dann ist $G \wr_\Gamma H$ Untergruppe von $G' \wr_\Gamma H'$.

Beweis: *(i)* Zum Beweis der Homomorphieeigenschaft von ψ seien $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ und $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ aus $G \wr_\Gamma H$. Für das Produkt gilt: $\sigma\tau = (\sigma_1(\tau_1 \circ \sigma_2^{-1}), \sigma_2\tau_2)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\psi(\sigma\tau)(\lambda, \gamma) &= \Big(\sigma_1(\sigma_2\tau_2(\gamma)) \cdot (\tau_1 \circ \sigma_2^{-1})(\sigma_2\tau_2(\gamma))\,(\lambda),\ \sigma_2\tau_2(\gamma)\Big) \\
&= \Big(\sigma_1(\sigma_2\tau_2(\gamma)) \cdot \tau_1(\tau_2(\gamma))\,(\lambda),\ \sigma_2\tau_2(\gamma)\Big) \\
&= \Big(\sigma_1(\sigma_2\tau_2(\gamma))\,(\tau_1(\tau_2(\gamma))\,(\lambda)),\ \sigma_2\tau_2(\gamma)\Big) \\
&= \psi(\sigma)\,\Big(\tau_1(\tau_2(\gamma))\,(\lambda),\ \tau_2(\gamma)\Big) \\
&= \psi(\sigma)\,\Big(\psi(\tau)(\lambda,\ \gamma)\Big) \\
&= \Big(\psi(\sigma)\psi(\tau)\Big)\,(\lambda,\ \gamma).
\end{aligned}$$

für alle $(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma$.

Zum Beweis der Injektivität von ψ sei $\sigma \in G \wr_\Gamma H$ mit

$$\begin{aligned}
\psi(\sigma)(\lambda, \gamma) &= (\sigma_1(\sigma_2(\gamma))\,(\lambda),\ \sigma_2(\gamma)) \\
&= (\lambda, \gamma)
\end{aligned}$$

für alle $(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma$. In der zweiten Komponente folgt sofort $\sigma_2 = id_H$. Da mit γ auch $\sigma_2(\gamma)$ alle Werte in Γ durchläuft, ergibt sich $\sigma_1(\gamma)(\lambda) = \lambda$ für alle $(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma$. Daher gilt auch in der ersten Komponente $\sigma_1 = \mathrm{id}_{Fun(\Gamma,G)}$. Die Operation von $G \wr_\Gamma H$ auf $\Lambda \times \Gamma$ wird mit Hilfe von ψ definiert.

(ii) Zur Imprimitivität sei gesagt, daß die Mengen $B_\gamma = \{(\lambda, \gamma) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ein Blocksystem bilden.
Wir kommen nun zur Transitivität: Operiere zunächst $\psi(G \wr_\Gamma H)$ transitiv auf $\Lambda \times \Gamma$. Seien $(\lambda_i, \gamma_i) \in \Lambda \times \Gamma, i = 1, 2$. Dann existieren $\sigma_1 \in Fun(\Gamma, G)$ und $\sigma_2 \in H$ mit

$$\begin{aligned}
\psi(\sigma_1, \sigma_2)(\lambda_1, \gamma_1) &= (\sigma_1(\sigma_2(\gamma_1))\,(\lambda_1),\ \sigma_2(\gamma_1)) \\
&= (\lambda_2, \gamma_2)
\end{aligned}$$

woraus sofort die Transitivität von H auf Γ folgt, da $\sigma_2(\gamma_1) = \gamma_2$. Somit ist $\sigma_1(\sigma_2(\gamma_1))\,(\lambda_1) = \sigma_1(\gamma_2)\,(\lambda_1) = \lambda_2$ mit $\sigma_1(\gamma_2) \in G$ und (G, Λ) ist ebenfalls transitiv. Sind nun umgekehrt (G, Λ) und (H, Γ) transitiv, dann existieren $g \in G$ und $\sigma_2 \in H$ mit $g\lambda_1 = \lambda_2$ und $\sigma_2\gamma_1 = \gamma_2$. Wir wählen $\sigma_1 \in Fun(\Gamma, G)$ mit $\sigma_1(\gamma_2) = g$. Dann folgt $(\sigma_1(\sigma_2(\gamma_1))\,(\lambda_1),\ \sigma_2(\gamma_1)) = (\lambda_2, \gamma_2)$ und $\psi(G \wr_\Gamma H)$ operiert transitiv auf $\Lambda \times \Gamma$.
(iii) Dies ist klar, da $\mathrm{Fun}(\Gamma, G) \subseteq \mathrm{Fun}(\Gamma, G')$. □

Beispiel 2.4.5 *Wir werden später Kranzprodukte unter anderem aus zwei symmetrischen Gruppen* S_l *und* S_m *zusammensetzen und schreiben dafür* $S_l \wr_{\{1,\ldots,m\}} S_m = S_l \wr S_m$.

Bemerkung 2.4.6

(i) *Ist* $\Lambda = \{1, \ldots, l\}$ *und* $\Gamma = \{1, \ldots, m\}$*, so können wir* (λ, γ) *auf* $l(\gamma - 1) + \lambda$ *abbilden und somit* $\Lambda \times \Gamma$ *mit* $\{1, \ldots, lm\}$ *identifizieren. Dann entsprechen den Blöcken* $B_\gamma = \Lambda \times \gamma, (\gamma \in \Gamma)$ *die Elemente der Menge* $\mathfrak{B} = \{\{1, \ldots, l\}, \{l+1, \ldots, 2l\}, \ldots, \{(m-1)l+1, \ldots, ml\}\}$*, und somit ist* $\mathfrak{B}$ *ein Blocksystem zum Kranzprodukt* $(G \wr_\Gamma H, \{1, \ldots, ml\})$.

(ii) *Sei* K *das Kranzprodukt* $G \wr_\Gamma H$ *wie in Satz 2.4.4 (i). Da* K *gleich dem semidirekten Produkt* $Fun(\Gamma, G) \rtimes H$ *ist, können wir jedes Element* $k \in K$ *als Produkt* $k = (g, 1)(1, h)$ *schreiben, wobei* $(g, 1) \in Fun(\Gamma, G)^\star$ *und* $(1, h) \in H^\star$ *ist.* $G \wr_\Gamma H$ *als Permutationsgruppe auf* $\Lambda \times \Gamma$ *betrachtet ist imprimitiv; sei* $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\mathfrak{m}\}$ *ein Blocksystem mit* $B_\gamma := \Lambda \times \gamma$*,* $\gamma \in \Gamma$*. Aus der Definition von* ψ *in Satz 2.4.4 (i) folgt, daß die Elemente* $(1, h)$ *gerade eine Vertauschung der Blöcke bewirken, während die Permutationen* $(g, 1)$ *die Elemente innerhalb der Blöcke vertauschen.*

(iii) *Wie wir im Beweis von Teil (i) gesehen haben, folgt aus der Treue von* G *auf* Λ *und der Treue von* H *auf* Γ *die Treue von* $G \wr_\Gamma H$ *auf* $\Lambda \times \Gamma$.

2.5 Der Satz von Krasner und Kaloujnine

Wir wollen nun verdeutlichen, warum Kranzprodukte in gewissem Sinn die „universellen“ transitiven Permutationsgruppen darstellen. Jede imprimitive Permutationsgruppe läßt sich nämlich in ein geeignetes Kranzprodukt einbetten. Wir geben hier eine für unsere Zwecke ausreichende, vereinfachte Form des Satzes von Krasner und Kaloujnine, welcher auch als Einbettungssatz bezeichnet wird, an. Die vollständige Aussage mit Beweis findet man zum Beispiel in [24] S. 8.

Satz 2.5.1 *Sei* (G, Ω) *eine transitive, imprimitive Permutationsgruppe mit Blocksystem* $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ *von Blöcken der Länge* l*. Sei* $\psi : G \longrightarrow S_\Gamma$ *die zugehörige Permutationsdarstellung von* G *bezüglich* $\mathfrak{B}$ *und* $H = \psi(G)$*. Seien* $\Lambda := \{1, \ldots, l\}$ *und* $\Gamma := \{1, \ldots, m\}$*. Dann ist* (G, Ω) *äquivalent zu einer Untergruppe von* $(S_\Lambda \wr_\Gamma H, \Lambda \times \Gamma)$.

Beweis: Seien $\lambda, \lambda_i \in \Lambda$ und $\gamma, \gamma_i \in \Gamma$ für $i = 1, 2$. Wir wählen eine bijektive Abbildung $\theta : \Omega \longrightarrow \Lambda \times \Gamma$ mit der Eigenschaft $\theta(\omega) = (\lambda, \gamma) \Longrightarrow \omega \in B_\gamma$. Mit Hilfe dieser Abbildung fassen wir G als transitive, imprimitive Permutationsgruppe von $\Lambda \times \Gamma$ mit den Blöcken $B_\gamma = \Lambda \times \{\gamma\}$ auf. Sei nun $g \in G$ mit $g(\lambda_1, \gamma_1) = (\lambda_2, \gamma_2)$. Hiermit werden $\sigma_1 \in \mathrm{Fun}(\Gamma, S_\Lambda)$ und $\sigma_2 \in H$ durch $\sigma_2(\gamma_1) = \gamma_2$ und $\sigma_1(\sigma_2(\gamma_1))(\lambda_1) = \lambda_2$ definiert. Dies macht aufgrund der Blockstruktur und da $\sigma_2(\gamma_1)$ mit γ_1 alle Werte aus Γ annimmt, Sinn. Wir erklären eine Abbildung

$\chi : G \longrightarrow S_\Lambda \times H$ durch $\chi(g) = (\sigma_1, \sigma_2)$ und behaupten, daß χ operationsverträglich und monomorph ist. Nach Lemma 2.4.4 ist nämlich

$$\begin{array}{rcl}\chi(g)(\lambda_1, \gamma_1) & = & (\sigma_1(\sigma_2(\gamma_1))(\lambda), \sigma_2(\gamma_1)) \\ & = & (\lambda_2, \gamma_2) \\ & = & g(\lambda_1, \gamma_1).\end{array}$$

Außerdem ist

$$\begin{array}{rcl}\chi(g_1 g_2)(\lambda, \gamma) & = & g_1 g_2(\lambda, \gamma) \\ & = & \chi(g_1)(g_2(\lambda, \gamma)) \\ & = & \chi(g_1)(\chi(g_2)(\lambda, \gamma)) \\ & = & (\chi(g_1)\chi(g_2))(\lambda, \gamma),\end{array}$$

wobei die letzte Gleichung nach Lemma 2.4.4 gültig ist. Da diese Gleichungskette für alle $(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma$ gilt, folgt $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$. Die Injektivität von χ ergibt sich analog dem Beweis im Lemma 2.4.4. □

Bemerkung 2.5.2 *Sei $G \leq S_n$ eine transitive, imprimitive Permutationsgruppe und $\mathfrak{B}$ ein Blocksystem von G mit k Blöcken der Länge l. Aufgrund des vorangegangenen Satzes kann man G mit einer Untergruppe von $S_l \wr S_k$ identifizieren.*

2.6 Körpertheorie und Galoistheorie

Wir wiederholen einige wichtige Definitionen und Sätze aus der Algebra, werden aber auch andere (aus z.B. Meyberg [25] oder Lorenz [20]) für die Arbeit voraussetzen.

Es sei daran erinnert, daß es sich bei einem faktoriellen Ring um einen Integritätsring mit 1 handelt, in dem Elemente eine bis auf Reihenfolge und Einheiten eindeutige Produktzerlegung in irreduzible Elemente besitzen.

Satz 2.6.1 *Sei R ein faktorieller Ring. Dann gilt:*

- *(i) Der Polynomring $R[t]$ ist ebenfalls faktoriell.*
- *(ii) R ist in seinem Quotientenkörper K ganz abgeschlossen, d.h. gilt für ein $\alpha \in K$ und ein normiertes $h \in R[t]$, daß $h(\alpha) = 0$ ist, so folgt bereits $\alpha \in R$.*

Ist K ein Teilkörper des Körpers L, so nennen wir L *Erweiterungskörper* von K oder *Körpererweiterung* über K und schreiben dafür L/K.

Definition 2.6.2 *Sei L/K eine Körpererweiterung.*

(i) Ein Element $a \in L$ heißt algebraisch über K, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom $f \in K[t]$ gibt mit $f(a) = 0$. Demzufolge sprechen wir von einer algebraischen Körpererweiterung L/K, wenn jedes Element aus L algebraisch über K ist.

(ii) Ist $a \in L$ algebraisch über K, so wollen wir das eindeutig bestimmte normierte Polynom $m_a \in K[t]$ kleinsten Grades mit $m_a(a) = 0$ das Minimalpolynom von a über K nennen.

(iii) Ist K der Quotientenkörper eines Integritätsrings R mit 1, so nennen wir die algebraischen Elemente $\alpha \in L$ mit $m_\alpha \in R[t]$ auch ganzalgebraisch über R.

(iv) Die Körperweiterung L/K heißt endlich, wenn L als K-Vektorraum endliche Dimension besitzt.

Seien L/K eine Körpererweiterung und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in L$. Mit $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ bezeichnen wir den kleinsten Teilkörper $M \supseteq K$ von L, welcher $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ enthält. Für ein normiertes irreduzibles Polynom $f \in K[t]$ ist $L := K[t]/fK[t]$ ein Erweiterungskörper von K und es gilt $L \cong K(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von f in L ist.

Definition 2.6.3 *Sei K ein Körper und $f \in K[t]$ ein nicht konstantes Polynom. Eine Körpererweiterung L/K heißt Zerfällungskörper von f, wenn gilt:*

(i) Es gibt $a_1, a_2, \ldots, a_r \in L$, $c \in K$, mit $f = c(t - a_1)(t - a_2) \ldots (t - a_r)$.

(ii) $L = K(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

Bedingung (i) bedeutet, daß alle Wurzeln von f in L liegen. Außerdem soll gelten, daß L mit dieser Eigenschaft minimal ist. Wie aus der Körpertheorie bekannt ist, kann man zu jedem Polynom $f \in K[t]$ einen Zerfällungskörper konstruieren, und alle Zerfällungskörper eines gegebenen Polynoms sind isomorph. Aufgrund der Isomorphie der Zerfällungskörper sei es uns gestattet, von „dem“ Zerfällungskörper des Polynoms f zu sprechen; wir wollen ihn mit $Z_K(f)$ bezeichnen. Es sei noch bemerkt, daß wir zwei Körper K_1 und K_2 genau dann *isomorph* nennen, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : K_1 \longrightarrow K_2$ gibt, für die $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ für alle $a, b \in K_1$ gilt. Ist $K_1 = K_2$, so heißt ϕ *Automorphismus*. In seinem Zerfällungskörper ist ein Polynom Produkt von Linearfaktoren $f(t) = \prod_{i=1}^{k} c(t - a_i)^{\nu_i}, c \in K$, wobei die a_i paarweise verschieden sind. Viele Resultate der Galoistheorie beziehen sich auf Polynome, für die alle $\nu_i = 1$, $(1 \leq i \leq k)$, sind.

Definition 2.6.4 *Sei L/K eine Körpererweiterung.*

(i) *Ein Polynom $f \in K[t]$ vom Grad $n \geq 1$ heißt separabel, wenn f in $Z_K(f)$ genau n verschiedene Wurzeln hat.*

(ii) *Sei $a \in L$ algebraisch. Das Element $a \in L$ heißt separabel über K, wenn sein Minimalpolynom m_a separabel ist. Ist jedes Element aus L separabel, so sagen wir, daß L/K eine separable Körpererweiterung ist.*

(iii) *Ist zusätzlich L/K algebraisch, so nennen wir die Körpererweiterung normal, wenn für jedes irreduzible $f \in K[t]$ gilt: Hat f eine Nullstelle in L, so zerfällt f über L vollständig in Linearfaktoren, d.h. L enthält einen Zerfällungskörper von f über K.*

Separabilität ist eine Eigenschaft des Polynoms f, weil der zur Erklärung benötigte Zerfällungskörper bis auf K-lineare Isomorphie eindeutig durch f bestimmt ist. Für Körper der Charakteristik 0 ist jedes irreduzible Polynom $f \in K[t]$ separabel und folglich auch jede algebraische Erweiterung L/K separabel.

Die Automorphismen eines Körpers bilden bezüglich Komposition eine Gruppe. Dies führt zu der nächsten Definition.

Definition 2.6.5 *Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Mit $Aut(L)$ wird die Gruppe der Automorphismen von L bezeichnet, und mit $G(L/K)$ die Untergruppe all der Elemente von $Aut(L)$, die K elementweise festlassen.*

$$G(L/K) := \{ \sigma \in Aut(L) \mid \sigma(k) = k \text{ für alle } k \in K \}$$

heißt die Galoisgruppe von L/K.

Eine endliche Körpererweiterung, die normal und separabel ist, nennen wir *Galoiserweiterung* oder *galoissch.* Wir kommen nun zum *Hauptsatz der Galoistheorie* für galoissche Körpererweiterungen:

Satz 2.6.6 (Hauptsatz der Galoistheorie) *Sei L/K eine galoissche Erweiterung.*

(i) *Jedem Zwischenkörper M von L über K werde durch*

$$\Gamma : M \longrightarrow G(L/M) = \{ \sigma \in G(L/K) \mid \sigma_{|M} = id \}$$

seine Galoisgruppe, jeder Untergruppe U von $G(L/K)$ durch

$$\Phi : U \longrightarrow Fix(L/U) = \{ x \in L \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in U \}$$

ein Zwischenkörper $L \supseteq Fix(L/U) \supseteq K$, *der sogenannte Fixkörper von* U, *zugeordnet. Ist* $\mathfrak{M} := \{\, M \mid M \, ist \, Zwischenkörper \, von \, L/K \,\}$ *und* $\mathfrak{U} := \{\, U \mid U \, ist \, Untergruppe \, von \, G(L/K) \,\}$, *so gilt* $\Phi\Gamma = Id|_{\mathfrak{M}}$ *und* $\Gamma\Phi = Id|_{\mathfrak{U}}$, *d.h.* $\Phi = \Gamma^{-1}$ *und* Φ, Γ *sind bijektiv.*

(ii) Für jede Untergruppe U *von* $G(L/K)$ *und jeden Teilkörper* M *von* L *gilt*

$$[\, M : K \,] = [\, G(L/K) : \Gamma(M) \,]\,; \quad [\, L : \Phi(U) \,] = |\, U \,|.$$

(iii) Für einen Zwischenkörper $M \subseteq L$ *ist* L/M *genau dann eine Galoiserweiterung, wenn* $\Gamma(M) = G(L/M)$ *ein Normalteiler in* $G(L/K)$ *ist. In diesem Fall gilt* $G(M/K) \cong G(L/K)/G(L/M)$.

Der Hauptsatz der Galoisschen Theorie hat eine Fülle von Anwendungen. Von prinzipieller Bedeutung ist, daß die Anzahl der Zwischenkörper einer galoisschen Erweiterung stets endlich ist, da die Galoisgruppe nur endlich viele Untergruppen besitzt.

Satz 2.6.7 (Primitives Element) *Sei* L/K *eine endliche, separable Körpererweiterung. Dann besitzt* L *ein primitives Element, d.h. es existiert ein* $\alpha \in L$ *mit* $L = K(a)$.

Jede endliche normale Erweiterung $L = K(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ über K können wir als Zerfällungskörper des Polynoms $f(t) = m_{a_1} \cdot m_{a_2} \cdot \ldots \cdot m_{a_r}$ auffassen. Deshalb wollen wir die *Galoisgruppe* $G(f, K)$ *eines nichtkonstanten Polynoms* $f \in K[t]$ als die Galoisgruppe von $G(Z_K(f)/K)$ bezeichnen.

Ähnlich können wir mit Hilfe des Satzes vom primitiven Element für eine endliche, separable Körpererweiterung L/K den Zerfällungskörper $Z_K(L)$ durch $Z_K(f)$ definieren, wobei $f \in K[x]$ das Minimalpolynom eines primitiven Elements von L bezeichne.

Sei nun $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$ ein separables Polynom mit paarweise verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $Z_K(f) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der Zerfällungskörper von f über K und σ aus der Galoisgruppe $G(f, K) = G(Z_K(f)/K)$. Mit jeder Wurzel $\alpha_j \in Z_K(f)$ von f ist auch $\sigma(\alpha_j)$ Wurzel von f, da $0 = \sigma(0) = \sigma(f(\alpha_j)) = \sigma(\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sigma(\alpha^i)$ für $1 \leq j \leq n$ ist. Unter der Abbildung σ geht somit die Menge der Wurzeln von f in sich über. Sind demnach $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Wurzeln von f, so sind $\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ ebenfalls alle verschiedenen Wurzeln, jedoch in anderer Reihenfolge. Es gibt daher eine Permutation $\pi_\sigma \in S_n$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\pi_\sigma(i)}$, $(1 \leq i \leq n)$, für jedes $\sigma \in G(f, K)$. Die Abbildung $\Phi : G(f, K) \longrightarrow S_n$ definiert durch $\sigma \longmapsto \pi_\sigma$ ist ein Monomorphismus, da das einzige Element von $G(f, K)$, das alle α_i festläßt, die Identität ist.

Bemerkung 2.6.8 *Die Galoisgruppe ist somit isomorph zu einer Untergruppe* $\mathfrak{G}$ *der symmetrischen Gruppe* S_n *und* Φ *ist eine treue Permutationsdarstellung von* $G(f,K)$.

Wir werden im folgenden die Galoisgruppe $G(f,K)$ des öfteren mit ihrem Bild $\Phi(G(f,K) \leq S_n$ identifizieren. Zum besseren Verständnis werden wir $G(f,K)$ daher mit $\mathfrak{G}(f,K)$ bezeichnen. Ist das Polynom f irreduzibel, so operiert die Galoisgruppe transitiv auf der Menge der Wurzeln; d.h. zu je zwei Wurzeln α_i, α_j gibt es ein $\sigma \in G(f,K)$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$, $(1 \leq i,j \leq n)$. Die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls, sofern f separabel ist.

Es ist wichtig zu beobachten, daß die Gruppe $\mathfrak{G}(f,K) \leq S_n$ von der gewählten Anordnung der Wurzeln von f abhängt. Angenommen, folgende Bezeichnung der Wurzeln ist gegeben:

$$\alpha_i \xrightarrow{\sigma} \sigma(\alpha_i) = \alpha_{\pi_\sigma(i)}\,,\ (1 \leq i \leq n).$$

Bezüglich dieser Anordnung soll gelten $G(f,K) \cong \mathfrak{G}(f,K)$. Wählt man eine neue Anordnung anhand von $\tau \in S_n$, so folgt

$$\alpha'_i = \alpha_{\tau(i)} \xrightarrow{\sigma} \sigma(\alpha'_i) = \sigma(\alpha_{\tau(i)}) = \alpha_{\pi_\sigma(\tau(i))} = \alpha'_{\tau^{-1}\pi_\sigma\tau(i)}\,,\ (1 \leq i \leq n),$$

d.h. $G(f,K) \cong \tau^{-1}\mathfrak{G}\tau$. Wir halten also fest:

Bemerkung 2.6.9 *Geben wir keine feste Anordnung der Wurzeln des Polynoms* f *an, so kann die Galoisgruppe, als Permutationsgruppe betrachtet, bestmöglich bis auf Konjugation bestimmt werden.*

Die Wurzeln eines normierten, irreduziblen Polynoms $f \in K[x]$ in einem Erweiterungskörper L nennen wir zueinander konjugiert. Der algebraische Abschluß $\overline{K}$ von K ist ein Erweiterungskörper von K, der die Wurzeln aller Polynome $f \in K[x]$ enthält. So stimmt zum Beispiel im Fall $K = \mathbb{R}$ der algebraische Abschluß $\overline{K}$ mit $\mathbb{C}$, dem Körper der komplexen Zahlen, überein.

Kapitel 3

Das Verfahren von Stauduhar

Im wesentlichen müssen für das Verfahren von Stauduhar zur Berechnung der Galoisgruppe eines irreduziblen normierten Polynoms $f \in K[t]$ vom Grad n vier Dinge im voraus bekannt sein: Erstens, die transitiven Permutationsgruppen des gewünschten Grades; bis Grad 15 wurden sie von Butler & McKay [3] klassifiziert, und A. Hulpke [14] hat diese Arbeit bis Grad 31 fortgeführt. Zweitens, bis auf Konjugation, die Gitterstruktur der transitiven Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_n. Drittens benötigen wir zu jedem Gruppenpaar (G, H), wobei H eine transitive maximale Untergruppe von G ist, eine Menge von Nebenklassenrepräsentanten von H in G, und viertens ein geeignetes Polynom F, welches genau von allen Permutationen in G, die in H liegen, stabilisiert wird. In diesem Kapitel werden zuerst die Ideen des gesamten Verfahrens betrachtet, anhand derer auch klar wird, wie die erforderlichen Daten im Detail auszusehen haben. Danach wollen wir auf den Fall $K = \mathbb{Q}$ eingehen. Die nachfolgenden Kapitel beschäftigen sich dann mit der Berechnung der Daten und Verbesserungen des Verfahrens.

3.1 Die Idee des Verfahrens

Eine vereinfachte Beschreibung des Verfahrens könnte wie folgt aussehen: Man startet mit einem irreduziblen normierten Polynom $f \in K[t]$ und durchläuft folgende Schleife: Angenommen, man weiß, daß $\mathfrak{G}(f, K) \leq G$ für eine transitive Untergruppe G von S_n ist (nach Bemerkung 2.6.8 ist dies für $G = S_n$ bekannt), so teste, ob $\mathfrak{G}(f, K) \leq H$ für eine maximale transitive Untergruppe H von G gilt. Ist $\mathfrak{G}(f, K)$ in keiner maximalen transitiven Untergruppe H von G enthalten, so folgt $\mathfrak{G}(f, K) = G$. Ansonsten setze $G := H$ und wiederhole die Schleife. Hierbei spielt die Wahl der Gruppe H keine Rolle, da aus $\mathfrak{G}(f, K) \leq H_1$ und $\mathfrak{G}(f, K) \leq H_2$ folgt $\mathfrak{G}(f, K) \leq H_1 \cap H_2$.

Eine Grundmotivation für diese Vorgehensweise liefert die Betrachtung von rationalen (symmetrischen) Funktionenkörpern. Dazu möchten wir zunächst die folgenden Bezeichnungen vereinbaren und an einen in diesem Zusammenhang wichtigen Satz erinnern:

Bemerkung 3.1.1

(i) *Sei* $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Polynom in den Unbestimmten* $x_1, \ldots, x_n$. *Jede Permutation* $\sigma \in S_n$ *vermittelt in natürlicher Weise einen Ringautomorphismus* $\sigma^\star : K[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow K[x_1, \ldots, x_n]$ *durch*

$$\sigma^\star(F)(x_1, \ldots, x_n) := F(y_1, \ldots, y_n) \text{ mit } y_i = x_{\sigma(i)} \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

(ii) *Die Gesamtheit aller Permutationen* $\sigma \in G \leq S_n$, *deren zugehörige Ringautomorphismen* $\sigma^\star$ *das Polynom* $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *invariant lassen, bilden eine Gruppe. Wir wollen sie mit*

$$Stab_G(F) = \{\, \sigma \in G \mid \sigma^\star F = F \,\}$$

bezeichnen.

Sei K ein Körper. Mit $L := K(x_1, \ldots, x_n)$ sei der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über K bezeichnet. Offensichtlich ist $S_n^\star := \{\sigma^\star \,|\, \sigma \in S_n\}$ eine Untergruppe von $Aut(L/K)$ und $|S_n^\star| = n!$. Der Fixkörper von $S_n^\star$ besteht aus denjenigen rationalen Funktionen in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$, die sich bei keiner Permutation der Unbestimmten ändern. Dies ist der Körper der rationalen symmetrischen Funktionen; wir bezeichnen ihn mit M. Wie der nächste Satz zeigt, sind folgende Elemente aus M, die sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen

$$s_r = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}, \quad (1 \leq r \leq n), \tag{3.1}$$

von Bedeutung.

Satz 3.1.2 *Sei* K *ein Körper,* M *und* L *wie eben definiert. Dann gilt:*

(i) $M = K(s_1, \ldots, s_n)$ *mit den elementarsymmetrischen Funktionen* $s_1, \ldots, s_n$ *in den* x_i, $(1 \leq i \leq n)$.

(ii) L/M *ist Zerfällungskörper des Polynoms*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s_i t^{n-i} \in M[t].$$

(iii) L/M *ist galoissch mit* $[L/M] = n!$.

(iv) *Die Galoisgruppe von* L/M *ist isomorph zur symmetrischen Gruppe* S_n, $G(L/M) = S_n^\star \cong S_n$.

Beweis: siehe [25] □

Wir wollen im folgenden zwischen $\sigma^\star$ und σ nicht mehr unterscheiden. Zu jeder (transitiven) Untergruppe H von S_n sei $Fix(L,H)$ der Fixkörper von H. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gilt für eine Untergruppe H der Galoisgruppe $G(L/M)$, daß $G(L/Fix(L,H)) = H$. Wir haben also folgende Situation vorliegen mit $H \leq G \leq S_n$:

$$\begin{array}{ccc} L = K(x_1,\dots,x_n) & \longleftrightarrow & \{id\} \\ \cup & & \cap \\ Fix(L,H) & \longleftrightarrow & H \\ \cup & & \cap \\ Fix(L,G) & \longleftrightarrow & G \\ \cup & & \cap \\ M = K(s_1,\dots,s_n) & \longleftrightarrow & G(L/M) \end{array} \tag{3.2}$$

Aus Satz 3.1.2 folgt, daß $Fix(L,H)/Fix(L,G)$ endlich und separabel ist. Nach dem Satz vom primitiven Element existiert also ein primitives Element $F \in Fix(L,H)$, so daß $Fix(L,H) = Fix(L,G)(F)$. Es ist immer möglich, F ganzalgebraisch über $K[s_1,\dots,s_n]$ zu wählen. Multiplikation von F mit dem k.g.V. der Nenner des Minimalpolynoms von F über $K[s_1,\dots,s_n]$ ergibt ein ganzalgebraisches Element. Weil der faktorielle Ring $K[x_1,\dots,x_n]$ ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist, folgt, daß $F \in K[x_1\dots,x_n]$ ist. F ist also ein Polynom. Ist K der Quotientenkörper eines Ringes R, so kann man durch Multiplikation mit einem Skalar aus R sogar $F \in R[x_1,\dots,x_n]$ erreichen.

Sei f ein normiertes irreduzibles Polynom aus $K[t]$. Nehmen wir an, wir wissen, daß $\mathfrak{G}(f,K) \leq G$ für eine transitive Untergruppe G von S_n gilt. Bei der vereinfachten Beschreibung des Verfahrens hatten wir nicht näher beschrieben formuliert, „so teste“, ob $\mathfrak{G}(f,K) \leq H$ für maximale Untergruppen H von G. Wie ist dieser Test konkret durchzuführen? Ein Blick auf das Körperdiagramm liefert die Antwort:

Lemma 3.1.3 *Sei R ein Integritätsring (mit 1) und K sein Quotientenkörper. R sei ganz abgeschlossen in K, f ein normiertes irreduzibles Polynom aus $R[t]$ und L, M wie in Satz 3.1.2. Weiterhin seien $H \leq G \leq S_n$, so daß $\mathfrak{G}(f,K)$ eine Untergruppe von G ist. Das Polynom $F \in R[x_1,\dots,x_n]$ sei ein primitives Element von $Fix(L,H)$ über $Fix(L,G)$. Dann gilt:*

(i) Genau dann ist $\mathfrak{G}(f,K) \leq H$, wenn $\sigma F = F$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f,K)$.

(ii) Für alle $\sigma \in G$ gelte: $\sigma F \neq F \Rightarrow \sigma F(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, wobei $\alpha_1\dots,\alpha_n$ die Wurzeln von $f \in \overline{K}$ sind. Dann sind äquivalent:

  (a) $\sigma F = F$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f,K)$.

  (b) $F(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in R$.

Beweis:

(i) Wir wollen zunächst anmerken, daß die primitive Elementeigenschaft äquivalent ist zu $Stab_G(F) = H$. Sei nun $\mathfrak{G}(f, K) \leq H$ vorausgesetzt. Für ein Element $\sigma \in \mathfrak{G}(f, K)$ gilt $\sigma \in H$. Da $Stab_G(F) = H$, folgt $\sigma F = F$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f, K)$. Gilt umgekehrt $\sigma F = F$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f, K)$, so ist $\mathfrak{G}(f, K) \leq H$, da das Polynom F genau von allen Permutationen aus H invariant gelassen wird.

(ii) Gilt $\sigma F = F$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f, K)$, so folgt insbesondere $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ liegt also im Fixkörper von $\mathfrak{G}(f, K)$, d.h. in K. Da die α_i, $(1 \leq i \leq n)$, wegen $f \in R[t]$ ganze algebraische Zahlen über R sind und die Menge der ganz algebraischen Zahlen einen Ring bildet, folgt daß jedes $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine ganze algebraische Zahl über R ist. Da R nach Voraussetzung ganz abgeschlossen in K ist, folgt $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R$. Sei nun $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R$ vorausgesetzt, so gilt nach Definition der Galoisgruppe: $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f, K)$. Da nach Voraussetzung aus $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ folgt, $\sigma F = F$ für alle $\sigma \in \mathfrak{G}(f, K)$, ist somit die Behauptung bewiesen. □

Wir können nun Teil (i) und (ii) kombinieren, sofern für alle $\sigma \in G$ aus $\sigma F \neq F$ folgt $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, und erhalten:

$$\mathfrak{G}(f, K) \leq H \Longleftrightarrow F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R.$$

In dieser Form wird Lemma 3.1.3 im Algorithmus verwendet. Anschaulich gesprochen versucht das Verfahren den Fixkörper $Fix(L, \mathfrak{G}(f, K))$, dessen Bild unter Einsetzung der Nullstellen gleich K ist, von unten auszuschöpfen.

Unter Voraussetzung der Kenntnis primitiver Elemente für alle Gruppenpaare $H \leq G$, wobei H maximal transitiv in G ist, wäre eine Durchführung des Algorithmus, wie bisher beschrieben, möglich. Dieses Vorgehen ist aufgrund der hohen Anzahl solcher Gruppenpaare nicht sinnvoll. Im folgenden werden Methoden entwickelt, dieses Problem zu lösen.

3.2 Invariante Polynome

Unter den Permutationen $\sigma \in G$ sind es genau die $\sigma \in H$, die das primitive Element F aus Lemma 3.1.3 stabilisieren. Umgekehrt ist zu jedem Gruppenpaar $H \leq G$ von S_n die Erweiterung $Fix(L/H)$ über $Fix(L/G)$ endlich und separabel. Daraus folgt für jedes Gruppenpaar $H \leq G$ von S_n die Existenz eines Polynoms (primitiven Elements) $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $Stab_G(F) = H$. Die Existenzaussage eines primitiven Elements wollen wir im nächsten Satz konstruktiv belegen. Wir geben konkret zu jeder Untergruppe H von S_n ein Polynom $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ an, so daß F genau von den Permutationen aus H invariant gelassen wird.

Satz 3.2.1 *Sei H eine beliebige Untergruppe von S_n. Dann gibt es ein Polynom $F \in K[x_1, \dots, x_n]$, so daß*

$$Stab_{S_n}(F) = H.$$

Beweis: Gesucht ist also ein Polynom, welches genau von allen Permutationen von H nicht verändert wird. Sei $m(x_1, \dots, x_n) := x_1^1 x_2^2 \dots x_n^n \in K[x_1, \dots, x_n]$. Definiere

$$F(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\tau \in H} \tau\Big(m(x_1, \dots, x_n)\Big).$$

(i) Sei $\sigma \in H$. Wir zeigen $\sigma F = F$.

$$\begin{aligned} \sigma(F(x_1, \dots, x_n)) &= \sigma\left(\sum_{\tau \in H} \tau(m(x_1, \dots, x_n))\right) \\ &= \sigma\left(\sum_{\tau \in H} m(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})\right) \\ &= \sum_{\tau \in H} m(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(n)}) \\ &= \sum_{\tau' \in H} \tau'(m(x_1, \dots, x_n)) \\ &= F(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Da H eine endliche Gruppe ist, durchläuft $\tau' = \sigma\tau$ für $\sigma \in H$ auch ganz H. $F(x_1, \dots, x_n)$ wird von Elementen aus H also nicht verändert.

(ii) Sei $\sigma \notin H$. Wir zeigen $\sigma(F) \neq F$.
Wie man leicht nachprüft, läßt nur die Identität das Monom $m = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n^n$ invariant. Daher gilt für zwei beliebige Permutationen $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, daß $\tau_1(x_1 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n) \neq \tau_2(x_1 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n)$. Ist $M := \{\tau(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n^n) \mid \tau \in H\}$, so sind also alle Elemente aus M verschieden und $\sigma(m) \notin M$ für $\sigma \in S_n \backslash H$. Das Polynom F entsteht durch Summation aller Elemente aus M. Für $\sigma \notin H$ folgt somit die Behauptung. □

Bemerkung 3.2.2 *Für $m = x_1 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^n$ und eine beliebige Untergruppe H von S_n gilt:*

$$|\, Orb_H(m) \,| = |\, \{\sigma(m) \mid \sigma \in H\} \,| = |\, H \,|.$$

Definition 3.2.3

(i) Sei $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ und $\sigma \in S_n$. Dann nennt man das Polynom σF ein konjugiertes Polynom von F.

(ii) Seien G und H zwei Untergruppen von S_n mit $H < G$, und sei $F \in K[x_1, \dots, x_n]$. Gilt

$$Stab_G(F) = \{\, \sigma \in G \mid \sigma F = F \,\} = H,$$

so nennen wir das Polynom F ein G-relatives H-invariantes Polynom.

Man kann sich nun fragen, wieviele konjugierte Polynome es bei gegebener Untergruppe G zu einem Polynom $F(x_1, \dots, x_n)$ gibt.

Satz 3.2.4 *Sei G eine beliebige Untergruppe von S_n und $Stab_{S_n}(F) = H$. Dann gibt es genau $[\,G\!:\!G \cap H\,]$ paarweise verschiedene konjugierte Polynome von F unter den Permutationen von G.*

Beweis: Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in G$. Wir zeigen, daß $\sigma_1 F = \sigma_2 F$ genau dann gilt, wenn σ_1 und σ_2 in derselben linken Nebenklasse von $G \cap H$ liegen.

$$\begin{aligned} \sigma_1 F = \sigma_2 F &\iff \sigma_2^{-1}(\sigma_1 F) = F \\ &\iff (\sigma_2^{-1}\sigma_1)F = F \\ &\iff \sigma_2^{-1}\sigma_1 \in G \cap H \\ &\iff \sigma_2^{-1}\sigma_1(G \cap H) = G \cap H \\ &\iff \sigma_1(G \cap H) = \sigma_2(G \cap H) \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $\sigma_1 F \neq \sigma_2 F$ genau dann gilt, wenn σ_1 und σ_2 in verschiedenen Nebenklassen von $G \cap H$ liegen. Da es genau $[\,G\!:\!G \cap H\,]$ verschiedene Nebenklassen von $G \cap H$ in G gibt, existieren also genau $[\,G : G \cap H\,]$ verschiedene konjugierte Polynome von $F(x_1, \dots, x_n)$ unter den Permutationen von G. □

Bemerkung 3.2.5 *Sei $F(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ ein G-relatives H-invariantes Polynom mit $[\,G\!:\!H\,] = m$. Dann kann man sich m verschiedene Nebenklassenrepräsentanten $\sigma_i \in G$ wählen, so daß $G = \sigma_1 H \cup \ldots \cup \sigma_m H$. Da $Stab_{S_n}(F) \cap G = H$, gilt nach Satz 3.2.4, daß die Polynome $\sigma_1 F, \dots, \sigma_m F$ paarweise verschieden sind. Auf die Situation des Körperdiagramms 3.2 bezogen, bedeutet dies nichts anderes, als die Konjugierten von F über dem Fixkörper $Fix(L, G)$ zu bestimmen. Für ein festes n-Tupel von Zahlen brauchen die Funktionswerte der Polynome $\sigma_1 F, \dots, \sigma_m F$ aber nicht paarweise verschieden zu sein, wie das nächste Beispiel zeigt:*

Beispiel 3.2.6 *Sei $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_1^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Der Stabilisator von F in S_4 ist $C(4)$, die zyklische Gruppe der Ordnung 4, wie man durch direktes Nachrechnen erhält. Wir wählen $[\,S_4\!:\!C(4)\,] = 6$ Nebenklassenrepräsentanten von $C(4)$ in S_4 und werten die Konjugierten von F an den Nullstellen des Polynoms $f(t) = t^4 - 2$ aus. Seien $id, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)$*

die Nebenklassenrepräsentanten und $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = -\sqrt[4]{2}$, $\alpha_3 = \sqrt[4]{2}i$, $\alpha_4 = -\sqrt[4]{2}i$ *die Wurzeln unseres Polynoms. Mit der gewählten Reihenfolge erhalten wir*

$$(2,3)F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$$

und

$$(1,2,3)F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch den Zusammenhang zwischen konjugierten Polynomen σF und konjugierten Gruppen aufzeigen. Die Bedeutung für das Verfahren werden wir im nächsten Abschnitt klären.

Satz 3.2.7 *Seien* H, G *Untergruppen von* S_n *mit* $H \leq G$ *und* $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ *ein* G*-relatives* H*-invariantes Polynom. Für* $\sigma \in G$ *ist* σF *ein* G*-relatives* $\sigma H \sigma^{-1}$*-invariantes Polynom.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß nach Voraussetzung $Stab_G(F) = H$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} Stab_G(\sigma F) &= \{\tau \in G \,|\, \tau\sigma F = \sigma F\} \\ &= \{\tau \in G \,|\, \sigma^{-1}\tau\sigma F = F\} \\ &= \{\tau \in G \,|\, \sigma^{-1}\tau\sigma \in H\} \\ &= \sigma H \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.8 *Die Behauptung des letzten Satzes läßt sich sogar auf Elemente* σ *des Normalisators von* G *in* S_n *erweitern, da*

$$\begin{aligned} &Stab_G(\sigma F) = Stab_{S_n}(\sigma F) \cap G = \sigma Stab_{S_n}(F)\sigma^{-1} \cap G \\ &= \sigma(Stab_{S_n}(F) \cap G)\sigma^{-1} = \sigma Stab_G(F)\sigma^{-1} = \sigma H \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

3.3 Die Resolvente

Kehren wir zu der Ausgangssituation des Körperdiagramms (4.2) zurück. Sei wieder $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ das primitive Element der Körpererweiterung $Fix(L, H)$ über $Fix(L, G)$ und m_F das Minimalpolynom von F über $Fix(L, G)$. Für den Grad des Minimalpolynoms haben wir $m := [\, Fix(L, H) : Fix(L, G)\,] = [\, G : H\,]$ und für das Minimalpolynom selbst $m_F = \prod_{\sigma \in G//H}(t - \sigma F)$. Die zugehörigen Zerfällungskörper erfüllen $Z_M(m_F) \subseteq Z_M(f)$, wobei M der Körper der rationalen symmetrischen Funktionen und f das allgemeine Polynom n-ten Grades aus Satz 3.1.2 ist. Allgemein wollen wir festhalten:

Definition 3.3.1 *Sei K ein Körper, $f(t) \in K[t]$ ein Polynom mit Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$.*

(i) Wir nennen ein Polynom $r(t) \in K[t]$, dessen Zerfällungskörper ein Teilkörper des Zerfällungskörpers von f ist, eine Resolvente von f.

(ii) Seien zwei Untergruppen G und H von S_n mit $H \leq G$ und ein G-relatives H-invariantes Polynom $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ gegeben. Dann bezeichnen wir

$$R_{(G,H,F)}(t) = \prod_{\sigma \in G//H} (t - \sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$$

als das G-relative H-Resolventenpolynom.

Wir wollen uns nun auf den Fall $K = \mathbb{Q}$ zurückziehen. Im folgenden sei $f \in \mathbb{Z}[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom mit Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Da wir die Galoisgruppe als Permutationsgruppe ihrer Wurzeln betrachten, ist es nach Bemerkung 2.6.9 notwendig, eine feste Wurzelanordung zu wählen. Ohne dies explizit zu vermerken, wollen wir im folgenden immer von einer festen gegebenen Anordnung der Wurzeln ausgehen. In Lemma 3.1.3 haben wir gesehen, daß die ganzzahligen Wurzeln des G-relativen H-Resolventenpolynoms eine entscheidende Rolle bei dem Verfahren von Stauduhar spielen. Wir wollen Lemma 3.1.3 für den Fall $K = \mathbb{Q}$ formulieren und verallgemeinern.

Satz 3.3.2 *Sei $f(t) \in Z[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad n und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine fest gewählte Anordnung der Wurzeln. Sei G eine transitive Untergruppe von S_n, so daß für die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ von f gilt: $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq G$. Sei H eine Untergruppe von G und $F(x_1, \ldots, x_n)$ ein G-relatives H-invariantes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und $R_{(G,H,F)}$ das korrespondierende Resolventenpolynom. Dann gilt*

(i) $R_{(G,H,F)}(t) = \prod\limits_{\sigma \in G//H} (t - \sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ hat Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

(ii) Sei $Q(t) = \prod_{i=1}^{l} (t - \sigma_i F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ ein Faktor von $R_{(G,H,F)}$, so daß Q und $R_{(G,H,F)}/Q$ teilerfremd sind, und sei $K = Stab_G(\{\sigma_1 F, \ldots, \sigma_l F\})$. Dann ist $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq K$ genau dann, wenn $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ („$\Rightarrow$“ gilt auch ohne die Bedingung teilerfremd).

(iii) Ist insbesondere $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine einfache Wurzel von $R_{(G,H,F)}$, dann gilt $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq \sigma H \sigma^{-1}$ genau dann, wenn $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine ganzrationale Zahl ist.

(iv) Sei $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine ganzrationale Zahl und eine einfache Wurzel von $R_{(G,H,F)}$, so daß $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq \sigma H \sigma^{-1}$. Ordnet man die Wurzeln von f so an, daß $\alpha'_j = \alpha_{\sigma(j)}$ gilt, so ist $F(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ eine ganzrationale Zahl und aufgrund der neuen Anordnung gilt $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq H$.

Beweis:

(i) Da die α_i, $(1 \leq i \leq n)$, ganze algebraische Zahlen sind und die Menge der ganz algebraischen Zahlen einen Ring bildet, folgt, daß jedes $\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine ganze algebraische Zahl ist. Dasselbe Argument liefert, daß die Koeffizienten von $R_{(G,H,F)}$ ganze algebraische Zahlen sind. Sei $\tau \in \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$, dann gilt auch $\tau \in G$. Jedes $\tau \in \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ setzen wir fort zu einem Isomorphismus

$$\begin{aligned} \tau^\star : \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[t] &\longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)[t] \\ \sum a_i t^i &\longmapsto \tau^\star(\sum a_i t^i) = \sum \tau(a_i) t^i \end{aligned}$$

$\tau^\star$ angewendet auf das Resolventenpolynom liefert:

$$\begin{aligned} \tau^\star(R_{(G,H,F)}(t)) &= \tau^\star(\prod_{\sigma \in G//H} (t - \sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))) \\ &= \prod_{\sigma \in G//H} (t - \tau(\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\ &= \prod_{\sigma \in G//H} (t - \tau\sigma(F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \end{aligned}$$

Mit $\sigma \in G//H$ durchläuft aber auch $\tau\sigma$ ein vollständiges Repräsentantensystem von H in G. Folglich hat die Anwendung von $\tau^\star$ gerade einmal die Wurzeln von $R_{(G,H,F)}$ permutiert und die Koeffizienten festgelassen. Die Koeffizienten von $R_{(G,H,F)}$ sind also ganze algebraische Zahlen, die von der Galoisgruppe nicht verändert werden. Folglich liegen die Koeffizienten von $R_{(G,H,F)}$ im Fixkörper, sind also auch rationale Zahlen. Daher handelt es sich bei den Koeffizienten des Resolventenpolynoms $R_{(G,H,F)}$ um ganzrationale Zahlen.

(ii) Sei zunächst $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq K$ vorausgesetzt. Für ein Element $\tau \in \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ ist $\tau \in K$ und folglich $\tau(\sigma_i F) = \sigma_j F$, $(1 \leq i, j \leq l)$. Das bedeutet, daß insbesondere die Menge $\{\sigma_1 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \sigma_l F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ von allen $\tau \in \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ invariant gelassen wird. Wie in Teil (i) folgt $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$, ohne die Voraussetzung der Teilerfremdheit. Nun wird die Teilerfremdheit vorausgesetzt. Sei $m := [\,G : H\,]$. Wir setzen $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ zu einem vollständigen System $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ von Nebenklassenrepräsentanten fort. Ist nun $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ und $\tau \in \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$, so gilt für $1 \leq i \leq l$, daß $\tau(\sigma_i F) = \sigma_j F$, wobei $j \in \{1, \ldots, m\}$. Da $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ ist, folgt $\tau(\sigma_i F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \sigma_k F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $k \in \{1, \ldots, l\}$. Damit haben wir $\sigma_k F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sigma_j F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, und aufgrund der Teilerfremdheit von Q und $R_{(G,H,F)}/Q$ folgt, daß auch $j \in \{1, \ldots, l\}$ ist.

(iii) Nach Satz 3.2.7 ist $\sigma F(x_1, \ldots, x_n)$ ein G-relatives $\sigma H \sigma^{-1}$-invariantes Polynom. Die Behauptung folgt aus Teil (ii) für $l = 1$.

(iv) Bezüglich der gewählten Anordnung gilt $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q}) \leq \sigma^{-1}H\sigma$. In den Grundlagen wurde gezeigt, daß die Änderung der Anordnung durch eine Permutation σ die Konjugation der Gruppe $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q})$ mit σ zur Folge hat. Wir erhalten somit bezüglich der neuen Anordnung $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q}) \leq H$. Das G-relative H-invariante Polynom bezüglich der neuen Anordnung verhält sich wie das G-relative $\sigma H\sigma^{-1}$-invariante Polynom bezüglich der alten Anordnung. Da $F(\alpha_1',\ldots,\alpha_n') = \sigma F(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ist, folgt $F(\alpha_1',\ldots,\alpha_n') \in \mathbb{Z}[t]$. □

Wir wollen nun die Sätze der letzten Abschnitte im Gesamtzusammenhang betrachten und bezüglich des Verfahrens einordnen. Der bisherige Stand der Dinge ist, daß wir zu jeder maximalen Untergruppe H von G ein invariantes Polynom brauchen, mit dessen Hilfe durch einen Ganzzahligkeitstest entschieden wird, ob $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q}) \leq H$. In Satz 3.2.7 haben wir gesehen, daß bei Kenntnis eines Polynoms F bezüglich $H \leq G$ auch gleich G-relative $\sigma H\sigma^{-1}$-invariante Polynome bekannt sind für $\sigma \in G\backslash H$. Da es genau $[\,G : H\,]$ viele formal verschiedene G-Konjugierte von F gibt, können wir unter Hinzunahme einer Menge von Nebenklassenrepräsentanten $\sigma \in G//H$ und der Kenntnis eines Polynoms F bezüglich $H \leq G$ entscheiden, ob die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q})$ in H oder einer G-konjugierten Gruppe von H enthalten ist. Dies bedeutet bezüglich der Menge der maximalen Untergruppen von G nichts anders als eine Unterteilung in G-Klassen. Für die zugehörigen Resolventen und für zwei Gruppen H und $\sigma H\sigma^{-1}$, die in G zueinander konjugiert sind, ergibt sich:

$$R_{(G,H,F)} = R_{(G,\sigma H\sigma^{-1},\sigma F)}. \tag{3.3}$$

Auf einen Beweis von 3.3 verzichten wir an dieser Stelle und verweisen auf den Beweis des nächsten Satzes.

Sei nun $H \leq G \leq S_n$ ein ausgewähltes Gruppenpaar. Bedingung (*iii*) aus Satz 3.3.2 wird im Algorithmus dazu genutzt, um zu testen, ob $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q})$ in einer konjugierten Gruppe $\sigma H\sigma^{-1} \leq G$ enthalten ist. Dies geschieht mittels Ganzzahligkeitstests der Nullstellen des G-relativen H-Resolventenpolynoms. Um festzustellen, ob es sich bei einer Nullstelle der Resolvente um eine einfache Nullstelle handelt, müssen alle Nullstellen der Resolvente berechnet werden. Dies sind genau $[\,G\!:\!H\,]$ Stück. Hier sieht man, daß es für das Laufzeitverhalten des Algorithmus am günstigsten ist, wenn man zu einer Gruppe G den Weg durch das Untergruppengitter so vorgibt, daß jeweils nur maximale Untergruppen von G betrachtet werden, um den Grad der Resolvente möglichst gering zu halten. Mittels Bedingung (*iv*) aus Satz 3.3.2 wird während des Programmablaufs zu jedem Zeitpunkt durch Umordnung der Wurzeln gesichert, daß die Galoisgruppe als Permutationsgruppe betrachtet, direkte Untergruppe einer transitiven Untergruppe der S_n ist, wie sie zum Beispiel in [6] vorgegeben wurde. Teil (*ii*) von Satz 3.3.2 wird für $l > 1$ im Verfahren nicht zu Inklusionstests herangezogen.

Offen ist nun noch der Fall, ob Verbesserungen möglich sind, wenn wir Vertreter zweier Konjugationsklassen haben, die nicht in G zueinander konjugiert sind.

Zum Beispiel gilt nach Definition des Normalisators von G in S_n, daß $\sigma H\sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in N_{S_n}(G)$ maximale Untergruppe von G ist. Ist $N_{S_n}(G) \neq G$, so sind H und $\sigma H\sigma^{-1}$ für $\sigma \in N_{S_n}(G)\backslash G$ nicht in G zueinander konjugiert. Trotzdem kann man eine Aussage über die zugehörigen Resolventen treffen:

Satz 3.3.3 *Sind H_1 und H_2 zwei Untergruppen von G, die in $N_{S_n}(G)$ zueinander konjugiert sind, d.h. $H_2 = \sigma H_1\sigma^{-1}$, $\sigma \in N_{S_n}(G)$ und $F \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ein G-relatives H_1-invariantes Polynom. Dann gilt*

(i) σF ist ein G-relatives H_2-invariantes Polynom.

(ii) $R_{(G,H_2,\sigma F)} = \prod_{\tau \in G//H_1} (t - \sigma\tau F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$.

Ist insbesondere σ in G, so gilt $R_{(G,H_2,\sigma F)} = R_{(G,H_1,F)}$.

Beweis: Nach Bemerkung 3.2.8 ist σF ein G-relatives H_2- invariantes Polynom. Sei $\tau_1, \ldots, \tau_k$ ein vollständiges System von linken Nebenklassenrepräsentanten von $G//H_1$. Für $\sigma \in N_{S_n}(G)$ folgt dann

$$\begin{array}{rcl} G \;=\; \sigma G\sigma^{-1} & = & \sigma(\tau_1 H_1 \cup \ldots \cup \tau_k H_1)\sigma^{-1} \\ & = & (\sigma\tau_1\sigma^{-1})\sigma H_1\sigma^{-1} \cup \ldots \cup (\sigma\tau_k\sigma^{-1})\sigma H_1\sigma^{-1} \\ & = & (\sigma\tau_1\sigma^{-1})H_2 \cup \ldots \cup (\sigma\tau_k\sigma^{-1})H_2 \end{array}$$

Für ein vollständiges Repräsentantensystem τ von $G//H_1$ ist also mit $\sigma \in N_{S_n}(G)$ $\sigma\tau\sigma^{-1}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $G//H_2$. Damit gilt für das korrespondierende Resolventenpolynom

$$\begin{array}{rcl} R_{(G,H_2,\tau F)}(t) & = & \prod\limits_{\sigma\tau\sigma^{-1} \in G//\sigma H_1\sigma^{-1}} (t - (\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\ & = & \prod\limits_{\tau \in G//H_1} (t - \sigma\tau F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)). \end{array}$$

□

Nach Aussage des letzten Satzes brauchen wir für alle maximalen Untergruppen H von G, die bezüglich eines Elementes $\sigma \in N_{S_n}(G)$ zueinander konjugiert sind, genau ein G-relatives H-invariantes Polynom zu kennen. Da $N_{S_n}(G)$ durch Konjugation auf der Menge $\mathfrak{C}(G,H) := \{\sigma H\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in S_n \textit{ und } \sigma H\sigma^{-1} \leq G\}$ operiert, bedeutet dies nichts anderes als die Kenntnis eines invarianten Polynoms für jede Bahn von $\mathfrak{C}(G,H)$ unter $N_{S_n}(G)$. Die Bahn eines Elementes $\sigma H\sigma^{-1} \in \mathfrak{C}(G,H)$ unter $N_{S_n}(G)$ ist hier nichts anderes als die Konjugationsklasse von $\sigma H\sigma^{-1}$ bezüglich den Permutationen aus $N_{S_n}(G)$. Der Satz impliziert ferner, daß alle Elemente einer Bahn von $\mathfrak{C}(G,H)$ unter G dieselbe Resolvente besitzen, was oben schon einmal angesprochen wurde.

Bemerkung 3.3.4 *In der Praxis haben wir für die betrachteten Inklusionen* $H \leq G$ *der Grade* $n \leq 12$ *jeweils nur eine Bahn von* $\mathfrak{C}(G, H)$ *unter* $N_{S_n}(G)$ *gefunden. Zwei maximale transitive Untergruppen von* G*, die in* S_n *zueinander konjugiert sind, sind dies also auch in* $N_{S_n}(G)$*. In allen Fällen genügt es daher, zu einem transitiven Gruppenpaar* $H \leq G \leq S_n$ *ein* G*-relatives* H*-invariantes Polynom* F *zu finden und eine Menge von Nebenklassenrepräsentanten* $\tau \in G//H$ *zu berechnen. Für die nichttrivialen Bahnen* $Orb_G(\sigma H\sigma^{-1})$*, d.h.* $Orb_G(\sigma H\sigma^{-1}) \neq Orb_G(H)$ *ist* σF *eine* G*-relative* $\sigma H\sigma^{-1}$*-Invariante. Hier muß also zusätzlich die Permutation* σ *mitberechnet werden.*

Für den Fall $G = A_n$, $(n \geq 5)$ lassen sich konkrete Aussagen über die Anzahl der A_n-Bahnen von $\mathfrak{C}(A_n, H)$ machen.

Korollar 3.3.5 *Sei* $n \geq 5$ *und* H *eine maximale transitive Untergruppe von* A_n*. Dann gilt*

(i) $\mathfrak{C}(A_n, H) = \{\, \sigma H\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n \,\}$,

(ii) Ist $N_{S_n}(H) = H$*, so gibt es genau zwei* A_n*-Bahnen von* $\mathfrak{C}(A_n, H)$*, nämlich* $Orb_{A_n}(H)$ *und* $Orb_{A_n}(\sigma H\sigma^{-1})$*, wobei* σ *eine ungerade Permutation ist.*

(iii) Für $N_{S_n}(H) \neq H$ *ist* $\mathfrak{C}(A_n, H) = Orb_{A_n}(H)$*.*

Beweis: Da A_n Normalteiler von S_n ist, gilt für jede transitive Untergruppe H von A_n und alle $\sigma \in S_n$, $\sigma H\sigma^{-1} \leq A_n$. Wir können die Menge $\mathfrak{C}(A_n, H)$ als Vereinigung von $\mathfrak{C}_g(A_n, H) := \{\, \sigma H\sigma^{-1} \mid \sigma \in A_n \,\}$ und $\mathfrak{C}_{ung}(A_n, H) := \{\, \sigma H\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n \backslash A_n \,\}$ schreiben. Sei nun $N_{S_n}(H) = H$ vorausgesetzt. Für eine ungerade Permutation σ ist

$$Orb_{A_n}(\sigma H\sigma^{-1}) = \mathfrak{C}_{ung}(A_n, H),$$

da A_n bezüglich Konjugation operiert, und Multiplikation einer geraden mit einer ungeraden Permutation wieder einer ungerade Permutation ergibt. Analog folgt

$$Orb_{A_n}(H) = \mathfrak{C}_g(A_n, H).$$

Die beiden Mengen sind disjunkt, da $\sigma H\sigma^{-1} = \tau H\tau^{-1}$, $\sigma \in A_n, \tau \in S_n \backslash A_n$ genau dann, wenn $\tau^{-1}\sigma \in N_{S_n}(H)$. Dies ist aber nach Voraussetzung nicht der Fall. Gilt $N_{S_n}(H) \neq H$, so gibt es eine ungerade Permutation in $N_{S_n}(H)$. Gäbe es keine ungerade Permutation in $N_{S_n}(H)$, so wäre $N_{S_n}(H)$ eine gerade Permutationsgruppe und aufgrund der Maximalität von H in A_n würde $N_{S_n}(H) = A_n$ sein. Da aber nach Definition der Normalisators H Normalteiler von $N_{S_n}(H)$ ist, hätte A_n somit einen nichttrivialen Normalteiler, was im Widerspruch zur Einfachheit von A_n für $n \geq 5$ steht. Sei σ die ungerade Permutation. Es folgt also $Orb_{A_n}(\sigma H\sigma^{-1}) = Orb_{A_n}(H) = \mathfrak{C}(A_n, H)$. □

Korollar 3.3.5 wurde zur Vereinfachung der durchgeführten Berechnungen herangezogen. Diesen Abschnitt wollen wir mit einem Unterscheidungskriterium für gerade und ungerade Galoisgruppen beenden.

Satz 3.3.6 *Sei $f(t)$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten und Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.*

(i) $F = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ ist ein S_n-relatives A_n-invariantes Polynom.

(ii) $R_{(S_n, A_n, F)}(t) = t^2 - D(f(t))$, wobei $D(f(t)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ die Diskriminante von f ist.

(iii) Die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ ist genau dann eine Untergruppe der alternierenden Gruppe A_n, wenn die Diskriminante $D(f(t)$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}$ ist.

Beweis: Allgemein gilt für eine Permutation $\sigma \in S_n$ und das Polynom F: $\sigma F = sign(\sigma) F$. Damit ist klar, daß $Stab_{S_n}(F) = A_n$. Für die zugehörige Resolvente folgt

$$\begin{aligned} R_{(S_n, A_n, F)}(t) &= (t - \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j))(t + \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)) \\ &= t^2 - \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \end{aligned}$$

Die Resolvente ist also von der Gestalt $R_{(S_n, A_n, F)}(t) = t^2 - D(f(t))$, und nach Satz 3.3.2 (i) hat das Resolventenpolynom Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Wir sehen auch, daß $R_{(S_n, A_n, F)}$ keine doppelten Nullstellen haben kann, da $D(f(t)) \neq 0$. Somit haben wir $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \le A_n \Longleftrightarrow D(f(t))$ ist ein Quadrat in $\mathbb{Z}$. □

Bemerkung 3.3.7

(i) Dieses Resultat kann man sofort dahingehend verallgemeinern, daß für jede ungerade Gruppe G und jede gerade Gruppe H oben genanntes F ein G-relatives H-invariantes Polynom und $R_{(G,H,F)}$ zugehörige Resolvente ist.

(ii) Um bei dem Durchlauf durch das Untergruppengitter der S_n nicht alle Inklusionen betrachten zu müssen, teilt man die transitiven Gruppen in drei Mengen ein: In die geraden imprimitiven Gruppen, die ungeraden imprimitiven Gruppen und die (geraden und ungeraden) primitiven Gruppen (siehe auch Anhang I). Ob es sich bei einer Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ um eine gerade oder ungerade Gruppe handelt, läßt sich sofort durch Betrachtung der Diskriminante ermitteln. Zum Beispiel gibt es im Fall $n = 3$ nur zwei transitive Gruppen, nämlich A_3 und S_3. Mittels Satz 3.3.6 kann ohne großen Rechenaufwand entschieden werden, um welche Gruppe es sich handelt. Da für größere Grade die Anzahl der primitiven transitiven Gruppen eher gering ist, sind nach Betrachtung der Diskriminante zuerst Tests bezüglich maximaler imprimitiver Gruppen sinnvoll. Erhält man hier keine Inklusionen, so handelt es sich bei der Galoisgruppe um eine primitive Gruppe.

3.4 Tschirnhausentransformationen

Eine entscheidende Voraussetzung für das Verfahren ist nach Satz 3.3.2 (*iii*) die Einfachheit wenigstens einer $\mathbb{Z}$-Nullstelle der Resolvente $R_{(G,H,F)}$. In Beispiel 3.2.6 haben wir gesehen, daß $R_{(G,H,F)}$ nicht notwendig separabel ist. Was ist in einem solchen Fall zu tun? Wir werden zeigen, daß es immer möglich ist, eine Resolvente $R_{(G,H,F)}$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen zu erhalten. Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu sind die sogenannten Tschirnhausentransformationen. Folgende Definition der Tschirnhausentransformation findet man in dem Buch von Pohst & Zassenhaus [30] in wesentlich allgemeinerer Form. Wir wollen uns hier auf unendliche Körper und normierte irreduzible separable Polynome beschränken.

Definition 3.4.1 *Sei $f \in K[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad n und α eine Nullstelle von f. Eine Transformation des primitiven Elements α zu einem anderen primitiven Element $\beta = h(\alpha)$ mit $h \in K[t]$ und $K(\alpha) = K(\beta)$ heißt Tschirnhausentransformation. Entsprechend sagt man, daß die zugehörigen Minimalpolynome m_α und m_β durch Tschirnhausentransformation ineinander übergehen.*

Sei f wie oben normiert und irreduzibel und $f = (t-\alpha_1)\dots(t-\alpha_n)$ die Darstellung von f in einem Zerfällungskörper. Sind die Nullstellen des Polynoms ${}^hf := (t-h(\alpha_1))\dots(t-h(\alpha_n))$, $h \in K[t]$ ebenfalls paarweise verschieden, so ist $h(\alpha_i)$, $(1 \le i \le n)$ primitives Element und ${}^hf$ durch Tschirnhausentransformation aus f hervorgegangen. Für die zugehörigen Galoisgruppen gilt die Gleichheit $G(f,K) = G({}^hf, K)$.

Eine Existenzaussage über die von uns gesuchten Tschirnhausentransformationen stellt der nächste Satz dar.

Satz 3.4.2 *Sei $R_{(G,H,F(x_1,\dots,x_n))}(t) = \prod_{\sigma \in G//H}(t - \sigma F(x_1,\dots,x_n))$ die Darstellung des Resolventenpolynoms $R_{(G,H,F(x_1,\dots,x_n))} \in K[x_1,\dots,x_n,t]$. Dann gibt es eine endliche Menge $H_n \subset K[t]$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem irreduziblen normierten separablen Polynom $f \in K[t]$ vom Grad n mit den Wurzeln $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \overline{K}$ gibt es ein Polynom $h \in H_n$, so daß ${}^hf$ paarweise verschiedene Wurzeln und $R_{(G,H,F(h(\alpha_1),\dots,h(\alpha_n)))}$ paarweise verschiedene Wurzeln in $\overline{K}$ haben.*

Beweis: Sei $[\,G : H\,] = m$. Die Elemente von $G//H$ bezeichnen wir mit σ_i, $(1 \le i \le m)$. Sei nun $d \in \mathbb{N}$ größer als der Grad des Polynoms

$$P(x_1,\dots,x_n) := \prod_{1 \le j < k \le m} (\sigma_j F(x_1,\dots,x_n) - \sigma_k F(x_1,\dots,x_n)) \prod_{1 \le i < l \le n} (x_i - x_l).$$

Dieses Polynom ist von Null verschieden, denn das hintere Produkt ist ungleich Null, da $x_i \ne x_l$ für $i \ne l$, und das vordere Produkt ist nach Satz 3.2.4 ungleich Null. Wir wählen eine d-elementige Menge $U \subset K$ und setzen $H_n :=$

$\{\sum_{j=1}^{n} u_j t^{j-1} \mid u_1, \ldots, u_n \in U\}$. Nun wird gezeigt, daß H die gewünschte Eigenschaft hat. Zu diesem Zweck führen wir eine Variablentransformation mit Hilfe von

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

durch. Diese Variablentransformation ist umkehrbar, da die Vandermonde-Matrix wegen $D(f(t)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$ invertierbar ist. Bezeichne $P'(y_1, \ldots, y_n)$ das Polynom, welches durch Einsetzen der Ausdrücke für die x_i in $P(x_1, \ldots, x_n)$ entsteht. Es gilt $P'(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$.
Nun ist $P'(y_1, \ldots, y_n) \in K[y_1, \ldots, y_{n-1}][y_n]$ ein Polynom in y_n vom Grad kleiner d. Da U eine d-elementige Menge ist, können wir $u_n \in U$ so wählen, daß $P'(y_1, \ldots, y_{n-1}, u_n) \neq 0$ gilt. Dies ist möglich, da ein von Null verschiedenes Polynom nur Grad-viele Nullstellen besitzen kann. Sukzessive erhalten wir somit $u_1, \ldots, u_n \in U$ mit $P'(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$. Das Polynom $h = u_1 + u_2 t^1 + \ldots + u_n t^{n-1}$ liegt in H_n. Ferner haben sowohl ${}^h f$ als auch $R_{(G,H,F(h(\alpha_1),\ldots,h(\alpha_n))}$ paarweise verschiedene Nullstellen. □

Bemerkung 3.4.3

(i) *Im Fall $K = \mathbb{Q}$ sieht man sofort, daß es möglich ist, die Menge U als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ zu wählen.*

(ii) *Aus dem Beweis kann man obere Schranken für die maximale Anzahl verschiedener Tschirnhausentransformationen, die zur Erreichung von Separabilität erforderlich sind, ableiten. Diese Schranken sind allerdings – zumindest für den Fall $K = \mathbb{Q}$ – meist wesentlich zu groß und damit nicht von praktischem Nutzen.*

(iii) *Für die Praxis ist die folgende Sichtweise von Interesse: Führt man zufällige Tschirnhausentransformationen durch, d.h. wählt man $h \in H_n$ zufällig aus, so kann man durch die Verwendung eines hinreichend großen U die Wahrscheinlichkeit, nach der Transformation Separabilität zu erreichen, beliebig hoch machen.*

3.5 Präzision

Wir haben gesehen, daß zur Bildung des Resolventenpolynoms

$$R_{(G,H,F)}(y) = \prod_{\sigma \in G//H} (y - \sigma F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \tag{3.4}$$

ein G-relatives H-invariantes Polynom und eine Menge von Nebenklassenrepräsentanten von G in H benötigt wird. Setzen wir (komplexe) approximierte Wurzeln $\tilde{\alpha}_i$, $(1 \leq i \leq n)$, des Ausgangspolynoms $f(t)$ in das G-relative H-invariante Polynom ein, so erhält man durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren (bzw. durch Anwenden der Newtonschen Relationen) eine explizite Darstellung der Resolvente.

Im absoluten Fall, d.h. $G = S_n$, hat man an dieser Stelle noch eine andere Alternative. Da die Koeffizienten von $R_{(G,H,F)}$ symmetrische Funktionen über $\mathbb{Q}$ in den $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind, gilt nach dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen: die Koeffizienten der Resolvente können als Polynome der Koeffizienten des Ausgangspolynoms über $\mathbb{Q}$ dargestellt werden. Zum Beispiel erhält man für $G = S_4$ und $H = D(4)$ eine Resolvente der Gestalt

$$R_{(S_4,D(4))}(y) = y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_4)y + 4a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_3^2,$$

wobei die a_i $(1 \leq i \leq 3)$ die Koeffizienten unseres Ausgangspolynoms sind. Man kann zeigen, daß die Diskriminante von $R_{(S_4,D(4))}$ gleich der von f ist. Darüberhinaus hat sie keine doppelten Nullstellen, wenn das Polynom f keine doppelten Nullstellen hat.

Wenden wir uns nun der Bestimmung ganzrationaler Nullstellen der Resolvente zu. Wie wir gesehen haben, hat das Resolventenpolynom bei jedem Abstieg im Graphen ganzrationale Koeffizienten. Dies gestattet es uns, $R_{(G,H,F)}$ mit reeller Arithmetik bei genügend hoher Präzision exakt zu berechnen. Die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unseres Ausgangspolynoms f können wir mit beliebig vorgegebener Genauigkeit bestimmen. Sie müssen mindestens mit solcher Präzision berechnet werden, daß die Koeffizienten der expliziten Darstellung des Resolventenpolynoms, d.h. (3.4) ausmultipliziert, einen Fehler vom Betrag kleiner als $\frac{1}{2}$ aufweisen. Dies reicht zur genauen Bestimmung der Koeffizienten aus, da sie sich a priori in $\mathbb{Z}$ befinden. Die G-relativen H-invarianten Polynome können wir mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ wählen. Haben wir eine approximierte Wurzel $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des Resolventenpolynoms gefunden, von der wir annehmen, daß es sich um eine ganzrationale Wurzel handelt, so bestimmen wir die nächstgelegene ganze Zahl und überprüfen durch Einsetzen in die Resolvente, ob es sich um eine Nullstelle aus $\mathbb{Z}$ handelt. Theoretisch hätten wir damit das Problem der Bestimmung ganzer Nullstellen, wie es auch von Stauduhar für Grade ≤ 7 vorgesehen war, abgehandelt. Dieses Verfahren ist sehr simpel und erweist sich in der Praxis für kleine Grade als sehr schnell.

Für größere Grade, z.B. den Abstieg von S_{11} nach $11T_4$, ergeben sich aber Resolventenpolynome mit sehr hohen Graden. In diesem Beispiel wäre der Grad 362880. Da wir eigentlich nur an den Wurzeln des Resolventenpolynoms interessiert sind, stellt sich die Frage, ob generell die explizite Berechnung des Resolventenpolynoms überhaupt notwendig ist. Rechnet man mit Approximationen von (über $\mathbb{Z}$) ganzalgebraischen Zahlen (unabhängig, ob mit reellen oder p-adischen Approximationen), so treten grundsätzlich zwei Schwierigkeiten auf:

(1.) Zu entscheiden, *ob* es sich um eine *nicht* ganzrationale Wurzel handelt.

(2.) Zu entscheiden, *ob* es sich um eine ganzrationale Wurzel handelt.

Beschäftigen wir uns näher mit der ersten Fragestellung. Seien also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln des irreduziblen normierten Polynoms f. Mit $\tilde{\alpha}_i$, $(1 \leq i \leq n)$, wollen wir die komplexen approximierten Wurzeln bezeichnen. Die $\tilde{\alpha}_i$ sind fehlerbehaftet und schon allein deshalb können wir die Wurzeln des Resolventenpolynoms $F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, die wir mit F_i, $(1 \leq i \leq m)$, abkürzen wollen, auch nur fehlerbehaftet berechnen. Eine weitere Ungenauigkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß reelle Arithmetiken üblicherweise mit einer festen Anzahl von Nachkommastellen arbeiten. Nach jeder Multiplikation zweier komplexer Zahlen kann es passieren, daß Nachkommastellen abgeschnitten werden.

G-relative H-invariante Polynome F_i sind von der Form

$$F_i(x_1, \ldots, , x_n) = \sum_{j=1}^{M} x_1^{e(i,j,1)} x_2^{e(i,j,2)} \cdot \ldots \cdot x_n^{e(i,j,n)},$$

wobei M die Bahnlänge des Monoms $x_1^{e(i,j,1)} x_2^{e(i,j,2)} \cdot \ldots \cdot x_n^{e(i,j,n)}$ unter der Gruppe H ist und $e(i,j,1), \ldots, e(i,j,n) \in \mathbb{N}_0$ sind. Aufgrund der Stetigkeit der Polynome F_i, $(1 \leq i \leq m)$, kann man bei genügend großer Präzision den Abweichungsfehler beliebig klein halten. Wir möchten nun eine Fehlerabschätzung für die Wurzeln F_i angeben: Mit $d := \sum_{k=1}^{n} e(i,j,k)$ sei der Grad des Monoms $x_1^{e(i,j,1)} x_2^{e(i,j,2)} \cdot \ldots \cdot x_n^{e(i,j,n)}$ bezeichnet (der Grad ist unabhängig von i und j), und α_{max} sei das Maximum der Wurzelbeträge des gegebenen Polynoms $f(t)$. Seien $\delta > 0$ und $\delta_i = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i$ mit $|\delta_i| < \delta$, $(1 \leq i \leq n)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&|F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - F_i(\alpha_1 + \delta_1, \ldots, \alpha_n + \delta_n)| = \\
&\quad |\sum_{j=1}^{M} \alpha_1^{e(i,j,1)} \alpha_2^{e(i,j,2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_n^{e(i,j,n)} - \\
&\quad \sum_{j=1}^{M} (\alpha_1 + \delta_1)^{e(i,j,1)} (\alpha_2 + \delta_2)^{e(i,j,2)} \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + \delta_n)^{e(i,j,n)}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \delta^k \alpha_{max}^{d-k} \leq M \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \delta^k \alpha_{max}^{d-k}.
\end{aligned}$$

Wir wollen annehmen, daß die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit einer Präzision berechnet worden sind, so daß für die approximierten Wurzeln $\widetilde{F}_i$ des Resolventenpolynoms

$|F_i - \widetilde{F_i}| \le \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, m$ und $\varepsilon > 0$ gilt. Bezeichne $\lfloor \widetilde{F_i} \rfloor$ eine zu $\widetilde{F_i}$ in der komplexen Zahlenebene nächstgelegene ganzrationale Zahl. Gilt nun $|\widetilde{F_i} - \lfloor \widetilde{F_i} \rfloor| > \varepsilon$, so ist F_i mit Sicherheit keine ganzrationale Zahl. Sobald der Fehlerkreis um eine approximierte Wurzel $\widetilde{F_i}$ keinen Punkt von $\mathbb{Z}$ enthält, haben wir also bewiesen, daß es sich um keine ganzrationale Zahl handeln kann. Den Beweis, daß $F_i \in \mathbb{Z}$ ist, können wir so nicht führen.

Für Punkt 2 haben wir nicht nur das Problem zu entscheiden, ob eine Wurzel ganzrational ist, sondern wir müssen uns auch überlegen, was zu tun ist, wenn sich mehrere Fehlerkreise von approximierten Wurzeln der Resolvente $\mathbb{Z}$ in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Hier ist der folgende Satz aus [9] von Nutzen:

Satz 3.5.1 *Sei F' eine ganze Zahl (von der man vermutet, daß sie eine s-fache Nullstelle des Resolventenpolynoms $R_{(G,H,F)}(t) = \prod_{i=1}^{m}(t - F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ ist). $K \subseteq \{1, \ldots, m\}$ sei die Indexmenge der Nullstellen von $R_{(G,H,F)}$ von denen man annimmt, daß $F_k = F'$ gilt, d.h. $|\,K\,| = s$. Weiterhin werde für alle $k \notin K$ mit λ_k eine Majorante von $|F' - F_k|$ bezeichnet, die ≥ 1 sein soll, und es gelte für alle $k \in K$:*

$$|F' - F_k| < \frac{(m-s+1)!}{2m! \prod\limits_{k \notin K} \lambda_k}$$

Dann ist F' mindestens eine s-fache Nullstelle der Resolvente.

Beweis: Dieser Satz beruht auf der Tatsache, daß eine ganze Zahl, die verschieden von Null ist, mindestens einen Absolutwert von 1 haben muß. Wir wählen nun ε so, daß für $k \in K$ gilt:

$$|F' - F_k| \le \varepsilon < \frac{(m-s+1)!}{2m! \prod\limits_{k \notin K} \lambda_k}.$$

Sei M die Menge der Indizes aller Nullstellen des Resolventenpolynoms, d.h. $M := \{1, \ldots, m\}$. Für die λ_k, $k \in \overline{K} := M \backslash K$ könnte man zum Beispiel $\lambda_k = max\{\,|F' - \widetilde{F}_k| + |\widetilde{F}_k - F_k|, 1\,\}$ verwenden, da $\lambda_k \ge 1$ sein soll. Sei $R(t) = \prod_{i=1}^{m}(t - F_i) \in \mathbb{Z}[t]$ die betrachtete Resolvente. Um zu zeigen, daß F' eine s-fache ganzzahlige Wurzel ist, genügt es, für alle $0 \le i \le s-1$ nachzuweisen, daß die i-te Ableitung von R an der Stelle F' Null ist. Da es sich um ganze Zahlen handelt, ist diese Bedingung äquivalent zu $|R^{(i)}(F')| < 1$. Für $k \in K$ seien $\widetilde{F}_k$ die approximierten Werte, die man bei der Berechnung von F_k bezüglich ε erhält. Es folgt

$$|F' - F_k| \le |F - \widetilde{F}_k| + |\widetilde{F}_k - F_k| \le 2\varepsilon.$$

Für $0 \le i \le s-1$ erhalten wir dann

$$|R^{(i)}(F')| \;=\; i!\ \Big|\sum_{\substack{T \subset M \\ |T|=i}} \prod_{k \in M \backslash T} (F' - F_k)\Big|$$

Für $T \subset M$ gilt

(i) $M\backslash T = M\backslash T \cap M = M\backslash T \cap (K \cup \overline{K}) = (M\backslash T \cap K) \cup (M\backslash T \cap \overline{K})$,

und die Ordnung von $M\backslash T \cap K$ können wir durch

(ii) $|K \cap M\backslash T| = |(K \cap M)\backslash(K \cap T)| = |K| - |K \cap T| \geq |K| - |T| = s - i$

nach unten abschätzen. Es folgt für $0 \leq i \leq s-1$

$$\begin{aligned} |R^{(i)}(F')| &\overset{(i)}{=} i! \ \Big| \sum_{\substack{T\subset M\\ |T|=i}} \prod_{k\in M\backslash T\cap K} (F'-F_k) \prod_{k\in M\backslash T\cap \overline{K}} (F'-F_k) \Big| \\ &\leq i! \sum_{\substack{T\subset M\\ |T|=i}} \prod_{k\in M\backslash T\cap K} |F'-F_k| \prod_{k\in M\backslash T\cap \overline{K}} |F'-F_k| \\ &\leq i! \sum_{\substack{T\subset M\\ |T|=i}} (2\varepsilon)^{|M\backslash T\cap K|} \prod_{k\in M\backslash T\cap \overline{K}} \lambda_k \end{aligned}$$

Da $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist, erhalten wir mit (ii) $(2\varepsilon)^{|M\backslash T\cap K|} \leq (2\varepsilon)^{s-i}$, und da $\lambda_k \geq 1$, haben wir $\prod_{k\in M\backslash T\cap \overline{K}} \lambda_k \leq \prod_{k\in\overline{K}} \lambda_k$. Es sei noch bemerkt, daß es genau $\frac{m!}{i!(m-i)!}$ verschiedene i-elementige Teilmengen von M gibt. Zusammenfassend folgt dann sofort für die (i)-te Ableitung der Resolvente

$$\begin{aligned} |R^{(i)}(F')| &\leq i! \sum_{\substack{T\subset M\\ |T|=i}} (2\varepsilon)^{s-i} \prod_{k\in\overline{K}} \lambda_k \\ &\leq i! \ (2\varepsilon)^{s-i} \frac{m!}{i!(m-i)!} \prod_{k\in\overline{K}} \lambda_k \\ &\leq (2\varepsilon) \ \frac{m!}{(m-s+1)!} \prod_{k\in\overline{K}} \lambda_k \\ &< 1 \end{aligned}$$

Damit wäre gezeigt, daß mit Hilfe der gemachten Annahmen F' eine s-fache Wurzel aus $\mathbb{Z}$ ist. □

Hat man für alle Wurzeln $F_1, \ldots, F_m$ eine gemeinsame obere Schranke S, die größer als 1 ist, so reicht es auch, $\varepsilon < \frac{(m-s+1)!}{2^{m-s+1}\, m!\, S^{m-s}}$ zu wählen, um eine Wurzel der Ordnung s der Resolvente nachzuweisen.

Die prinzipielle Vorgehensweise zur Lösung der Punkte 1 und 2 besteht nun darin, mit geeignet hohen Präzisionen (an die man sich z.B. sukzessive herantasten kann) Wurzeln des Resolventenpolynoms, die nicht ganzrational sind, und (mehrfache) Wurzeln, die ganzrational sind, als solche mit Hilfe der eben gemachten Betrachtungen zu erkennen. Bei Verdacht einer mehrfachen Nullstelle in $\mathbb{Z}$ wird man vermutlich besser frühzeitig eine Tschirnhausentransformation durchführen, als mit Erhöhung der Präzision zu beweisen, daß sie tatsächlich mehrfach ist. Leider können wir zu diesen Punkten keine Praxiserfahrung angeben, vermuten aber, daß teilweise sehr hohe Präzisionen für die Nachweise $\in \mathbb{Z}$ erforderlich sein werden – mit entsprechender Wirkung auf die Laufzeit. Wir erinnern auch noch einmal an das zusätzliche Problem, das sich aus der „Nichtexaktheit“ reeller Arithmetiken ergibt.

3.6 Zusammenfassung

Wir wollen die für das Verfahren benötigten Daten zusammenstellen, und in dem folgenden Algorithmus den Ablauf einer Galoisgruppenberechnung in einer Übersicht angeben. Dabei werden die bisher behandelten Methoden eingeordnet.

Gegeben ist eine Liste $\mathfrak{L}$ der Vertreter der S_n-Konjugationsklassen transitiver Gruppen. Folgende Aufgaben müssen für jedes $G \in \mathfrak{L}$ bewältigt werden können:

- Finde alle $T \in \mathfrak{L}$, für die eine Permutation $\rho \in S_n$ existiert, so daß $\rho T \rho^{-1}$ maximal in G ist. $\Rightarrow \mathfrak{L}_G = \{(T_1, \rho_1), \ldots, (T_k, \rho_k)\}$.
- Für jedes $T_i \in \mathfrak{L}_G$ sei $H_i := \rho_i T_i \rho_i^{-1} \leq G$. Dann ist
$$\mathfrak{C}(G, H_i) := \{\sigma H_i \sigma^{-1} \,|\, \sigma \in S_n \textit{ mit } \sigma H_i \sigma^{-1} \leq G\}$$
die Menge der Untergruppen von G vom transitiven Gruppentyp wie H_i.
- $N_{S_n}(G)$ operiert durch Konjugation auf $\mathfrak{C}(G, H_i)$. Berechne für jede Bahn $B_{i,j}$ ein G-relatives H_i-invariantes Polynom $F_{i,j}$. Da es für $n \leq 12$ immer nur eine Bahn gibt, ist $j = 1$, und wir können auf die Doppelindizes verzichten, d.h. es muß ein F_i berechnet werden.
- Berechne Nebenklassenrepräsentanten $\tau_i \in G//H_i$, und $\sigma_j \in N_{S_N}(G)//G$. Die Permutationen $\sigma_j \tau_i$ bilden ein vollständiges Repräsentantensystem von $N_{S_n}(G)//H_i$.

Kommen wir nun zu einer Übersicht des Verfahrens. Die gewählten Bezeichnungen der Daten werden, wenn nicht anders vermerkt, beibehalten:

Algorithmus 3.6.1 *(Galoisgruppenberechnung)*

Eingabe: *Ein normiertes irreduzibles Polynom f vom Grad n mit ganzrationalen Koeffizienten.*

Ausgabe: *Die Galoisgruppe von f, gegebenenfalls auch die zugehörige Wurzelanordnung*

1. *(Grad von f?) Ist $n = 2$, so $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leftarrow S_2$. Terminiere.*
2. *(Diskriminante?) Ist $D(f(t))$ Quadrat eines Elementes in $\mathbb{Z}$, so setze $G \leftarrow A_n$. Sonst $G \leftarrow S_n$. Ist $n = 3$, so setze $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leftarrow G$ und terminiere.*

3. *(Wurzelberechnung) Berechne Wurzeln* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *von* f.

4. *(Schleife über maximale transitive Untergruppen) Setze* $\mathfrak{L}_G \leftarrow \{(T_1, \rho_1), \ldots, (T_k, \rho_k)\}$. *Wenn* $\mathfrak{L}_G = \emptyset$, *gehe zu Schritt 10. Für* $T_i \in \mathfrak{L}_G$ *mache:*

5. *(Einlesen der Daten) Setze* $H_i \leftarrow \rho_i T_i \rho_i^{-1} \leq G$. *Setze* $M \leftarrow G//H_i$ *und* $K \leftarrow N_{S_n}(G)//G$. *Schließlich* $F_i \leftarrow G$*-relatives* H_i*-invariantes Polynom.*

6. *(Schleife über K) Für alle* σ *in* K *mache:*

7. *(Nullstellen des Resolventenpolynoms) Berechne mit* $\sigma\tau F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *für alle* $\tau \in M$ *die Nullstellen des Resolventenpolynoms.*

8. *(Einfache, mehrfache oder keine Nullstellen in* $\mathbb{Z}$*?) Gibt es eine einfache Nullstelle in* $\mathbb{Z}$ *und sind* σ, τ *die zugehörigen Permutationen, so setze* $\alpha_j \leftarrow \alpha_{\sigma\tau\rho_i(j)}$ *für* $1 \leq j \leq n$, $G \leftarrow T_i$ *und gehe zu Schritt 4. Gibt es keine Nullstelle in* $\mathbb{Z}$, *so gehe zu Schritt 9. Führe eine zufällige Tschirnhausentransformation durch und gehe zu Schritt 7.*

9. *(Nächstes* σ*?) Wenn noch nicht alle* $\sigma \in K$ *getestet wurden, wiederhole ab Schritt 6.*

10. *(Nächstes* T_i*?) Gibt es noch nicht getestete maximale transitive Gruppen in* $\mathfrak{L}_G$, *so wiederhole ab Schritt 4. Sonst setze* $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leftarrow G$. *Terminiere mit Ausgabe von* $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ *und der aktuellen Wurzelanordnung.*

Dieser Algorithmus beschränkt sich auf die Berechnung der Galoisgruppe von irreduziblen normierten Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten. Jedes Polynom $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ läßt sich durch die Substitution $f^\star(t) := \frac{b^n}{a_n} f(\frac{t}{b})$ in ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten transformieren, wobei b, das kleinste gemeinsame Vielfache, der Nenner ist. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f, so sind $b\alpha_1, \ldots, b\alpha_n$ die Nullstellen von $f^\star$. Unter Beibehaltung der Wurzelanordnung haben wir dann $G(f, \mathbb{Q}) = G(f^\star, Q)$. Die Einschränkung auf irreduzible Polynome ist jedoch wesentlich: Angenommen $f(t)$ zerfalle über $\mathbb{Q}$ in $f_1(t) f_2(t)$. Seien L_1 und L_2 die zugehörigen Zerfällungskörper der separablen Polynome f_1 und f_2. Offensichtlich ist $L_1 L_2$ der Zerfällungskörper von $f = kgV(f_1, f_2)$ über $\mathbb{Q}$, also ist $L_1 L_2/\mathbb{Q}$ galoissch. Der Fall $L_1 \cap L_2 = \mathbb{Q}$ ist problemlos, da die Galoisgruppe $G(L_1 L_2/\mathbb{Q})$ gleich dem direkten Produkt von $G(L_1/\mathbb{Q})$ und $G(L_2/\mathbb{Q})$ ist. Dies sieht man leicht, da die Abbildung $\phi : G(L_1 L_2/\mathbb{Q}) \longmapsto G(L_1) \times G(L_2)$ mit $\phi(\sigma) = (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2})$ ein Monomorphismus ist und für die Ordnung von $|G(L_1 L_2/\mathbb{Q})|$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} |G(L_1 L_2/\mathbb{Q})| &= |G(L_1/\mathbb{Q})||G(L_1 L_2/L_1)| &&= |G(L_1/\mathbb{Q})||G(L_2/L_1 \cap L_2)| \\ &= |G(L_1/\mathbb{Q})||G(L_2/\mathbb{Q})| &&= |G(L_1/\mathbb{Q}) \times G(L_2/\mathbb{Q})| \end{aligned}$$

gilt. Ist $L_1 \cap L_2 \supset \mathbb{Q}$, dann kann die Galoisgruppe von f nicht so einfach aus den Galoisgruppen von f_1 und f_2 bestimmt werden. Man muß die Relationen zwischen den Wurzeln von f_1 und f_2 kennen, um nähere Aussagen treffen zu können. Es wird somit klar, daß es unkomplizierter ist sich auf irreduzible Polynome zu beschränken.

Kapitel 4

Berechnung der Daten

In diesem Kapitel wollen wir nähere Informationen zur Berechnung der erforderlichen Daten angeben. In Kapitel 3 haben wir gesehen, daß für das Verfahren von Stauduhar verschiedene Dinge im voraus bekannt sein müssen. Für Grad $n \leq 7$ findet man die zur Berechnung nötigen Teile der Untergruppengitter der S_n, G-relative H-invariante Polynome und Nebenklassenrepräsentanten in [34]. Der Unterschied zu den von uns berechneten Daten ergibt sich aus der Behandlung der geraden Gruppen. Stauduhar gibt zum Beispiel generell keine G-relativen H-invarianten Polynome für $G = A_n$ an. Er stellt maximale gerade Gruppen H durch Schnitte von maximalen ungeraden Gruppen $H^\star \leq S_n$ mit A_n dar, d.h. $H = H^\star \cap A_n$. Ist bekannt, daß $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq H^\star$, so kann mit Hilfe der Diskriminante $D(f(t))$ entschieden werden, ob $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq H$ gilt. Für die Anzahl der zu testenden Inklusionen bedeutet dies im Vergleich zur Unterteilung in gerade bzw. ungerade imprimitive oder primitive Gruppen für $n \leq 7$ keinen Unterschied. Alle Daten zu den Graden $8 \leq n \leq 11$ lassen sich in [10] nachlesen (bis auf die Nebenklassenrepräsentanten, deren Berechnung aber keine Schwierigkeiten bereitet). Im Unterschied zu den von uns berechneten Daten wurden dort für die transitiven Gruppen die Erzeuger aus [3] verwendet. Für Grad 12 haben wir mit Hilfe von [31] als erste einen kompletten Datensatz für das Verfahren von Stauduhar berechnet und implementiert. Die besondere Schwierigkeit für diesen Grad liegt zum einen an der großen Zahl der transitiven Untergruppen der S_{12} (es gibt genau 301 transitive Gruppen, für 752 Gruppenpaare mußten Daten berechnet werden) als auch an der wachsenden Ordnung der zu betrachtenden Gruppen.

4.1 Berechnung G-relativer H-invarianter Polynome

In Satz 3.2.1 wurde schon zu jedem Gruppenpaar ein G-relatives H-invariantes Polynom angegeben. Unser Anliegen ist es, möglichst „minimale“ invariante Polynome zu berechnen. Unter einem minimalen invarianten Polynom verstehen wir ein invariantes Polynom kleinsten Grades, welches unter allen invarianten Polynomen kleinsten Grades eine minimale Anzahl von Monomen besitzt. Bei Verwendung des G-relativen H-invarianten Polynoms F aus Satz 3.2.1 sind nach Bemerkung 3.2.2 für $n \geq 2$ immer $|\, H\,|(\sum_{i=2}^{n} i)$ viele Multiplikationen nötig. Bei allen betrachteten Inklusionen ist es uns gelungen, bessere G-relative H-invariante Polynome zu finden, d.h. Polynome, deren Anzahl von Multiplikationen geringer ist.

In [13], S. 785 beschreibt K. Girstmair einen sehr gruppentheoretischen Algorithmus zur Berechnung minimaler invarianter Polynome im absoluten Fall ($G = S_n$). Damit läßt sich auch leicht der relative Fall bewältigen, wenn man maximale Untergruppen $H^\star$ von S_n betrachtet mit der Eigenschaft $H^\star \cap G = H$, da $Stab_G(F) = Stab_{S_n}(F) \cap G$. Diese Methode wurde von Olivier und Eichenlaub benutzt. Wir verwenden an dieser Stelle einen eigenen, einfacheren, aber ebenso effektiven Algorithmus, der auf der folgenden Beobachtung beruht:

Satz 4.1.1 *Sei H eine maximale transitive Untergruppe der Permutationsgruppe G und $m = x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n}$, $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{N}_0$ ein Monom, für das $|\, Orb_H(m)\,| \neq |\, Orb_G(m)\,|$. Dann ist*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in H} \sigma(x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n})$$

ein G-relatives H-invariantes Polynom.

Beweis: Da die Bahnlängen von $x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n}$ unter H und G verschieden sind, existiert eine Permutation $\tau \in G$, für die $\tau(x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n}) \notin Orb_H(x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n})$ ist. Damit folgt, $Stab_G(F) \neq G$. Alle Permutationen aus H lassen das Polynom F invariant, und es gilt somit $H \leq Stab_G(F) \neq G$. Aufgrund der Maximalität von H folgt $H = Stab_G(F)$. □

G-relative H-invariante Polynome ergeben sich hier also als Bahnsummen von geeigneten Monomen. Wir können nun folgenden Algorithmus angeben:

Algorithmus 4.1.2 *(Monomberechnung)*

Eingabe: *Eine Permutationsgruppe $G \leq S_n$, $(n \geq 4)$ und eine maximale transitive Untergruppe H von G.*

Ausgabe: *Ein minimales Monom m vom Grad $d \leq \frac{n(n+1)}{2}$ mit der Eigenschaft $Stab_G(\sum_{\sigma \in H} \sigma(m)) = H$, und $|\, Orb_H(m)\,|$.*

1. *(Initialisierung) $d \leftarrow 2$, $cand \leftarrow \{\ \}$.*
2. *(Anzahl der Variablen) Setze $k \leftarrow d$.*
3. *(Monommenge berechnen) Bilde die Menge C aller möglichen Monome m vom Grad d aus k Variablen, $|\, C\,| = \binom{d-1}{k-1}\binom{n}{k}$.*

4. *(Schleife über C) Solange* $C \neq \emptyset$ *(sonst gehe zu Schritt* 8*):*
5. *(Bahnenberechnung) Nehme ein beliebiges Monom* $m \in C$*, und berechne* $Orb_G(m)$ *und* $Orb_H(m)$*.*
6. *(Monom gefunden?) Wenn* $|\, Orb_G(m) \,| \neq |\, Orb_H(m) \,|$*, so erweitere* $cand \leftarrow cand \cup \{(m, |\, Orb_H(m) \,|)\}$*. Setze* $C \leftarrow C \backslash Orb_H(m)$*.*
7. *(Nächstes Monom) Wiederhole ab Schritt* 4*.*
8. *(Nächstes k?) Wenn* $k \neq 2$*, dann setze* $k \leftarrow k - 1$ *und gehe zu Schritt* 3*. Sonst gehe zu Schritt* 9*.*
9. *(Terminiere?) Ist* $cand \neq \emptyset$*, so nehme einen Kandidaten m mit kleinster Orbitlänge und terminiere. Sonst setze* $d \leftarrow d + 1$ *und gehe zu Schritt* 2*.*

Nach Bemerkung 3.2.2 und dem Beweis zu Satz 3.2.1 hat das Monom $x_1 x_2^2 \ldots x_n^n$ für alle transitiven Gruppenpaare $H \leq G$ Orbitlänge $|\, Orb_H(m) \,| = |\, H \,|$ und Stabilisator $Stab_G(\sum_{\sigma \in H} \sigma(m)) = H$, und wir können als obere Schranke für den Grad d des Monoms $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ angeben. Außerdem ist klar, daß aufgrund der Transitivität der betrachteten Gruppen nur Grade $d \geq 2$ sinnvoll sind.

Diese Methode ist „straight forward“ und liefert die gesuchten Monome für die Grade 4–11 innerhalb sehr kurzer Zeit, da bis auf vier Ausnahmen alle Monomgrade kleiner n sind. Bei Grad $n = 12$ tauchen jedoch vermehrt Monome mit größeren Orbitlängen (> 500) und höheren Graden auf. Auch macht sich die wachsende Ordnung der Gruppen bemerkbar. In diesem Fall haben wir alle Monome mit Monomgrad $d < n$ mit Hilfe von Algorithmus 4.1.2 berechnet und somit nachgewiesen, daß sie tatsächlich minimal sind. Für die verbleibenden 17 Monome haben wir mit dem gleichen Algorithmus nachgewiesen, daß kein minimales Monom vom Grad $d < n$ existiert. Aufgrund zu hoher Laufzeit haben wir Algorithmus 4.1.2 für die Monome mit großen Graden ($d \geq n$) abgebrochen. Die Orbitlängenberechnung kostet in diesen Fällen extrem viel Zeit, was sich bei steigender Anzahl der Menge von möglichen Monomen zusätzlich nachteilhaft auswirkt. Für diese Fälle ist es sinnvoll, folgende randomisierte Variante zu wählen:

Algorithmus 4.1.3 *(Schnelle Monomtests)*

Eingabe: *Eine Permutationsgruppe* $G \leq S_n$, $(n \geq 4)$ *und eine maximale transitive Untergruppe H von G. Anzahl der Variablen k des Monoms, Grad d des Monoms, Anzahl maxtries der Versuche.*

Ausgabe: *Ein Monom m vom Grad* $d \leq \frac{n(n+1)}{2}$*, für das* $Stab_G(\sum_{\sigma \in H} \sigma(m)) = H$*, und* $|\, Orb_H(m) \,|$*. Sonst „falsch“.*

1. *(Initialisierung)* $i \leftarrow 1$, *cand* $\leftarrow \{\ \}$.
2. *(Schleife über i) Solange* $i \leq maxtries$ *(sonst gehe zu Schritt* 7*):*
3. *(Zufälliges Monom) Wähle ein zufälliges Monom* m *vom Grad* d *mit* k *Variablen.*
4. *(Stabilisator- und Orbitlängenberechnung) Berechne* $Stab_{S_n}(m)$, $Stab_G(m) = Stab_{S_n}(m) \cap G$ *und* $Stab_H(m) = Stab_G(m) \cap H$. *Dann ist* $|\,Orb_G(m)\,| = |\,G\,|/|\,Stab_G(m)\,|$ *und* $|\,Orb_H(m)\,| = |\,H\,|/|\,Stab_H(m)\,|$.
5. *(Monom gefunden?) Wenn* $|\,Orb_G(m)\,| \neq |\,Orb_H(m)\,|$, *so erweitere cand* $\leftarrow$ *cand* $\cup \{(m, |\,Orb_H(m)\,|)\}$.
6. *(Nächstes Monom)* $i \leftarrow i + 1$. *Wiederhole ab Schritt* 3.
7. *(Schlußfolgerung) Ist cand* $\neq \emptyset$, *so nehme einen Kandidaten* m *mit kleinster Orbitlänge. Sonst Ausgabe „falsch“. Terminiere.*

Die Schnelligkeit dieses Algorithmus beruht auf einer besonderen Stabilisatorberechnung und der Vermeidung der expliziten Berechnung der Orbits. Außerdem bedingen große Bahnenlängen kleine Ordnungen von Stabilisatoren, was sich auf die Berechnungen sehr günstig auswirkt. Mit Algorithmus 4.1.3 erhält man schnell einen Eindruck, in welchem Bereich sich der Grad eines möglichen minimalen Monoms befindet. Für die 17 übriggebliebenen Inklusionen aus Algorithmus 4.1.2 haben wir nach ersten Annäherungen des Monomgrades jeweils mehrere 1000 zufällige Testdurchläufe durchgeführt und somit invariante Monome gefunden. Die Eigenschaft minimal streichen wir dann für diese Inklusionen, obwohl die Wahrscheinlichkeit hier sehr groß ist, solche Monome gefunden zu haben, zumal Testdurchläufe mit Algorithmus 4.1.3 für bereits bekannte minimale Monome diese innerhalb kürzester Zeit gefunden haben. Für unser Programm ist dies letztendlich nicht von Bedeutung, da es sich im nächsten Kapitel zeigen wird, daß man für alle 17 Inklusionen (und noch einige weitere) G-relative H-invariante Polynome konstruieren kann, die deutlich weniger Multiplikationen benötigen (die Anzahl der Multiplikationen ist die ausschlaggebende Größe für das Laufzeitverhalten), als dies für die gefundenen G-relativen H-invarianten Polynome der Fall ist. Alle mit den Methoden dieses Abschnitts berechneten Monome mit zughörigen Orbitlängen findet man im Anhang II.

4.2 Maximale Konjugationsklassen

Spricht man im folgenden von der Kenntnis oder Klassifikation der transitiven Permutationsgruppen eines bestimmten Grades, so sind damit Mengen gemeint, die für jede S_n-Konjugationsklasse einer transitiven Gruppe einen Vertreter enthalten. Durch Angabe von Erzeugern werden die Vertreter eindeutig bestimmt.

Die uns bekannten Computeralgebrasysteme GAP [31] und MAGMA [21] haben eine unterschiedliche Wahl für die Vertreter der S_n-Konjugationsklassen getroffen. Wenn wir von „den transitiven Gruppen“sprechen, so sind also immer entsprechende Vertreter gemeint. Ist es wichtig zu wissen, welcher Vertreter im einzelnen verwendet wurde, so werden wir dies an entsprechender Stelle explizit vermerken. Die Notation der Gruppen setzt sich aus einem T, welches für „transitiv“ steht, und einer Nummer zusammen, die man für den jeweiligen Grad [6] entnimmt. Falls es sich um eine gerade Gruppe handelt, wird dies mit einem „+“-Exponenten vermerkt, z. B. T_{36}^{+}. Geht aus dem Kontext der Grad der Permutationsgruppe nicht hervor, so wird er vor der Gruppe notiert. $12T_{36}^{+}$ ist zum Beispiel die 36. Permutationsgruppe vom Grad 12. Bei den verwendeten Namen beziehen wir uns ebenfalls auf [6].

Um bei Kenntnis aller transitiven Gruppen eines entsprechenden Grades überhaupt mit der Berechnung von G-relativen H-invarianten Polynomen oder Nebenklassenrepräsentanten anfangen zu können, muß der Gitterverband der transitiven Untergruppen bekannt sein. Die Berechnungen des Untergruppengitters sollen nicht nur Informationen darüber geben, ob eine Gruppe in einer anderen enthalten ist, sondern uns auch darüber Informationen liefern, wieviele G-Konjugationsklassen durch maximale transitive Untergruppen (eines festen T-Typs) geliefert werden. Hat man Repräsentanten für jede Konjugationsklasse einer maximalen Untergruppe gefunden, so ist man fertig. Wir haben für die Grade $4 \leq n \leq 12$ für alle transitiven Gruppen maximale Konjugationsklassen mit Hilfe des Computeralgebrasystems GAP [31] berechnet. Dabei haben wir die dortige Darstellung der transitiven Gruppen verwendet, d.h. es werden die Erzeuger der transitiven Gruppen, wie man sie auch in [6] findet, benutzt. Für die Grade $8 \leq n \leq 11$ hat Olivier die gleichen Berechnungen mittels eines selbstgeschriebenen C-Programms bezüglich der Erzeuger der Gruppen in [3] realisiert. Die berechneten Daten findet man in [10]. Die Berechnungen der Konjugationsklassen für die Grade $4-11$ dauern nur einige wenige Tage und stellen deshalb keinen großen Arbeitsaufwand dar. Für Grad 12 ist uns nicht bekannt, daß der Untergruppengitterverband der transitiven Gruppen berechnet worden ist. Deshalb haben wir diese mehrwöchigen Berechnungen, auf manchmal bis zu 15 Rechnern gleichzeitig, selbst ausgeführt. Wir wollen nun ein paar Anmerkungen zu den Berechnungen für Grad 12 geben, die teilweise natürlich auch für die anderen Grade gelten:

Zu einigen wenigen Gruppen kann man maximale Konjugationsklassen durch entsprechende Literaturrechere erhalten. In [18] findet man zum Beispiel die Klassifikation der maximalen Untergruppen der endlichen symmetrischen Gruppen und alternierenden Gruppen. Die für $n \leq 12$ relevante Hauptaussage ist die folgende:

Satz 4.2.1 *Die maximalen Untergruppen G der Gruppen S_n lassen sich im wesentlichen in drei Klassen aufteilen. Sie sind entweder*

(i) *intransitiv: G ist der Mengenstabilisator einer Menge der Länge m mit $1 \leq m < n/2$ und somit isomorph zu $S_m \times S_{n-m}$.*

(ii) *imprimitiv: G ist der Stabilisator einer Partition der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in m gleiche Teile der Länge k mit $1 < m < n$ und somit isomorph zum Kranzprodukt $S_k \wr S_m$.*

(iii) *primitiv: $G = A_n$ oder eine echte primitive Untergruppe der S_n.*

Für $n = 12$ findet man zum Beispiel als maximale imprimitive Gruppen die Kranzprodukte $T_{299} = S_6 \wr S_2$, $T_{294} = S_4 \wr S_3$, $T_{293} = S_2 \wr S_6$ und $T_{289} = S_3 \wr S_4$. Es ist klar, daß für $G = S_n$ zu einer maximalen Untergruppe H nur eine Konjugationsklasse existiert. Die maximalen imprimitiven Untergruppen der A_n erhält man durch Schnitte mit den maximalen imprimitiven Gruppen der S_n, also durch Schnitte mit entsprechenden Kranzprodukten. Im Fall $n = 12$ erhalten wir somit $T^+_{297} = T_{299} \cap A_{12}$, $T^+_{290} = T_{294} \cap A_{12}$, $T^+_{285} = T_{293} \cap A_{12}$ und $T^+_{282} = T_{289} \cap A_{12}$. Die primitiven Gruppen sind im „ATLAS of finite groups“ [5] klassifiziert, und wir finden $PGL(2, 11)$ als maximale ungerade primitive Gruppe von S_{12} und $M(12)$ als maximale Untergruppe von A_{12}. Mit Hilfe des Korollars 3.3.5 können wir durch Nachschlagen in [6] die Normalisatoren $N_{S_{12}}(G)$ der maximalen Untergruppen von A_{12} ermitteln. Bis auf den Fall $G = M(12)$ gilt immer $N_{S_{12}}(G) \neq G$. Für $G = M(12)$ gibt es also in A_{12} zwei Klassen maximaler Untergruppen, die isomorph zu $M(12)$ sind. Wenn wir die Gruppe $M(12)$ mit einem Element aus S_{12} konjugieren, welches nicht in A_{12} liegt, zum Beispiel mit $(1, 2)$, so müssen wir die andere Klasse treffen (siehe Beweis zu Korollar 3.3.5). Somit müssen wir nun für alle Gruppen außer S_n, A_n und den restlichen primitiven Gruppen Repräsentanten der Konjugationsklassen aller maximalen Untergruppen finden. 265 der transitiven Gruppen sind im Fall $n = 12$ auflösbar, d.h. es gibt eine Kompositionsreihe mit Faktoren, die zyklisch von Primzahlordnung sind. Für auflösbare Gruppen ist es möglich, spezielle Darstellungen (sogenannte SpecialAgGroups) zu wählen, so daß man eine besonders „schöne“ Kompositionreihe erhält, die eine verhältnismäßig schnelle Bestimmung maximaler Konjugationsklassen zuläßt. Übrig bleiben 36 nicht auflösbare Gruppen. 8 von ihnen sind Kranzprodukte. A. Hulpke führt in seiner Dissertation [14] eine Reihe von Lemmata an, wie man die Klassen transitiver Untergruppen von Kranzprodukten und großen Normalteilern von Kranzprodukten bestimmen kann, sofern man eine Liste aller transitiven Gruppen des betreffenden Grades kennt. Außerdem hat er entsprechende Routinen zur Berechnung geschrieben. Ihm verdanken wir die Berechnung der maximalen Konjugationsklassen der Gruppen $T_{299}, T_{298}, T^+_{297}, T^+_{296}, T_{293}, T_{287}, T_{286}, T^+_{285}$ und T^+_{277}. Die restlichen Gruppen haben Ordnung kleiner 10000. Ihre maximalen Konjugationsklassen werden über den Untergruppenverband bestimmt, was leider sehr langsam ist. Gibt es mehrere maximale Konjugationsklassen, die in der minimalen Obergruppe nicht zueinander konjugiert sind, so muß noch eine Permutation σ bestimmt werden, die die Permutationsgruppe in der Liste [6] durch

Konjugation auf einen Repräsentanten der entsprechenden Klasse abbildet (siehe auch Bemerkung 3.3.4). Wir haben die Repräsentanten der maximalen Konjugationsklassen nach ihrer Parität sortiert und führen zu den geraden (ungeraden) transitiven Gruppen nur Repräsentanten gerade (ungerader) maximaler Konjugationsklassen auf, da nur diese für den Programmablauf benötigt werden (siehe auch Bemerkung 3.3.7 (*ii*)). Die Graphen zu den Graden $4 \leq n \leq 12$ findet man im Anhang I; die Permutationen σ, mit denen wir die transitiven Gruppen der Liste [6] konjugieren müssen, befinden sich im Anhang II. Somit verbleibt für einen vollständigen Datensatz nun nur noch die Berechnung der Nebenklassenrepräsentanten, die aber schnell vonstatten geht und keine Probleme bereitet.

Kapitel 5

Verbesserungen des Verfahrens

In diesem Kapitel wollen wir drei Methoden beschreiben, mit Hilfe derer die benötigte Rechenzeit wesentlich verkürzt werden kann. Schwierigkeiten bereiten im allgemeinen große Abstiege im Untergruppengitter, d.h. die Ordnung der maximalen Untergruppe H von G ist klein im Vergleich zur Ordnung der Gruppe G, sehr viele Untergruppentests sind durchzuführen. Dies ist zum Beispiel für $G = S_n$ bzw. $G = A_n$ oft der Fall. Ein weiteres Problem stellen die bisher angegebenen G-relativen H-invarianten Polynome mit großen Monomsummen dar. Hier sind viele Multiplikationen nötig, die sich erstens nicht gut auf die Präzision auswirken und zweitens einen enormen Zeitaufwand darstellen. Lösungsansätze für diese Probleme liegen nun darin, die Anzahl der möglichen Galoisgruppen oder der durchzuführenden Untergruppentests einzuschränken und nach günstigeren G-relativen H-invarianten Polynomen zu suchen.

5.1 Das van der Waerden-Kriterium

In diesem Abschnitt wollen wir zur Vereinfachung des Verfahrens eine Folgerung des van der Waerden-Kriteriums vorstellen. Es werden Kongruenzfaktorisierungen des irreduziblen normierten Polynoms $f \in \mathbb{Z}[t]$ modulo eines Primideals $p\mathbb{Z}[t]$ betrachtet. Durch diese Betrachtung die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ in den Griff zu bekommen, können wir zwar nicht hoffen (über endlichen Körpern können nur zyklische Galoisgruppen auftreten), doch wird man erwarten, gewisse Teilinformationen über $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ zu erlangen. Wir wollen zunächst das van der Waerden-Kriterium formulieren, welches man mit Beweis in [36], S. 198 findet.

Satz 5.1.1 *Seien R ein ZPE-Ring, $\bar{R} = R/\wp$ der Restklassenring für ein Primideal $\wp$ in R und K, $\bar{K}$ die zugehörigen Quotientenkörper. Weiterhin sei f ein normiertes Polynom aus $R[t]$, dessen homomorphes Bild wir mit $\bar{f} \in \bar{R}[t]$ bezeichnen. f und $\bar{f}$ seien beide doppelwurzelfrei. Dann ist bei passender Wurzelanordnung $\mathfrak{G}(\bar{f}, \bar{K})$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}(f, K)$.*

Der von Dedekind ausgesprochene Sachverhalt, den wir im Algorithmus verwenden, stellt eine Folgerung von Satz 5.1.1 dar:

Folgerung 5.1.2 *Sei f ein normiertes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und p eine Primzahl, für die das von f bestimmte Polynom $\bar{f}$ von $\mathbb{F}_p[t]$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt. Die Primfaktorzerlegung von $\bar{f}$ in $\mathbb{F}_p[t]$ laute*

$$\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{f}_r,$$

und dabei bezeichne jeweils n_i den Grad von $\bar{f}_i$. Aufgefaßt als Permutationsgruppe der Wurzeln von f enthält die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f,K)$ eine Permutation σ, deren Zykelzerlegung die Gestalt $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ mit Länge $\sigma_i = n_i$, $(1 \leq i \leq r)$ besitzt.

Faktorisiert man das Polynom f modulo verschiedener Primzahlen, die nicht die Diskriminante $D(f(t))$ teilen, so erhalten wir Informationen über mögliche Galoisgruppen. Dazu müssen die in einer transitiven Untergruppe der S_n auftretenden Zykeltypen bekannt sein. Bis Grad 11 findet man zum Beispiel in [3] Listen dieser Art. Für Grad 12 haben wir mit Hilfe von [31] eine solche Liste erstellt. Es werden einfach alle Elemente einer transitiven Gruppe erzeugt und entsprechend ihrer Zykeltypen gruppiert. Für die Gruppen A_n und S_n kann man sich die Berechnungen sparen, da hier alle möglichen Zykeltypen auftreten. Diese Listen dienen zur Ausschließung von Untergruppen, d.h. bei jeder Faktorisierung modulo p entfallen die Untergruppen, die kein Element mit entsprechendem Zykeltyp besitzen. Also ist eine Auflistung der Zykeltypen der S_n und A_n allein aus diesem Grund vollkommen überflüssig. Da zwei Elemente σ und τ genau dann in S_n konjugiert sind, wenn ihre Zykelzerlegungen vom gleichen Typ sind, folgt, daß bei Elimination der Gruppe H auch alle konjugierten Gruppen $\sigma H \sigma^{-1}$, $(\sigma \in S_n)$ entfallen. Folgerung 5.1.2 sagt uns, daß die Galoisgruppe eine der verbleibenden Gruppen ist, aber sie reicht nicht zur Bestimmung der Galoisgruppe aus bis auf die Fälle $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q}) = S_n$ oder $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q}) = A_n$. Für die anderen Fälle ist aber die Tatsache von Bedeutung, daß es zu jedem auftretenden Zykeltyp $(n_1, \ldots, n_r)$ einer Permutationsgruppe unendlich viele Primzahlen p gibt, so daß f in $\mathbb{F}_p[t]$ gerade in r Primpolynome der Gerade $n_1, \ldots, n_r$ zerfällt. Diese Primzahlen p tauchen mit der erwarteten Häufigkeit auf:

Satz 5.1.3 *Sei $(n_1, \ldots, n_r)$ ein Zykeltyp und K die Menge der Elemente von $\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q})$, die diesen Zykeltyp haben. Mit P sei die Menge der Primzahlen p bezeichnet, für die $f \equiv \prod_{i=1}^{r} \bar{f}_i \bmod p$, wobei der Grad von $f_i = n_i$ ist, $(1 \leq i \leq r)$. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|\{p \in x : p \in P\}|}{|\{p \leq x : p\, prim\}|} = \frac{|K|}{|\mathfrak{G}(f,\mathbb{Q})|}.$$

Beweis: siehe [35]. □

Satz 5.1.3 ist für die Berechnungen von keinem besonderen Nutzen. Interessanter wären explizite Fehlerabschätzungen oder obere Abschätzungen für die kleinste Primzahl $p \in P$. Alle diesbezüglichen Resultate sind leider in der Praxis nicht brauchbar (siehe zum Beispiel [19] oder [26]).
Zum besseren Verständnis von Folgerung 5.1.2 betrachte man das nächste Beispiel.

Beispiel 5.1.4 *Es sei* $f(t) = x^{12} - 12x^{11} + 36x^{10} + 6251x^6 - 37506x^5 + 9768751$. *Die Diskriminante hat die Primfaktorzerlegung* $D(f(t)) = 2^{12}3^{18}31^4 181^4 1741^4$, *ist also ein Quadrat eines Elementes in* $\mathbb{Z}$. *Somit kommen auch nur gerade transitive Permutationsgruppen in Frage. Wir bestimmen im folgenden die Faktorisierungen von* f *mod* $5, 7$. *Die Primzahlen* 2 *und* 3 *sind Diskriminantenteiler und entfallen aus diesem Grund.*

$$\text{(i)}\quad f(t) \equiv (t^2+2)(t^2+3t+3)(t^4+t^3+t^2+2t+4)(t^4+4t^3+t^2+4t+4) \; mod\; 5$$

$$\text{(ii)}\quad f(t) \equiv (t+4)(t^2+t+4)(t^4+3t^2+4t+5)(t^5+4t^4+5t^3+t^2+3t+2) \; mod\; 7$$

Nach der ersten Faktorisierung entfallen 37 *der* 133 *geraden transitiven Permutationsgruppen und mit Hilfe der zweiten Faktorisierung können wir weitere* 93 *Gruppen eliminieren. Es kommen also nur noch die Gruppen* T^+_{300}, T^+_{297} *und* T^+_{296} *in Frage. Ein vollständiger Programmdurchlauf liefert uns* T^+_{296} *als Galoisgruppe von* f. *Mit dieser Methode wurden* 7 *weitere Untergruppentests, d.h. Tests auf Inklusion bezüglich der folgenden Gruppen (oder deren Konjugierten):* T^+_{269}, T^+_{249}, T^+_{203}, T^+_{183}, T^+_{182}, T^+_{181}, T^+_{180}, *überflüssig.*

Da die bekannten Algorithmen zum Faktorisieren von Polynomen über endlichen Körpern sehr schnell sind, können innerhalb kürzester Zeit verschiedene Zykeltypen bestimmt werden. In der Praxis hat es sich als nützlich erwiesen, die Faktorisierung des Polynoms f modulo p für Primzahlen $p < 100$ durchzuführen. Testläufe bestätigen, daß in der Regel nach den ersten 25 Primzahlen eine sehr gute Annäherung „von unten“ im Untergruppengitter stattgefunden hat. Letzteres soll heißen, daß bisher in jeder von uns durchgeführten Galoisgruppenberechnung die Tests $H \le \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ entfielen, die Gruppen H also aufgrund fehlender Zykeltypen gestrichen werden konnten.

5.2 Konstruierte G-relative H-invariante Polynome

Wir geben hier einige Sätze an, mit deren Hilfe es möglich ist, spezielle G-relative H-invariante Polynome zu konstruieren. Diese sind für das Laufzeitverhalten unseres Programms wesentlich günstiger, als die mit den Algorithmen 4.1.2 und

4.1.3 berechneten Invarianten. Betrachte man zum Beispiel die maximale Untergruppe $T_{299} = S_6 \wr S_2$ von S_{12}, welche bezüglich der Vertreter für transitive Gruppen aus [6] das Blocksystem $\mathfrak{B} = \{\{1,3,5,7,9,11\},\{2,4,6,8,10,12\}\}$ besitzt. Die Berechnung des speziellen S_{12}-relativen T_{299}-invarianten Polynoms $(x_1+x_3+x_5+x_7+x_9+x_{11})(x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}+x_{12})$ ist schneller als die Berechnung des Polynoms $x_1x_3+x_1x_5+\ldots+x_1x_{11}+x_2x_4+x_2x_6+\ldots+x_2x_{12}+\ldots+x_{10}x_{12}$, welches wir mit Algorithmus 4.1.2 gefunden haben.

Die folgenden Sätze können [9] entnommen werden. Beginnen wir mit einem Ergebnis über Kranzprodukte:

Satz 5.2.1 *Seien $G \leq G' \leq S_\Lambda$ und $H \leq H' \leq S_\Gamma$ transitive Gruppen mit $\Lambda := \{1,\ldots,l\}$ und $\Gamma := \{1,\ldots,m\}$. Wir setzen $y_j := \sum_{\lambda=1}^{l} x_{(\lambda,j)}$ und $F_j := F(x_{(1,j)},\ldots,x_{(l,j)})$ für $j = 1,\ldots,m$, wobei F ein G'-relatives G-invariantes Polynom ist. Weiterhin sei E ein H'-relatives H-invariantes Polynom. Dann ist*

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_m + E(y_1,\ldots,y_m)$$

ein $G' \wr_\Gamma H'$-relatives $G \wr_\Gamma H$-invariantes Polynom.

Beweis: Die Gruppe $K = (G \wr_\Gamma H, \Lambda \times \Gamma)$ hat das Blocksystem $\mathfrak{B} = \{B_1,\ldots,B_m\}$ aus Lemma 2.4.4 *(ii)*. Da $K = G \wr_\Gamma H = Fun(\Gamma,G) \rtimes_\phi H$, können wir jedes Element $k \in K$ nach Bemerkung 2.4.6(*ii*) als Produkt $k = (g,1)(1,h)$, $g \in Fun(\Gamma,G), h \in H$ schreiben, wobei $(g,1)$ auf $\mathfrak{B}$ durch Vertauschung der Elemente innerhalb der Blöcke operiert, während $(1,h)$ die Blöcke untereinander vertauscht. Haben wir also eine Permutation $(1,h)$ aus $G \wr_\Gamma H$ gegeben, die den Block B_i auf den Block B_j abbildet, so folgt für das Polynom F_i: $(1,h)F_i = F_j$, nach Definition von F_j. Eine Permutation $(g,1)$, die die Elemente innerhalb der Blöcke vertauscht, bildet F_i auf $F_i, (1 \leq i \leq m)$ ab, da F_i ein G'-relatives G-invariantes Polynom ist. Es folgt, daß das Polynom $F := F_1 + F_2 + \ldots + F_m$ invariant unter allen Permutationen von $G \wr_\Gamma H$ ist. Jede Obergruppe von $G \wr_\Gamma H$ der Form $G \wr_\Gamma H'$ mit $H < H'$ läßt aber ebenfalls das Polynom F invariant, da $\mathfrak{B}$ auch Blocksystem von $G \wr_\Gamma H'$ ist. Damit ist die Bedingung $Stab_{G' \wr_\Gamma H'}(F) = G \wr_\Gamma H$ verletzt, und F ist kein $G' \wr_\Gamma H'$-relatives $G \wr_\Gamma H$-invariantes Polynom. Um dies zu verhindern, addieren wir zu F das Polynom E. Da E ein H'-relatives H-invariantes Polynom ist, ist es klar, daß $E(y_1,\ldots,y_m)$ von $G \wr_\Gamma H$ stabilisiert wird. Eine Permutation, die die Elemente innerhalb der Blöcke vertauscht, läßt die $y_i, (1 \leq i \leq m)$ fest, und die Vertauschung der Blöcke hat auch keine Auswirkung, da jede Permutation aus H das Polynom E invariant läßt. $F + E$ ist demnach unter allen Permutationen aus $G \wr_\Gamma H$ invariant. $F + E$ wird aber auch nur von den Permutationen aus $G \wr_\Gamma H$ stabilisiert aufgrund der folgenden Überlegungen: Ein Element $(g',1) \in G' \wr_\Gamma H' \backslash G \wr_\Gamma H$ läßt keines der F_j invariant. Da die Variablenmengen der $F_j, j = 1,\ldots,m$ disjunkt sind, folgt, daß auch die Summe der F_j nicht invariant unter $(g',1)$ ist. Ähnlich läßt eine Permutation $(1,h') \in G' \wr_\Gamma H' \backslash G \wr_\Gamma H$ das Polynom E nicht invariant. $\square$

Bemerkung 5.2.2 *Gilt im obigen Satz* $G = G'$, *so liefert bereits* $E(y_1, \ldots, y_m)$ *ein* $G' \wr_\Gamma H'$*-relatives* $G \wr_\Gamma H$*-invariantes Polynom. Analog genügt für* $H = H'$ *ein Polynom* F.

Beispiel 5.2.3 *Betrachten wir die Gruppen* $G = 12T_{274} = S_3 \wr D(4)$ *und* $H = 12T_{264} = S_3 \wr C(4)$. *Der Algorithmus braucht für diesen Abstieg mit der bisherigen Methode* 72 *Multiplikationen. Identifiziert man nach Bemerkung 2.4.6 die Menge* $\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ *mit* $\{1, \ldots, 12\}$, *so erhält man bezüglich der Vertreter in [6] ein Blocksystem* $\mathfrak{B} = \{\{1,5,9\}, \{2,6,10\}, \{3,7,11\}, \{4,8,12\}\}$. *Nach Bemerkung 5.2.2 ist* $E(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $y_j = x_j + x_{j+4} + x_{j+8}$, $(1 \leq j \leq 4)$ *ein* G*-relatives* H*-invariantes Polynom, falls* E *ein* $D(4)$*-relatives* $C(4)$*-invariantes Polynom ist. Mit Hilfe der Tabellen für Grad* 4 *im Anhang II erhalten wir*

$$\begin{aligned} E &= y_1 y_2^2 + y_2 y_3^2 + y_3 y_4^2 + y_4 y_1^2 \\ &= y_1(y_2^2 + y_4 y_1) + y_3(y_2 y_3 + y_4^2). \end{aligned}$$

Für dieses invariante Polynom benötigen wir nur noch 6 *Multiplikationen.*

Wir kommen nun zu einer Aussage über Untergruppen vom Index 2. Im wesentlichen geht es darum, aus bereits bekannten G-relativen H-invarianten Polynomen F mit $[G : H] = 2$ Invarianten für andere Untergruppen von Index 2 von G zu konstruieren. Dabei versucht man die bekannten Invarianten F so abzuändern, daß die zugehörige Resolvente von der Form $t^2 - F^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist, wobei $\alpha_i, (1 \leq i \leq n)$ wieder die Nullstellen unseres Ausgangspolynoms f sind.

Satz 5.2.4 *Die Permutationsgruppe* G *habe die Untergruppen* H_1 *und* H_2 *vom Index* 2. *Seien* $F_i, (i = 1,2)$ G*-relative* H_i*-invariante Polynome, für die* $\sigma_i F_i = -F_i$, $(\sigma_i \in G \backslash H_i)$ *gelte. Dann ist* $H_1 + H_2 := (H_1 \cap H_2) \cup ((G \backslash H_1) \cap (G \backslash H_2))$ *ebenfalls eine Untergruppe von* G, *und* $F_1 F_2$ *ist ein* G*-relatives* $H_1 + H_2$*-invariantes Polynom.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung $\sigma_i F_i = -F_i$, $\sigma_i \in G \backslash H_i, (i = 1,2)$ keine wirkliche Einschränkung bedeutet. Nach Satz 3.2.4 gibt es genau zwei konjugierte Polynome unter den Permutationen von G. Nämlich F selber und $g_i F_i, g_i \in G \backslash H_i$. Da Untergruppen vom Index 2 Normalteiler sind, ist der Stabilisator gHg^{-1} von gF_i gleich H. Ersetzt man, falls nötig, F_i durch $F_i' = F_i - g_i F_i$, so haben wir $\sigma_i F_i' = \sigma_i F_i - \sigma_i g_i F_i = \sigma_i F_i - F_i = -F_i'$, da aus $g_i, \sigma_i \notin H_i$ folgt, daß $g_i \sigma_i \in H$: Für eine Nebenklassenzerlegung $G = H_i \cup g_i H_i$ ist $g_i^{-1} \notin H_i$. Die Elemente σ_i lassen sich somit in der Form $g_i^{-1} h_i$, $h_i \in H_i$ darstellen. Es folgt mit der Normalteilereigenschaft von H_i $g_i \sigma_i \in H_i$. Wir zeigen nun, daß $H_1 + H_2$ eine Untergruppe von G ist. Seien dazu $g, h \in H_1 + H_2$. Wir wollen zeigen, daß gh^{-1} ebenfalls ein Element von $H_1 + H_2$ ist. Für ein Element $g \in H_1 + H_2$ gilt entweder $g \in H_1 \cap H_2$ oder $g \in G \backslash (H_1 \cup H_2)$, da die Mengen $H_1 \cap H_2$ und $G \backslash (H_1 \cup H_2)$

disjunkt sind. Sind $g, h \in H_1 \cap H_2$, so ist nichts zu zeigen, da der Schnitt zweier Untergruppen bekanntlich wieder eine Untergruppe ist. Ist dagegen $g \in H_1 \cap H_2$ und $h \in G \backslash (H_1 \cup H_2)$, so ist h^{-1} ebenfalls in $G \backslash (H_1 \cup H_2)$ und gh^{-1} auch. Den Fall $g, h \in G \backslash (H_1 \cup H_2)$ haben wir auch schon im wesentlichen zu Beginn des Beweises gelöst, da aus $g, h^{-1} \notin H_1 \cap H_2$ folgt, $gh^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Wir haben also gezeigt, daß aus $g, h \in H_1 + H_2$ immer $gh^{-1} \in H_1 + H_2$ folgt. Somit ist $H_1 + H_2$ Untergruppe von G. Wir wollen nun zeigen , daß für $H_1 \neq H_2 \neq G$ die Untergruppe $H_1 + H_2$ vom Index 2 in G ist: Da $[\,H_1 : H_1 \cap H_2\,] \leq [\,G : H_2\,] = 2$ ist, folgt$[\,H_1 : H_1 \cap H_2\,] = 2$ aufgrund der Verschiedenheit von H_1 und H_2. Nach dem Satz von Lagrange haben wir dann $[\,G : H_1 \cap H_2\,] = [\,G : H_1\,][\,H_1 : H_1 \cap H_2\,] = 4$, also auch $4 = [\,G : H_1 \cap H_2\,] = [\,G : H_1 + H_2\,][\,H_1 + H_2 : H_1 \cap H_2\,]$. Da $[\,H_1 : H_1 \cap H_2\,] = 2$ ist, gibt es ein Element $h_1 \in H_1$, welches nicht in H_2 ist. Folglich ist $h_1 \notin G \backslash H_1$ und somit nicht in $H_1 + H_2$. Damit haben wir $[\,G : H_1 + H_2\,] > 1$. Da $H_1 \neq H_2 \neq G$, ist $H_1 \cup H_2 \neq G$, d.h. $G \backslash H_1 \cup H_2 \neq \emptyset$ und der Index von $[\,H_1 + H_2 : H_1 \cap H_2\,]$ ist auch ungleich 1. Aus der Gradgleichung folgt dann, daß der Index von $H_1 + H_2$ in G gleich 2 sein muß.
Ebenfalls kann leicht gezeigt werden, daß die Operation + assoziativ und kommutativ ist, und daß $H + G = H$ und $H + H = G$ für alle Untergruppen vom Index 2 gilt. Es bleibt zu zeigen, daß $F_1 F_2$ ein G-relatives $H_1 + H_2$-invariantes Polynom ist. Da die Mengen $H_1 \cap H_2$ und $G \backslash H_1 \cap G \backslash H_2$ disjunkt sind, folgt für $h \in H_1 \cap H_2 : hF_1F_2 = F_1F_2$, und für $h \in G \backslash H_1 \cap G \backslash H_2 : hF_1F_2 = -F_1 - F_2 = F_1F_2$. Das Polynom F_1F_2 ist also invariant unter allen Permutationen von $H_1 + H_2$. Gibt es eine Permutation $g \in G \backslash (H_1 + H_2)$, so gilt $g \notin G \backslash H_1 \cap G \backslash H_2$, d.h. g ist entweder Element der Menge $G \backslash H_1$ oder der Menge $G \backslash H_2$. Damit erhalten wir $gF_1F_2 = -F_1F_2$ für alle $g \in G \backslash (H_1 + H_2)$. □

Dieser Satz stellt uns ein Mittel zur Verfügung, die Laufzeit unseres Programms wesentlich zu verbessern. Hat eine Gruppe mehrere Untergruppen von Index 2, können wir durch geschickte Kombination zweier oder mehrerer Gruppen invariante Polynome konstruieren, die der Computer in sehr viel kürzerer Zeit auswerten kann, da weniger Multiplikationen durchgeführt werden müssen. Betrachte man dazu das nächste Beispiel:

Beispiel 5.2.5 *Das* $12T_{274}$*-relative* $12T_{263}$*-invariante Polynom (siehe Anhang II) erfordert bei seiner Auswertung* $15 \cdot 5184$ *Multiplikationen. Die Gruppe* T_{274} *hat die Untergruppen* T_{261} *bis* T_{264}*,* T_{266}^{+} *und* T_{267} *vom Index* 2*. Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, daß* $T_{263} = T_{264} + T_{267}$*. Ein Blick in die Tabellen zeigt uns, daß es schön wäre, wenn auch das* T_{274}*-relative* T_{267}*-invariante Polynom durch eines mit weniger Multiplikationen ersetzt werden könnte. Es zeigt sich, daß* $T_{267} = T_{261} + T_{266}^{+}$ *ist. Beginnen wir mit dem* T_{274}*-relativen* T_{264}*-invarianten Polynom. In Beispiel 5.2.3 hatten wir das Polynom* $E = y_1(y_2^2 + y_4 y_1) + y_3(y_2 y_3 + y_4^2)$ *gefunden. Die Bilder dieses Polynoms unter den Permutationen von* T_{274} *sind* E *und* $\sigma E = y_1(y_1 y_2 + y_4^4) + y_3(y_2^2 + y_3 y_4)$*,* $\sigma \in T_{274} \backslash T_{264}$*. Das Polynom*

$$E - \sigma E = y_1(y_4 - y_2)(y_1 - y_2 - y_4) + y_3(y_2 - y_4)(y_3 - y_2 - y_4)$$

ist ein T_{274}*-relatives* T_{264}*-invariantes Polynom, welches den Voraussetzungen von Satz 5.2.4 genügt. Nun gilt es, invariante Polynome für die Abstiege* T_{274} *zu* T_{261} *und* T_{274} *zu* T_{266} *zu finden. Die Gruppe* $T_{261} = S_3 \wr E(4)$ *ist ebenfalls wie* $T_{274} = S_3 \wr D(4)$ *ein Kranzprodukt, d.h. wir können Satz 5.2.1 anwenden. Als* $D(4)$*-relatives* $E(4)$*-invariantes Polynom wählen wir*

$$F = (y_1 - y_2)(y_3 - y_4),$$

mit $y_1, \ldots, y_4$ *wie in Beispiel 5.2.3. Bezüglich der Permutationen aus* T_{274} *erhalten wir die Bilder* F *und* $\tau F = (y_4 - y_1)(y_2 - y_3)$, $\tau \in T_{274} \backslash T_{261}$*. Es folgt also* $Stab_{T_{274}}(F - \sigma F) = T_{261}$ *und* $F - \sigma F$ *erfüllt die Voraussetzungen von Satz 5.2.4. Zu dem* T_{274}*-relativen* T_{266}^{+}*-invarianten Polynom sei gesagt, daß man bei einem Abstieg von einer ungeraden in eine gerade Gruppe immer das folgende Polynom, welches wie die Wurzel einer Polynomdiskriminante konstruiert ist, verwenden kann:*

$$\delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),$$

wobei n *der Grad unseres Eingabepolynoms* f *ist. Motiviert durch den nachfolgenden Satz haben wir aber ein Polynom mit weniger Multiplikationen gefunden. Durch direktes Nachrechnen erhält man* $Stab_{T_{274}}(D \cdot s_4) = T_{266}^{+}$*, wobei* $Ds_4 = \prod_{i=1}^{4}(x_i - x_{i+4})(x_i - x_{i+8})(x_{i+4} - x_{i+8}) \prod_{1 \leq i < j \leq 4}(y_i - y_j)$ *mit* $y_1, \ldots, y_4$ *aus Beispiel 5.2.3. Multiplikation der einzelnen Polynome liefert das* T_{274}*-relative* T_{263}*-invariante Polynom*

$$(E - \sigma E)(F - \tau F)Ds_4$$

für das wir weniger als 20 *Multiplikationen benötigen.*

Der letzte Satz beschäftigt sich mit Kranzprodukten der Form $G = S_l \wr S_m$. Es werden durch Betrachtung der Stabilisatoren symmetrischer Polynome Untergruppen klassifiziert. Die symmetrischen Polynome dienen dann umgekehrt als Invarianten dieser Gruppenpaare.

Satz 5.2.6 *Die Gruppe* $S_l \wr_\Gamma S_m$ *mit* $\Gamma := \{1, \ldots, m\}$ *hat mindestens drei Untergruppen von Index 2: Die Stabilisatoren von* $s_m(d_1, \ldots, d_m)$, $D(y_1, \ldots, y_m)$, *(das ist* $S_l \wr_\Gamma A_m$*) und* $D(y_1, \ldots, y_m)s_m(d_1, \ldots, d_m)$*, wobei* s_m *die* m*-te elementarsymmetrische Funktion,* $d_k := \prod_{1 \leq i < j \leq l}(x_{(i,k)} - x_{(j,k)})$, $(k = 1, \ldots, m)$ *und* $D := \prod_{1 \leq i < j \leq m}(y_i - y_j)$ *mit* y_j *wie in Satz 5.2.1. Außerdem hat* $S_l \wr_\Gamma S_m$ *jeweils eine Untergruppe vom Index* 2^{m-1} *und eine Untergruppe vom Index* 2^m, $(A_l \wr_\Gamma S_m)$*, die die Stabilisatoren von* $s_2(d_1, \ldots, d_m)$ *bzw.* $s_1(d_1, \ldots, d_m)$ *sind.*

Beweis: Sei $\Lambda := \{1, \ldots, l\}$. Die Gruppe $G := S_l \wr_\Gamma S_m$ hat das Blocksystem $\mathfrak{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ mit $B_\gamma = \{(\lambda, \gamma) \mid \lambda \in \Lambda\}$, $\gamma \in \Gamma$. Betrachten wir zunächst die Bilder von d_1 unter $S_l \wr_\Gamma S_m$. Dies sind genau die $\pm d_k$, $k = 1 \ldots, m$. Damit kann man die Stabilisatoren von s_m, s_1, und s_2 leicht bestimmen. Das Bild von $s_m = d_1 \cdot \ldots \cdot d_m$ unter $S_l \wr_\Gamma S_m$ ist entweder s_m selber oder $-s_m$. Der Stabilisator von s_m muß also eine Untergruppe vom Index 2 in $S_l \wr_\Gamma S_m$ sein. Das Polynom $s_1 = d_1 + \ldots + d_m$ hat unter den Permutationen von $S_l \wr_\Gamma S_m$ genau 2^m Bilder. Das Kranzprodukt $A_l \wr_\Gamma S_m$ hat die Ordnung $\frac{1}{2^m} l!^m m!$, also den Index 2^m in $S_l \wr_\Gamma S_m$, und alle Permutationen in $A_l \wr_\Gamma S_m$ lassen s_1 invariant. Wie im Beweis 5.2.1 kann man die Permutationen aus $A_l \wr_\Gamma S_m$ in Produkte der Form $(g, 1)(1, h)$, $g \in Fun(\Gamma, A_l), h \in S_m$ zerlegen, wobei $(1, h)$ eine Permutation der Blöcke bewirkt und $(g, 1)$ die Elemente innerhalb der Blöcke vertauscht. Eine Permutation $(1, h)$ permutiert die Summanden von s_1, während es sich bei einer Permutation $(g, 1)$ um eine gerade Permutation handelt. Somit wird jedes d_k, $(1 \leq k \leq m)$ auf sich selber abgebildet. Aufgrund der Maximalität von $A_l \wr_\Gamma S_m$ in $S_l \wr_\Gamma S_m$ folgt die Behauptung für s_1. Betrachten wir nun das Polynom s_2. Der Stabilisator dieses Polynoms entsteht aus der Vereinigung des Stabilisators $Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(s_1)$ von s_1 mit $gStab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(s_1)$, wobei g eine Permutation aus $S_l \wr_\Gamma S_m$ ist, die die Vorzeichen der d_k, $k = 1, \ldots, m$ vertauscht. Deshalb hat der Stabilisator von s_2 einen Index von 2^{m-1} in $S_l \wr_\Gamma S_m$. Der Fall für das Polynom D läuft analog dem des Polynoms s_m: Die Bilder von D unter den Permutationen von $S_l \wr_\Gamma S_m$ sind gerade $\pm D$. Deshalb handelt es sich bei $Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(D)$ um eine Untergruppe vom Index 2. $S_l \wr_\Gamma A_m$ ist maximale Untergruppe vom Index 2 in $S_l \wr_\Gamma S_m$. Die Permutationen aus $S_l \wr_\Gamma A_m$ kann man wieder zerlegen in solche, die die Blöcke vertauschen, und solche, die die Elemente innerhalb der Blöcke vertauschen. Letztere Permutationen aus $S_l \wr_\Gamma A_m$ haben keine Auswirkung auf das Polynom D, da die y_i, $i = 1, \ldots, m$ jeweils gerade die Summe der Elemente eines Blockes sind. Die Elemente $(1, h)$, $h \in A_m$, die die Blöcke vertauschen, sind gerade Permutationen, somit folgt $(1, h)D = D$. Nun bleibt nur noch zu zeigen, daß $S_l \wr_\Gamma S_m$ den Stabilisator von Ds_m als Untergruppe vom Index 2 hat. Die Stabilisatoren $Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(s_m)$ und $Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(D)$ sind verschieden und echte Untergruppen von $S_l \wr_\Gamma S_m$. Nach Satz 5.2.4 ist $Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(D) + Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(s_m)$ Untergruppe vom Index 2 in $S_l \wr_\Gamma S_m$, und Ds_m ist ein $S_l \wr_\Gamma S_m$-relatives $Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(D) + Stab_{S_l \wr_\Gamma S_m}(s_m)$-invariantes Polynom. □

Wir kommen nun zu den Anwendungen des letzten Satzes. Die Effektiviät dieser Polynome wollen wir zuerst noch an einem Beispiel demonstrieren.

Beispiel 5.2.7 *Die imprimitive Gruppe* $12T_{299}$ *ist das Kranzprodukt* $S_6 \wr S_2$. *Diese Gruppe hat bei Identifizierung von* $\{1, \ldots, 6\} \times \{1, 2\}$ *mit* $\{1, \ldots, 12\}$ *bezüglich der Erzeuger in [6] das Blocksystem* $\{\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}\}$. *Mit unseren bisherigen Mitteln hatten wir für den Abstieg von* $12T_{299}$ *in die maximale Untergruppe vom Index* 2 $12T_{298}$ *das invariante Polynom*

$$F = \sum_{\sigma \in 12T_{298}} \sigma(x_1 x_2^2 x_3^4 x_4^3 x_5^3 x_6^6 x_7^2 x_8^4 x_9^6 x_{10}^5)$$

gefunden, dessen Auswertung uns $35 \cdot 518400$ *Multiplikationen (siehe auch Anhang) kostet. Mit Hilfe des letzten Satzes können wir nachrechnen, daß*

$$Stab_{S_6 \wr S_2}(Ds_2) = 12T_{298}$$

ist, wobei $D = (y_1 - y_2) = (x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} - x_2 - x_4 - x_6 - x_8 - x_{10} - x_{12})$ *und* $s_2 = d_1 d_2$, $d_1 = (x_1 - x_3)(x_1 - x_5) \cdot \ldots \cdot (x_9 - x_{11})$ *und* $d2 = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)d_1$. *Für dieses invariante Polynom benötigen wir gerade einmal* 30 *Multiplikationen.*

Wie man den Tabellen im Anhang entnehmen kann, befinden wir uns in der glücklichen Situation, daß maximale imprimitve transitive Gruppen Kranzprodukte sind. Da diese Gruppen bei dem Verfahren von Stauduhar die Nahtstelle zwischen der S_n bzw. A_n und den kleineren imprimitiven Gruppen bilden, werden sie auch verhältnismäßig oft frequentiert. Daher ist es besonders wichtig, diese Übergänge besonders effektiv zu gestalten. Mit Hilfe des letzten Satzes ist es uns gelungen, viele ungünstige invariante Polynome zu ersetzen, und damit das Programm, insbesondere für den Grad 12 (wie man am obigen Beispiel sieht), erst lauffähig zu machen.

Wir geben nun für die Grade $6 \leq n \leq 12$ eine vollständige Übersicht der Gruppen, die wir als Stabilisatoren der Polynome Ds_m, s_m, D, s_2, s_1 aus Satz 5.2.6 identifiziert haben:

$n = 6$: Maximale Kranzprodukte in S_6 sind $T_{13} = S_3 \wr S_2$ und $T_{11} = S_2 \wr S_3$.
$G = T_{13}$: $Stab_G(Ds_2) = T_{10}^+$, $Stab_G(s_2) = T_9$, $Stab_G(s_1) = T_5$, $Stab_G(D) = S_3 \times S_3$ ist intransitiv.
$G = T_{11}$: $Stab_G(Ds_3) = T_8$, $Stab_G(s_3) = T_7^+$, $Stab_G(D) = T_6$, $Stab_G(s_2) = T_3' = gT_3g^{-1}$ mit $g = (2,5)$, $Stab_G(s_1)$ ist intransitiv.

$n = 8$: Maximale Kranzprodukte in S_8 sind $T_{47} = S_4 \wr S_2$ und $T_{44} = S_2 \wr S_4$.
$G = T_{47}$: $Stab_G(Ds_2) = T_{46}^+$, $Stab_G(s_2) = T_{45}^+$, $Stab_G(s_1) = T_{42}^+$, $Stab_G(D) = S_4 \times S_4$ ist intransitiv.
$G = T_{44}$: $Stab_G(Ds_4) = T_{40}$, $Stab_G(s_4) = T_{39}^+$, $Stab_G(D) = T_{38}^+$, $Stab_G(s_2) = T_{24}^+$, $Stab_G(s_1)$ ist intransitiv.

$n = 9$: Maximales Kranzprodukt in S_9 ist $T_{31} = S_3 \wr S_3$.
$G = T_{31}$: $Stab_G(Ds_3) = T_{30}^+$, $Stab_G(s_3) = T_{29}$, $Stab_G(D) = T_{28}$, $Stab_G(s_2) = T_{24}$, $Stab_G(s_1) = T_{20}$.

$n = 10$: Maximale Kranzprodukte in S_{10} sind $T_{43} = S_5 \wr S_2$ und $T_{39} = S_2 \wr S_5$.
$G = T_{43}$: $Stab_G(Ds_2) = T_{42}^+$, $Stab_G(s_2) = T_{41}$, $Stab_G(s_1) = T_{40}$, $Stab_G(D) = S_5 \times S_5$ ist intransitiv.
$G = T_{39}$: $Stab_G(Ds_5) = T_{38}$, $Stab_G(s_5) = T_{37}^+$, $Stab_G(D) = T_{36}$, $Stab_G(s_2) = T_{22}' = gT_{22}g^{-1}$ mit $g = (4,9)(5,10)$, $Stab_G(s_1)$ ist intransitiv.

$n = 12$: Maximale Kranzprodukte in S_{12} sind $T_{299} = S_6 \wr S_2$, $T_{293} = S_2 \wr S_6$, $T_{294} = S_4 \wr S_3$ und $T_{289} = S_3 \wr S_4$.

$G = T_{299}$: $Stab_G(Ds_2) = T_{298}$, $Stab_G(s_2) = T_{297}^{+}$, $Stab_G(s_1) = T_{296}^{+}$, $Stab_G(D) = S_6 \times S_6$ ist intransitiv.
$G = T_{293}$: $Stab_G(Ds_6) = T_{287}$, $Stab_G(D) = T_{286}$, $Stab_G(s_6) = T_{285}^{+}$, $Stab_G(s_2) = T'_{219} = gT_{219}g^{-1}$ mit $g = (2,3)(4,5)(6,7)(8,9)(10,11)$, $Stab_G(s_1)$ ist intransitiv.
$G = T_{294}$: $Stab_G(D) = T_{292}$, $Stab_G(Ds_3) = T_{291}$, $Stab_G(s_3) = T_{290}^{+}$, $Stab_G(s_2) = T_{283}$, $Stab_G(s_1) = T'^{+}_{275} = gT^{+}_{275}g^{-1}$ mit $g = (8,10)$.
$G = T_{289}$: $Stab_G(Ds_4) = T_{282}^{+}$, $Stab_G(s_4) = T_{281}$, $Stab_G(D) = T_{280}$, $Stab_G(s_2) = T_{258}$, $Stab_G(s_1) = T_{231}$.

Wir wollen nun noch ein letztes Beispiel angeben, bei dem alle drei Sätze kombiniert werden.

Beispiel 5.2.8 *Betrachten wir nun den Fall* $12T_{260}$ *über* $12T'_{235}$. *In diesem Beispiel entstehen alle '-Gruppen durch Konjugation mit* $(2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$ *aus den ursprünglichen Gruppen. Der Algorithmus benötigt für diesen Abstieg* $11 \cdot 1152$ *Multiplikationen. Durch Testen verschiedener Möglichkeiten erhält man* $T'_{235} = T'_{241} + T'_{236}$. *Bei der Gruppe* $T'_{241} = S_2 \wr F_{36}(6)$ *handelt es sich ebenfalls wie* $T_{260} = S_2 \wr F_{36}(6) : 2 = S_2 \wr (S_3 \wr S_2)$ *um ein Kranzprodukt, d.h. wir können Satz 5.2.1 anwenden. Nach Bemerkung 5.2.2 genügt es, ein* $S_3 \wr S_2$*-relatives* $F_{36}(6)$*-invariantes Polynom zu finden. In den Anwendungen zu Satz 5.2.6 hatten wir für* $n = 6$ *gesehen, daß* $Stab_{S_3 \wr S_2}(Ds_2) = F_{36}(6)$ *gilt. Die Gruppen* T_{260} *und* T'_{235} *haben das Blocksystem* $\mathfrak{B} = \{\{1,7\},\{2,8\},\{3,9\},\{4,10\},\{5,11\},\{6,12\}\}$, *und wir erhalten somit* $y_j = (x_j + x_{j+6})$, $d_j = (x_j - x_{j+6})$, $j = 1, \ldots, 6$ *und*

$$Ds_2 = \prod_{1 \le i < j \le 6} (y_i - y_j) \sum_{1 \le i < j \le 6} d_i d_j .$$

Nun gilt es noch ein T_{260}*-relatives* T'^{+}_{236}*-invariantes Polynom zu finden. Da es sich bei* T'^{+}_{236} *um eine gerade Gruppe handelt, wird das Polynom* $s_6 = d_1d_2d_3d_4d_5d_6$ *von allen Permutationen aus* T'^{+}_{236} *stabilisiert, und Permutationen aus* $T_{260} \backslash T'^{+}_{236}$ *liefern einen Vorzeichenwechsel. Beide Polynome* Ds_2 *und* s_6 *erfüllen die Voraussetzungen von Satz 5.2.4. Wir erhalten also*

$$Ds_2 s_6$$

ist ein T_{260}*-relatives* T'_{235}*-invariantes Polynom, dessen Auswertung uns weniger als* 40 *Multiplikationen kostet.*

5.3 Verkürzte Nebenklassenrepräsentanten

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir einen Ansatz zur Einschränkung der Anzahl der in die Untergruppentests einzubeziehenden Nebenklassenrepräsentanten diskutieren. Angeregt wurden unsere Betrachtungen durch ein Gespräch mit John McKay.

Wir gehen davon aus, daß Permutationsgruppen K und G mit $K \leq \mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq G$ (bezüglich der Wurzelanordnung) gegeben sind. Im Verfahren von Stauduhar ist nun für eine maximale transitive Untergruppe H von G für jedes $\sigma \in G//H$ ein Untergruppentest $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq \sigma H \sigma^{-1}$ durchzuführen. Aufgrund der Kenntnis von K sind nur solche $\sigma \in G//H$ dabei zu betrachten, für die $K \leq \sigma H \sigma^{-1}$ gilt. Dies liefert eine eingeschränkte Menge von Nebenklassenrepräsentanten, die im folgenden mit $(G//H)_K$ bezeichnet wird.

Die Gruppe K kann man auf verschiedene Weisen bekommen; in unserem Fall ziehen wir die komplexe Konjugation heran und betrachten die von ihr erzeugte 2-elementige Gruppe K. Da wir in unserem Verfahren mit Permutationsdarstellungen bezüglich der komplexen Nullstellen von f arbeiten, ist die Darstellung der komplexen Konjugation ohne Probleme möglich.

Obwohl die Gruppe K sehr klein ist, lassen sich auf diesem Weg große Einschränkungen der zu testenden Nebenklassenrepräsentanten und damit große Laufzeitbeschleunigungen erreichen:

Beispiel 5.3.1 *Betrachten wir das Beispiel $f(t) = t^{11} - 2$. Die Galoisgruppe dieses Polynoms ist T_4. Der Index von T_4 in der symmetrischen Gruppe beträgt* 362880*, so daß wir für die Berechnung der Galoisgruppe dieses Polynoms mehrere Stunden benötigen. Das verkürzte Repräsentantensystem besteht nur noch aus 384 Repräsentanten, so daß die Berechnungen innerhalb von* $16s$ *ausgeführt werden können.*

Leider stößt dieses Vorgehen auf ein schwieriges Problem: In den in Frage kommenden Untergruppentests muß gewährleistet werden, daß das G-relative H-Resolventenpolynom keine mehrfachen Nullstellen in $\mathbb{Z}$ besitzt. Wir wollen an dieser Stelle aber gerade vermeiden, alle Nullstellen des Resolventenpolynoms zu berechnen.

Eine Lösungsmöglichkeit besteht im Anwenden von Tschirnhausentransformationen. Hat das Resolventenpolynom für einen Nebenklassenrepräsentanten $\sigma \in (G//H)_K$ eine ganzrationale Nullstelle, so kann man durch endlich viele Tschirnhausentransformationen erreichen, daß diese Nullstelle einfache Nullstelle des Resolventenpolynoms wird oder verschwindet (d.h. keine Nullstelle aus $\mathbb{Z}$ mehr ist). Bei Verschwinden gilt $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \not\leq \sigma H \sigma^{-1}$. Verschwindet sie nicht, so können wir aufgrund der extrem hohen oberen Schranken für die erforderliche Anzahl von Tschirnhausentransformationen nichts entscheiden. Die praktische Erfahrung zeigt jedoch, daß stets nur eine sehr geringe Anzahl (≤ 2) von zufälligen Tschirnhausentransformationen benötigt wird, um eine doppelte Wurzel zu entfernen. Entsprechend der Bemerkung 3.4.3 ist es sogar möglich, die Wahrscheinlichkeit für Separabilität nach einer zufälligen Tschirnhausentransformation beliebig hoch zu machen. Es ist daher auch praktikabel, nach einer solchen Tschirnhausentransformation nur die Wurzeln neuzuberechnen, die vorher in $\mathbb{Z}$ waren.

Kapitel 6

Erweiterungen des Verfahrens

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Erweiterung des Verfahrens von Stauduhar zu entwickeln. Die Untersuchungen des letzten Kapitels zeigten, daß besonders die ersten Abstiege, ausgehend von der S_n bzw. der A_n, besonders zeitkritisch sind. Es wäre daher generell wünschenswert, diese Schritte (durch Berechnung geeigneter Zusatzinformationen) zu überspringen und den Einstiegspunkt für das bisherige Verfahren in das Untergruppengitter möglichst nahe der tatsächlichen Galoisgruppe zu wählen. Als Voraussetzung für einen solchen Quereinstieg muß gewährleistet werden, daß die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ Untergruppe der als Einstiegspunkt gewählten Gruppe G ist, und zwar als Permutationsgruppe der gewählten Anordnung der Wurzeln von f.

6.1 Teilkörper, Blöcke, Galoisgruppen

Da die Galoisgruppe eines normierten irreduziblen Polynoms, als Permutationsgruppe betrachtet, transitiv auf der Menge der Nullstellen von f operiert, war eine Unterteilung in imprimitive und primitive Gruppen möglich. Diese Eigenschaften von $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ wurden aber bisher weitgehend unberücksichtigt gelassen. Wäre es möglich, ausgehend von dem Polynom f, nähere Informationen über Blocksysteme der Galoisgruppe zu erhalten, so könnten diese zum Beispiel dazu genutzt werden, die Menge der in Frage kommenden Permutationsgruppen (als Galoisgruppen) einzuschränken. In dem Computeralgebrasystem KANT, in dem auch unsere Algorithmen implementiert wurden, steht uns ein schneller Algorithmus zur Berechnung aller Teilkörper eines algebraischen Zahlkörpers zur Verfügung, siehe [17]. Um diesen Algorithmus für die Berechnung der Galoisgruppe einsetzen zu können, wollen wir zunächst den Zusammenhang zwischen Teilkörpern von $\mathbb{Q}(\alpha)$ und Blöcken von $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ aufzeigen, wobei α eine Nullstelle von f bezeichne. Dabei stellt sich heraus, daß ähnlich zum Hauptsatz der Galoistheorie eine Bijektion zwischen den Teilkörpern von $\mathbb{Q}(\alpha)$ und den Blöcken von $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ existiert, die α enthalten.

Satz 6.1.1 *Sei $f \in \mathbb{Z}[t]$ normiert und irreduzibel vom Grad n und α eine Nullstelle von f. Sei weiterhin $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ die Galoisgruppe von f. Dann existiert eine Bijektion zwischen den Teilkörpern von L vom Grad m und den Blöcken B der Länge l von $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$, die α enthalten. Zusätzlich gilt $n = ml$.*

Beweis: Siehe [17] S. 34. □

Im Beweis stellt sich heraus, daß die Teilkörper von $\mathbb{Q}(\alpha)$ genau die Fixkörper der Stabilisatoren der Blöcke B sind, die α enthalten.

Wir spezialisieren diesen Sachverhalt im Hinblick auf unsere geplante Anwendung:

Satz 6.1.2 *Seien L, K algebraische Zahlkörper mit $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ und $Z_{\mathbb{Q}}(L)$, $Z_{\mathbb{Q}}(K)$ die zugehörigen Zerfällungskörper, $Z_{\mathbb{Q}}(K) \subseteq Z_{\mathbb{Q}}(L)$. Sei $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ und $K = \mathbb{Q}(\beta)$ mit $h(\alpha) = \beta$ und $h \in \mathbb{Q}[t]$. Die Konjugierten von α und β werden mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Z_{\mathbb{Q}}(L)$ und $\beta_1, \dots, \beta_m \in Z_{\mathbb{Q}}(K)$ bezeichnet. Setze $B_i = \{\, \alpha_j \mid h(\alpha_j) = \beta_i \,\}$. Dann gilt:*

(i) Die B_i liefern ein (zu K gehöriges) Blocksystem der Galoisgruppe G von $Z_{\mathbb{Q}}(L)$ der Länge m. Es gilt $n = |\, B_i \,|\, m$ für $1 \leq i \leq m$.

(ii) Die Galoisgruppe H von $Z_{\mathbb{Q}}(K)$ ist, aufgefaßt als Permutationsgruppe der $\beta_1, \dots, \beta_m$, äquivalent zur Permutationsdarstellung von G bzgl . $B_1, \dots, B_m$ unter $\theta : \beta_i \longmapsto B_i$.

Beweis: *(i)* Sei $\sigma \in G$ und $x \in B_i$. Es gelte $\sigma(\beta_i) = \beta_k$. Dann hat man folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x \in B_i \quad &\Leftrightarrow \quad h(x) = \beta_i \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma(h(x)) = h(\sigma(x)) = \beta_k \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma(x) \in B_k. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt wegen $G_{B_i} = \mathrm{Fix}(G, \mathbb{Q}(\beta_i))$ auch $\mathbb{Q}(\beta_i) = \mathrm{Fix}(Z_{\mathbb{Q}}(L), G_{B_i})$. Aus obigen Äquivalenzen und der Transitivität von G bezüglich der $\beta_1, \dots, \beta_m$ folgt $n = |\, B_i \,|\, m$ für $1 \leq i \leq m$.
(ii) Nach dem eben Gesagten ergibt sich aus Satz 2.6.6:

$$Z_{\mathbb{Q}}(K) = \mathbb{Q}(\beta_1, \dots, \beta_m) = \mathrm{Fix}(Z_{\mathbb{Q}}(L), \bigcap_{i=1}^{m} G_{B_i})$$

und damit $H \simeq G/\mathrm{Fix}(G, Z_{\mathbb{Q}}(K)) \simeq G/\bigcap_{i=1}^{m} G_{B_i}$. Ferner läßt sich $G/\bigcap_{i=1}^{m} G_{B_i}$ als Permutationsdarstellung von G bezüglich der B_i auffassen. Beachtet man die obigen Äquivalenzen und die Tatsache, daß die Isomorphie durch Einschränkung der $\sigma \in G$ von $Z_{\mathbb{Q}}(L)$ auf $Z_{\mathbb{Q}}(K)$ vermittelt wird, so ergibt sich die Äquivalenz von H und der Permutationsdarstellung von G bezüglich B_i unter der Abbildung $\theta : \beta_i \longmapsto B_i$. □

6.2 Zwei Methoden

Die Grundidee besteht darin, daß für jedes Blocksystem der Galoisgruppe auf eine Obergruppe, die verschieden von S_n und A_n ist, geschlossen werden kann. Nach dem Satz von Krasner und Kaloujnine kann eine transitive imprimitive Permutationsgruppe mit einem Blocksystem, welches aus d Blöcken der Länge l besteht, in ein Kranzprodukt der Form $S_l \wr S_d$ eingebettet werden. Hat man mehr Informationen über die Operation der Gruppe auf den Blöcken, so ist es möglich, die Komponente des Kranzproduktes, die für die Operation auf den Blöcken verantwortlich ist (hier ist dies S_d), einzuschränken. Man weiß dann, daß die Galoisgruppe im Schnitt der Kranzprodukte liegen muß. Handelt es sich bei der Galoisgruppe um eine gerade Gruppe, so muß aufgrund der Unterteilung in gerade und ungerade imprimitive Gruppen der Schnitt der Kranzprodukte mit der alternierenden Gruppe geschnitten werden. Dies liefert dann den Einstiegspunkt in das Untergruppengitter. Die Blocksysteme werden mit Hilfe des Einbettungspolynoms $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ aus Satz 6.1.2, welches vom Teilkörperalgorithmus berechnet wird, bestimmt. Man beachte auch hierbei Satz 6.1.1.
Sei $\mathfrak{L}$ wieder eine Liste der Vertreter der S_n-Konjugationsklassen transitiver Gruppen. Wir können nun die folgende, *erste Methode* angeben:

Algorithmus 6.2.1 *(Galoisgruppenberechnung mittels Teilkörperberechnung)*

Eingabe: *Ein normiertes irreduzibles Polynom f vom Grad n mit ganzrationalen Koeffizienten.*

Ausgabe: *Gruppe $T \in \mathfrak{L}$, Wurzelanordnung, so daß $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq T$.*

1. *(Initialisierung) Berechne Wurzeln von f und wähle eine beliebige Wurzelanordnung.*

2. *(Diskriminante?) Ist $D(f(t))$ Quadrat eines Elementes in $\mathbb{Z}$, so setze $G \leftarrow A_n$. Sonst $G \leftarrow S_n$.*

3. *(Teilkörperberechnung) Berechne Minimalpolynome $m_1, \ldots, m_l$ der Teilkörper von $\mathbb{Q}(\alpha)$, (α ist Wurzel von f), und Einbettungspolynome $h_1, \ldots, h_l$ mit Hilfe des Teilkörperalgorithmus.*

4. *(Primitivität?) Ist $l = 0$, so ist $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ eine primitive Permutationsgruppe. Ausgabe von $T \leftarrow G$ und Wurzelanordung $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Terminiere. Sonst setze $i \leftarrow 1$.*

5. *(Schleife über die m_i) Für jedes $i \leq l$ mache:*

6. *(Wurzeln in Blöcken) Setze $d_i \leftarrow$ Grad m_i und $l_i \leftarrow n/d_i$. Die Galoisgruppe besitzt ein Blocksystem $\mathfrak{B}_i = \{B_1, \ldots, B_{d_i}\}$ mit Blöcken der Länge l_i. Berechne Wurzelaufteilung der Wurzeln von f auf die Blöcke $B_1, \ldots, B_{d_i}$ mit Hilfe des Einbettungspolynoms h_i nach Satz 6.1.2.*

7. *(Kranzprodukt) Bilde* $K_i = S_{l_i} \wr S_{d_i}$ *und bestimme Permutation* $\sigma \in S_n$*, die das Blocksystem von* K_i *auf das Blocksystem* $\mathfrak{B}_i$ *abbildet.*

8. *(Konjugiere Kranzprodukt) Setze* $K_i \leftarrow \sigma K_i \sigma^{-1}$*. Nun gilt* $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq K_i$*.*

9. *(Nächstes* m_i*?) Ist* $i < l$*, so setze* $i \leftarrow i + 1$ *und wiederhole ab Schritt* 5.

10. *(Schnittbildung) Setze* $G \leftarrow G \cap \bigcap_{i=1}^{m} K_i$*.*

11. *(Identifikation) Identifiziere* G *mit* $T \in \mathfrak{L}$*. Bestimme Permutation* τ*, so daß* $G = \tau T \tau^{-1}$*.*

12. *(Wurzelanordnung anpassen) Setze* $\alpha_i \leftarrow \alpha_{\tau(i)}$*. Nun gilt* $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q}) \leq T$*. Ausgabe von* T *und Wurzelanordnung* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*. Terminiere.*

Mittels Satz 6.1.2 (*ii*) weiß man, daß die Operation der Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ auf den Blöcken B_i, $|\,B_i\,| = l$, $(1 \leq i \leq m)$ der Operation der Galoisgruppe der Minimalpolynome m_i, die die Teilkörper erzeugen, auf deren Wurzeln entspricht. Folglich kann man die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ in das Kranzprodukt $S_l \wr \mathfrak{G}(m_i, \mathbb{Q})$ einbetten, wodurch noch bessere Annäherungen an die eigentliche Galoisgruppe geliefert werden. Hieraus resultiert die *zweite Methode*, welche Algorithmus 6.2.1 bis auf den Schritt 7 entspricht. Dieser Schritt wird durch folgende Schritte ersetzt:

(7') Berechne die Galoisgruppe $\mathfrak{G}(m_i, \mathbb{Q})$ als Permutationsgruppe der β_j, $(1 \leq j \leq d_i)$.

(7") Bilde $K_i = S_{l_i} \wr \mathfrak{G}(m_i, \mathbb{Q})$ und bestimme eine Permutation $\sigma \in S_n$, die das Blocksystem von K_i auf das Blocksystem $\mathfrak{B}_i$ abbildet, unter Beachtung der Abbildung θ aus Satz 6.1.2.

6.3 Vergleich zum unerweiterten Verfahren

Wir vergleichen anhand der folgenden Tabelle das Grundverfahren von Stauduahr (S) und die Verbesserung dieses Algorithmus um die modulo p Faktorisierungen (S *mod* p) mit den eben eingeführten Erweiterungen ($SE1$) und ($SE2$). In der linken Spalte wird die zu berechnende Galoisgruppe angegeben; als Eingabe verwenden wir die im Anhang II angegebenen Polynome. In den anderen Spalten wird die jeweilige Gruppe, mit der in das Untergruppengitter eingestiegen wird, und die Berechnungszeit angegeben.

$\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$	S		$S\ mod\, p$		$SE1$		$SE2$	
T_{294}	S_{12}	$37.0s$	S_{12}	$31.0s$	T_{294}	$3.5s$	T_{294}	$3.5s$
T_{293}	S_{12}	$61.2s$	S_{12}	$22.0s$	T_{293}	$4.2s$	T_{293}	$4.2s$
T_{281}	S_{12}	$123.1s$	S_{12}	$62.2s$	T_{289}	$4.5s$	T_{289}	$4.9s$
T_{263}	S_{12}	$9.9s$	S_{12}	$7.4s$	T_{274}	$9.5s$	T_{274}	$10.0s$
T_{163}^{+}	A_{12}	$5.8s$	A_{12}	$6.5s$	T_{236}^{+}	$11.1s$	T_{195}^{+}	$11.7s$
T_{77}^{+}	A_{12}	$18.2s$	A_{12}	$15.3s$	T_{77}^{+}	$4.6s$	T_{77}^{+}	$4.6s$
T_{43}^{+}	A_{12}	$45.2s$	A_{12}	$44.8s$	T_{43}^{+}	$3.3s$	T_{43}^{+}	$3.6s$
T_{38}	S_{12}	$36.0s$	S_{12}	$10.0s$	T_{125}	$11.1s$	T_{81}	$11.4s$
T_{17}	S_{12}	$18.1s$	S_{12}	$17.6s$	T_{35}	$13.3s$	T_{17}	$9.9s$
T_{13}	S_{12}	$37.4s$	S_{12}	$12s$	T_{28}	$11.2s$	T_{28}	$11.7s$
T_{3}^{+}	A_{12}	$9.5s$	A_{12}	$10.2s$	T_{3}^{+}	$5.3s$	T_{3}^{+}	$5.3s$

Tabelle 6.1: Laufzeitvergleiche der einzelnen Verfahren

Die Gruppen T_{294} und T_{293} sind nach der Gruppe T_{299} die maximalen Gruppen größter Ordnung der S_{12}. Wie man anhand der Tabelle erkennt, wirkt sich die Größe der Indizes schon so negativ auf die Laufzeit aus, daß die Verwendung des erweiterten Verfahrens vorzuziehen ist. Für alle Untergruppen dieser maximalen Gruppen gilt dann die gleiche Aussage, wie man am Beispiel der Gruppe T_{281} ablesen kann. T_{281} ist maximale Untergruppe der Gruppe T_{289}, welche ebenfalls maximal in S_{12} ist. Wir haben in das erweiterte Verfahren zusätzlich eine Liste implementiert, die über Anzahl und Länge der Blöcke der transitiven Gruppen Auskunft gibt. Mit Hilfe dieser Liste erhalten wir im Untergruppengitter eine Abschätzung von „oben“, während modulo p Faktorisierung eine Abschätzung von „unten“ darstellt. Dies ist der Grund für die guten Laufzeiten für die Gruppen T_{77}^{+} und T_{43}^{+}. Alle anderen Permutationsgruppen konnten in diesen Fällen eliminiert werden. Ein Einstieg in das Untergruppengitter ist für diese Gruppen nicht mehr nötig. Zum Schluß möchten wir noch eine Bemerkung über die Erweiterungen SE1 und SE2 machen. Wir geben im Fall $n = 12$ der Erweiterung $SE1$ den Vorzug, da bei einer Gruppe mit mehreren Blocksystemen eine Vielzahl von Galoisgruppenberechnungen durchgeführt werden muß, die länger dauern kann, als der Einstieg an höherer Stelle und Durchlauf des Untergruppengitters der S_{12}. Auch gibt es eine ganze Reihe von Gruppen, die für die Erweiterungen $SE1$ und $SE2$ den gleichen Einstiegspunkt besitzen.

Kapitel 7

Beispiele

Die Leistungsfähigkeit des Algorithmus der Galoisgruppenberechnung wollen wir anhand einiger Beispiele verdeutlichen. Die Berechnungen wurden auf einer Hewlett Packard HP 9000 Series 735/100 mit 160 MB RAM und maximal 60 MB für einen Prozeß unter HP-UX 9.05 durchgeführt.
Für Polynome vom Grad $n \leq 7$ vergleichen wir unsere Implementierung im Computeralgebra-System KANT V4 [16] mit anderen Systemen. Die Systeme GAP [31], PARI [29] und MAPLE [23] sind alle auf dem obigen Rechner installiert. Dabei bedeutet S das Verfahren von Stauduhar inklusive modulo p Berechnung, während SVN die Verwendung von verkürzten Nebenklassenrepräsentanten für den Abstieg der S_n bzw. A_n in die maximalen Untergruppen andeuten soll. Befindet sich in dieser Spalte ein „-“, so bedeutet dies für die Grade $n \leq 5$, daß hier keine verkürzten Nebenklassenrepräsentanten betrachtet wurden. Bei größeren Graden handelt es sich in diesem Fall um ein total reelles Polynom. Für Grad 12 vergleichen wir die in Kapitel 6 beschriebene Erweiterung des Verfahrens $SE1$ mit der Verwendung von verkürzten Nebenklassenrepräsentanten. Die Zeiten werden, wenn nicht anders gekennzeichnet, in Sekunden angegeben.

Tabelle 7.1: Laufzeitvergleich bis Grad 7

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI	MAPLE	GAP
$S_3 = T_2$	$t^3 + 2$	0.0	-	0.0	0.0	1.3
$A_3 = T_1^+$	$t^3 + t^2 - 2t - 1$	0.0	-	0.0	0.0	1.7
$S_4 = T_5$	$t^4 + t + 1$	0.1	-	0.2	0.1	1.0
$A_4 = T_4^+$	$t^4 + 8t + 12$	0.1	-	0.3	0.1	1.8
T_3	$t^4 - 2$	0.2	-	0.4	0.2	4.4
T_2^+	$t^4 + 1$	0.2	-	0.6	0.2	6.2
T_1	$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	0.2	-	0.2	0.3	6.9
$S_5 = T_5$	$t^5 - t + 1$	0.1	-	0.2	0.1	1.5
$A_5 = T_4^+$	$t^5 + 20t + 16$	0.1	-	0.2	0.1	1.8
T_3	$t^5 + 2$	0.2	-	0.2	0.1	> 60
T_2^+	$t^5 - 5t + 12$	0.3	-	0.6	0.3	4.5
T_1^+	$t^5 + t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 3t + 1$	0.3	-	0.3	0.6	9.0
$S_6 = T_{16}$	$t^6 + t + 1$	0.1	-	0.5	0.3	1.4
$A_6 = T_{15}^+$	$t^6 + 24t - 20$	0.1	-	1.3	0.2	2.7
T_{14}	$t^6 + 10t^5 + 55t^4 + 140t^3 + 175t^2$ $-3019t + 25$	0.7	0.5	0.8	11.0	> 60
T_{13}	$t^6 + 2t^4 + 2t^3 + t^2 + 2t + 2$	0.5	0.4	0.7	0.4	7.3
T_{12}^+	$t^6 + 10t^5 + 55t^4 + 140t^3 + 175t^2$ $+170t + 25$	0.5	0.4	0.3	0.5	17.5
T_{11}	$t^6 + 2t^2 + 2$	0.5	0.4	1.1	0.6	13.2
T_{10}^+	$t^6 + 6t^4 + 2t^3 + 9t^2 + 6t - 4$	0.5	0.3	0.9	0.5	10.3
T_9	$t^6 + 2t^3 - 2$	0.5	0.3	1.2	1.0	23.5
T_8	$t^6 - 3t^5 + 6t^4 - 7t^3 + 2t^2 + t - 4$	0.8	0.7	1.3	2.6	> 60
T_7^+	$t^6 - 4t^2 - 1$	0.6	0.3	0.8	0.7	9.8
T_6	$t^6 - 3t^2 + 1$	0.6	0.4	1.0	0.7	10.9
T_5	$t^6 + 3t^3 + 3$	0.7	0.4	1.3	1.6	20.7
T_4^+	$t^6 - 3t^2 - 1$	0.6	0.6	1.2	1.1	13.2
T_3	$t^6 + 2$	0.7	0.5	0.7	0.4	9.3
T_2	$t^6 + 108$	0.7	0.5	1.2	0.7	12.2
T_1	$t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	0.7	0.5	2.2	0.7	8.1
$S_7 = T_7$	$t^7 + t + 1$	0.1	-	3.6	0.7	1.9
$A_7 = T_6^+$	$t^7 + 7t^4 + 14t + 3$	0.1	-	2.2	0.5	1.3
T_5^+	$t^7 - 7t^3 + 14t^2 - 7t + 1$	0.8	0.7	9.5	3.2	24.7
T_4	$t^7 + 2$	1.7	0.7	5.8	4.1	19.5
T_3^+	$t^7 - 14t^5 + 56t^3 - 56t + 22$	0.6	-	13.0	2.2	29.2
T_2	$t^7 + 7t^3 + 7t^2 + 7t - 1$	1.6	0.8	10.8	0.5	11.9
T_1^+	$t^7 + t^6 - 12t^5 - 7t^4 + 28t^3 + 14t^2 - 9t + 1$	0.7	-	8.6	0.5	14.5

Tabelle 7.2: Laufzeitvergleich Grad 8

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
$S_8 = T_{50}$	$t^8 + t - 1$	0.1	0.1	0.2
$A_8 = T_{49}^+$	$t^8 + 6t^4 - 8t + 8$	0.1	0.1	0.2
T_{48}^+	$t^8 + 7t^2 + 2t + 7$	1.2	1.2	2.8
T_{47}	$t^8 - 8t^5 + 8t^4 + 8$	0.9	0.8	1.4
T_{46}	$t^8 + 8t^5 - 9t^4 + 16t^2 - 36t + 9$	1.0	1.0	1.6
T_{45}^+	$t^8 - 6t^6 + 8t^5 + 321t^4 - 864t^3 + 900t^2 - 432t + 81$	1.0	0.9	1.9
T_{44}	$t^8 - 3t^4 - t^2 - 1$	0.9	0.8	1.3
T_{43}	$t^8 + t^7 + 7t^2 + t + 1$	4.0	1.4	2.6
T_{42}^+	$t^8 + 7t^4 - 8t^3 + 9$	1.0	1.0	1.7
T_{41}^+	$t^8 + 24t^5 - 12t^4 + 48t^2 - 18$	0.9	0.9	2.0
T_{40}	$t^8 - 8t^6 + 18t^4 - 54$	1.0	0.7	1.6
T_{39}^+	$t^8 + t^6 + 1$	1.1	0.8	1.4
T_{38}	$t^8 + 4t^6 + 108$	1.2	1.1	1.6
T_{37}^+	$t^8 - 2t^7 - 14t^6 + 70t^5 - 140t^4 + 154t^3$ $+3073t^2 - 3590t + 16756$	1.2	1.2	3.2
T_{36}^+	$t^8 + 243594036t^6 + 1934500632624t^5 + 29635819628209830t^4$ $+203774949685874022624t^3 + 2988168234396894632781684t^2$ $+8779374238787472347934586416t$ $+3754198291770299463594823174860 9$	10.0	10.0	6.2
T_{35}	$t^8 + 3t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 3$	0.9	0.8	1.7
T_{34}^+	$t^8 + 72t^7 + 1980t^6 + 25272t^5 + 140454t^4$ $+227448t^3 + 1487484t^2 + 52488t + 6561$	1.1	1.1	2.6
T_{33}^+	$t^8 - 72t^6 + 1944t^4 - 25056t^2 + 15552t + 69984$	1.0	1.0	2.4
T_{32}^+	$t^8 - t^6 - 3t^2 + 4$	1.2	1.2	1.5
T_{31}	$t^8 + 4t^6 + 4t^4 + 3$	1.0	0.9	1.6
T_{30}	$t^8 + 4t^6 + 4t^4 - 2$	1.6	1.6	1.8
T_{29}^+	$t^8 + t^6 + t^4 - t^2 + 1$	1.2	1.1	1.7
T_{28}	$t^8 + 6t^4 - 8t^2 + 8$	0.9	0.8	1.1
T_{27}	$t^8 + 8t^6 + 2744$	1.0	0.9	1.9
T_{26}	$t^8 - t^4 + 2$	1.1	0.8	1.5
T_{25}^+	$t^8 - 196t^6 + 15582t^4 - 3136t^3 - 551348t^2$ $-93632t + 9288489$	2.0	2.0	3.9
T_{24}^+	$t^8 + 4t^7 - 4t^5 - 4t^2 + 2$	1.0	1.0	1.7
T_{23}	$t^8 + 16t^6 - 10584$	1.0	1.0	1.9
T_{22}^+	$t^8 - 32t^6 + 384t^4 - 12120t^2 + 432t + 3448$	1.2	1.2	2.6
T_{21}	$t^8 - 2t^6 + t^4 + 5$	1.3	1.3	1.3
T_{20}^+	$t^8 - 8t^6 + 24t^4 - 160t^2 + 384t - 272$	1.2	1.2	2.5

Tabelle 7.3: Laufzeitvergleich Grad 8

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
T_{19}^{+}	$t^8 + 8t^6 + 16t^4 + 16$	1.1	1.0	1.8
T_{18}^{+}	$t^8 - t^6 - t^4 - t^2 + 1$	0.9	0.9	1.5
T_{17}	$t^8 + 39t^6 + 1265472$	1.3	1.3	2.2
T_{16}	$t^8 + 5t^6 + 125$	1.3	1.2	1.4
T_{15}	$t^8 - 3$	0.9	0.8	1.3
T_{14}^{+}	$t^8 + 60t^6 + 1350t^4 + 461500t^2 + 50625$	1.3	1.1	2.2
T_{13}^{+}	$t^8 + 4t^6 + 36$	1.0	1.0	1.4
T_{12}^{+}	$t^8 + 72t^6 + 828t^4 + 1008t^2 + 324$	0.9	0.8	1.7
T_{11}^{+}	$t^8 + 9$	1.4	1.2	1.1
T_{10}^{+}	$t^8 - 32t^6 + 384t^4 - 2368t^2 + 1920t + 1216$	1.2	1.2	2.4
T_{9}^{+}	$t^8 + 2t^4 + 4$	1.4	1.3	1.1
T_{8}	$t^8 - 2$	0.9	0.7	1.3
T_{7}	$t^8 - 10t^6 + 25t^4 - 20t^2 + 5$	0.7	0.7	1.7
T_{6}	$t^8 + 2$	1.0	0.9	1.5
T_{5}^{+}	$t^8 - 24t^6 + 108t^4 - 144t^2 + 36$	1.0	1.0	2.0
T_{4}^{+}	$t^8 + 3t^4 + 1$	1.2	1.1	1.0
T_{3}^{+}	$t^8 - t^4 + 1$	0.9	0.8	1.0
T_{2}^{+}	$t^8 + 1$	1.2	1.2	0.9
T_{1}	$t^8 - 16t^6 + 40t^4 - 32t^2 + 8$	0.9	0.9	1.7

Tabelle 7.4: Laufzeitvergleich Grad 9

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
$S_9 = T_{34}$	$t^9 - t - 1$	0.1	0.1	0.5
$A_9 = T_{33}^{+}$	$t^9 + 27t - 24$	0.1	0.1	0.3
T_{32}^{+}	$t^9 + t^7 + 2t^5 + 4t^3 - t^2 + t + 1$	10.2	1.6	9.6
T_{31}	$t^9 - 2t^7 - 2t^6 - t^5 - t^4 + 4t^3 + 5t^2 + 4t + 1$	1.1	1.0	1.8
T_{30}^{+}	$t^9 + 2t^5 + 4t^4 + 4t^3 + 4t^2 + t + 1$	1.0	1.0	1.6
T_{29}	$t^9 - 6t^6 - 18t^5 + 36t^4 - 36t^3 + 108t^2 - 144t + 48$	1.1	1.0	1.7
T_{28}	$t^9 - 2t^7 - 2t^6 - t^5 - 2t^4 + 3t^2 + 3t + 1$	1.1	1.0	1.9
T_{27}^{+}	$t^9 - 12t^6 - 18t^5 + 36t^2 - 27t - 128$	11.9	2.2	9.9
T_{26}	$t^9 - t^7 + 5t^6 + t^5 - 2t^4 + 4t^3 + 3t^2 - t - 1$	3.1	1.3	4.2
T_{25}^{+}	$t^9 - 9t^6 - 9t^4 + 24t^3 + 9t^2 - 9t + 1$	1.2	1.1	1.9
T_{24}	$t^9 - 2t^6 - 2t^3 - 2$	1.3	1.2	1.7

Tabelle 7.5: Laufzeitvergleich Grad 9

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
T_{23}^+	$t^9 + 9t^7 - 60t^6 + 72t^5 + 354t^3 - 495t^2 + 2124t - 845$	5.7	1.0	19.5
T_{22}	$t^9 - 12t^6 - 27t^5 - 18t^4 + 9t^3 + 36t - 8$	1.4	1.2	1.9
T_{21}^+	$t^9 + 3t^6 + 3t^3 - 2$	1.5	1.0	1.7
T_{20}	$t^9 - 2t^7 - 2t^6 - 2t^5 + t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 3t + 1$	1.1	1.0	1.8
T_{19}	$t^9 - 3t^8 - 24t^5 - 24t^4 - 48t + 16$	5.1	1.1	4.3
T_{18}	$t^9 - 2t^6 - 2t^3 - 1$	1.3	1.2	1.6
T_{17}^+	$t^9 - 17t^7 - 6t^6 + 87t^5 + 47t^4 - 143t^3 - 69t^2 + 72t + 27$	1.1	1.1	1.9
T_{16}	$t^9 - 2t^7 + 3t^6 + t^5 - t^4 - 2t^3 + t + 1$	5.0	1.1	4.0
T_{15}	$t^9 - 9t^7 - 21t^6 + 72t^5 + 99t^4 - 99t^3 - 585t^2 + 549t + 166$	5.7	1.3	4.7
T_{14}^+	$t^9 - 14t^7 - 40t^6 - 9t^5 + 70t^4 + 306t^3 - 270t^2 - 79t - 10$	5.8	1.2	20.7
T_{13}	$t^9 - 2t^6 - t^3 + 1$	1.3	1.1	1.5
T_{12}	$t^9 + t^8 + t^7 + 4t^6 - 2t^5 - t^4 + 3t^3 + t^2 - 1$	1.1	1.0	2.0
T_{11}^+	$t^9 - t^6 + 5t^3 + 1$	1.6	1.3	1.8
T_{10}^+	$t^9 - 2$	1.8	1.2	1.5
T_9^+	$t^9 - 3t^8 + 6t^7 - 18t^6 - 9t^5 + 87t^4 - 54t^3 - 18t^2 + 36t + 12$	5.8	1.3	19.5
T_8	$t^9 - 2t^7 - t^6 - 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 2t + 1$	1.4	1.2	2.0
T_7^+	$t^9 - 232t^7 - 9t^6 + 7485t^5 + 8631t^4 - 3097t^3 - 738t^2 + 325t - 27$	1.2	1.1	2.5
T_6^+	$t^9 + t^8 - 32t^7 - 84t^6 - 14t^5 + 112t^4 + 84t^3 + 4t^2 - 8t - 1$	1.1	1.0	2.2
T_5^+	$t^9 + 3t^6 + 3t^3 - 1$	1.6	1.3	1.5
T_4	$t^9 + 4t^6 + 3t^3 - 1$	1.1	0.9	1.3
T_3^+	$t^9 + 9t^7 - 6t^6 + 27t^5 - 36t^4 + 27t^3 - 54t^2 - 32$	1.7	1.5	1.8
T_2^+	$t^9 - 15t^7 + 4t^6 + 54t^5 - 12t^4 - 38t^3 + 9t^2 + 6t - 1$	1.0	1.0	2.3
T_1^+	$t^9 - 9t^7 + 27t^5 - 30t^3 + 9t - 1$	1.3	1.1	1.9

Tabelle 7.6: Laufzeitvergleich Grad 10

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
$S_{10} = T_{45}$	$t^{10} + t + 1$	0.1	0.1	0.2
$A_{10} = T_{44}^+$	$t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - 2t^3 + 2t^2 + t - 1$	0.1	0.1	0.2

Tabelle 7.7: Laufzeitvergleich Grad 10

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
T_{43}	$t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - 2t^6 - 2t^5 - t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$	1.2	1.0	2.4
T_{42}^+	$t^{10} + 10t^6 - 8t^5 - 25t^2 + 40t - 16$	1.1	1.0	2.7
T_{41}	$t^{10} + 2t^9 + 4t^8 - t^6 + t^4 - 2t - 1$	1.0	0.8	2.6
T_{40}	$t^{10} + t^9 - t^8 - t^7 - 2t^6 + 2t^3 + 3t^2 + t + 1$	1.2	1.1	2.3
T_{39}	$t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - 2t^6 - 2 + t^5 + 2t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 1$	1.2	1.2	3.2
T_{38}	$t^{10} - 2t^8 - t^6 - 2t^4 + 2t^2 - 2$	1.1	1.1	3.0
T_{37}^+	$t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - t^6 - t^5 - t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 1$	2.2	1.5	3.5
T_{36}	$t^{10} - 2t^8 - t^6 + 3t^4 - t^2 + 2$	1.3	1.1	2.9
T_{35}	$t^{10} + 300t^6 - 18t^5 + 10000t^2 - 200t + 81$	36.0	3.8	30.6
T_{34}^+	$t^{10} - t^8 - 2t^6 - t^4 + t^2 - 1$	1.3	1.2	2.7
T_{33}	$t^{10} - 2t^9 + 12t^8 - 20t^7 + 66t^6 - 20t^5 + 228t^4 + 84t^3 + 276t^2 + 120t + 100$	1.5	1.2	2.8
T_{32}	$t^{10} - 9t^8 + 27t^6 + 2t^5 - 27t^4 - 9t^3 + 8t + 1$	25.3	1.6	26.3
T_{31}^+	$t^{10} - 1800t^8 - 24000t^7 + 1422000t^6 + 30960000t^5 - 462480000t^4 - 14500800000t^3 + 12996000000t^2 + 2414368000000t - 12197187420489$	31.2	3.6	31.1
T_{30}	$t^{10} + 90t^6 - 648t^5 + 1080t^4 - 2160t^3 + 3645t^2 + 5400t + 12960$	38.1	5.0	31.2
T_{29}	$t^{10} + 2t^8 - 2t^6 - t^2 + 2$	1.3	1.1	3.1
T_{28}^+	$t^{10} - 10t^7 + 10t^6 + 36t^5 + 50t^4 - 10t^3 - 1$	1.2	1.1	3.0
T_{27}	$t^{10} + 3t^6 - 2t^5 + t^2 + 2t + 1$	1.2	1.0	3.0
T_{26}^+	$t^{10} - 15t^8 - 75t^6 - 6t^5 - 165t^4 - 30t^3 - 180t^2 - 50t - 90$	30.1	1.8	29.7
T_{25}	$t^{10} - 2t^8 - 2t^6 - t^2 - 2$	1.2	1.1	3.2
T_{24}^+	$t^{10} + t^8 - t^4 + 3t^2 - 1$	1.3	1.2	2.8
T_{23}	$t^{10} - 2t^8 - t^7 + 3t^6 + 2t^5 - 2t^4 - 2t^3 + 2t^2 + 3t + 1$	1.4	1.2	3.0
T_{22}	$t^{10} - 2t^8 - 2t^7 - t^6 + t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 1$	1.3	1.2	2.5
T_{21}	$t^{10} + t^6 - 2t^5 - t^4 + 3t^2 - 2t + 1$	1.2	1.1	2.5
T_{20}	$t^{10} - 3t^9 + t^8 + 36t^7 - 39t^6 - 105t^5 + 99t^4 + 180t^3 - 45t^2 - 135t - 45$	1.6	1.3	3.9
T_{19}	$t^{10} - 10t^8 + 35t^6 - 2t^5 - 50t^4 + 10t^3 + 25t^2 - 10t + 2$	1.4	1.3	2.8
T_{18}^+	$t^{10} + 60t^6 - 240t^5 + 850t^2 - 5440t - 1088$	1.4	1.6	3.4
T_{17}	$t^{10} - 2t^5 - 2$	1.1	1.0	2.5
T_{16}	$t^{10} + 7t^8 + 17t^6 - 31t^4 - 40t^2 + 127$	3.3	1.7	3.8

Tabelle 7.8: Laufzeitvergleich Grad 10

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
T_{15}^+	$t^{10} - t^8 - 2t^6 + t^4 + 3t^2 - 1$	1.1	1.0	3.2
T_{14}	$t^{10} + t^8 - 4t^6 - 3t^4 + 3t^2 + 1$	1.2	1.1	2.9
T_{13}	$t^{10} - 2t^8 - t^7 - 2t^6 + t^5 + 3t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1$	28.9	1.8	32.0
T_{12}	$t^{10} + 2t^9 + 3t^8 - t^6 - 2t^5 - t^4 + 3t^2 + 2t + 1$	1.7	1.5	2.3
T_{11}	$t^{10} + 10t^6 + 25t^2 - 8$	1.4	1.2	2.1
T_{10}	$t^{10} - 2t^5 - 4$	1.4	1.1	1.9
T_9	$t^{10} - 50t^8 - 100t^7 + 865t^6 + 4036t^5 + 4100t^4$ $+16400t^2 + 13120t + 2624$	1.5	1.2	3.0
T_8^+	$t^{10} - 4t^8 + 2t^6 + 5t^4 - 2t^2 - 1$	1.1	1.0	3.6
T_7^+	$t^{10} - 2t^5 - 15t^4 - 10t^3 - 15t^2 - 5$	28.8	1.5	28.1
T_6	$t^{10} + 4t^9 - 40t^8 - 26t^7 + 252t^6 + 110t^5 - 405t^4$ $-128t^3 + 98t^2 + 36t + 1$	1.2	1.1	4.0
T_5	$t^{10} - 2$	1.0	0.9	1.6
T_4	$t^{10} - t^5 - 1$	1.1	1.0	2.0
T_3	$t^{10} - t^8 - t^6 + 3t^4 + 2t^2 + 1$	1.1	1.0	1.7
T_2	$t^{10} - 35t^6 + 130t^4 + 160$	1.2	1.1	2.6
T_1	$t^{10} + t^9 + t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$	1.1	0.9	1.5

Tabelle 7.9: Laufzeitvergleich Grad 11

Gruppe	Polynom	S	S VN	PARI
$S_{11} = T_8$	$t^{11} - x - 1$	0.1	0.1	1.0
$A_{11} = T_7^+$	$t^{11} - 132x - 120$	0.1	0.1	0.5
T_6^+	$t^{11} - t^{10} - 121t^9 + 65t^8 + 5345t^7 - 481t^6$ $-96739t^5 - 23689t^4 + 413690t^3$ $-493810t^2 + 26910t - 856170$	113.3	8.6	75.1
T_5^+	$t^{11} + 44t^9 - 1133t^8 + 3597t^7 + 18161t^6$ $-105215t^5 + 74514t^4 + 690767t^3$ $-1435929t^2 + 138600t + 53994$	114.9	5.3	74.4
T_4	$t^{11} - 2$	3h	16.0	2822.0
T_3^+	$t^{11} - 33t^9 + 396t^7 - 2079t^5 + 4455t^3$ $-2673t - 243$	92.4	-	56.0
T_2	$t^{11} - t^{10} + 5t^9 - 4t^8 + 10t^7 - 6t^6 + 11t^5 - 7t^4$ $+9t^3 - 4t^2 + 2t + 1$	3h	14.0	2819.0
T_1^+	$t^{11} + t^{10} - 10t^9 - 9t^8 + 36t^7 + 28t^6 - 56t^5$ $-35t^4 + 35t^3 + 15t^2 - 6t - 1$	90.0	-	54.0

Tabelle 7.10: Laufzeitvergleich Grad 12

Gruppe	Polynom	SE1	S VN
T_{299}	$t^{12}+4t^7+4t^2+2$	6.5	2.3
T^+_{295}	$t^{12}+75t^8+750t^6-5625t^4-23250t^2-30000t+50625$	$>$ 180	6.8
T_{293}	$t^{12}+t^{10}+t^6-3t^2-1$	4.0	2.0
T_{291}	$t^{12}+12t^9-9t^8+64t^3-144t^2+108t-27$	5.5	2.2
T_{289}	$t^{12}-27t^8+36t^7+15t^6-54t^5-45t^4+208t^3-216t^2+96t-16$	5.0	2.3
T^+_{285}	$t^{12}+2t^6+3t^4+4t^2+1$	4.5	2.6
T^+_{277}	$t^{12}+3t^6+3t^2+4$	8.0	3.0
T_{270}	$t^{12}+4t^8-6t^6+6t^4-2t^2+8$	11.0	4.0
T_{260}	$t^{12}-2t^8+t^6+t^4-t^2-1$	8.0	2.4
T_{258}	$t^{12}-4t^3-2$	9.2	2.8
T^+_{249}	$t^{12}+12t^{10}-24t^7-184t^6-72t^5+309t^4-32t^3+360t^2+80$	12.0	3.0
T^+_{236}	$t^{12}+2t^{10}+2t^8-3t^6-3t^4+t^2+1$	7.4	3.0
T_{222}	$t^{12}+t^{10}-t^8-5t^6-5t^4-3t^2-1$	5.5	2.2
T_{213}	$t^{12}+12t^3+27$	7.3	3.3
T^+_{203}	$t^{12}-t^{10}-t^4+t^2+1$	10.0	2.9
T^+_{191}	$t^{12}+t^{10}+2t^8-t^6+2t^4-3t^2+1$	12.0	3.5
T^+_{180}	$t^{12}+4t^{10}+6t^8+6t^6+5t^4+6t^2+1$	25.0	3.5
T_{178}	$t^{12}-10t^6-4t^3-1$	32.0	11.0
T^+_{174}	$t^{12}-8t^9-36t^8-48t^7+8t^6+144t^5+273t^4+248t^3+72t^2-96t-32$	21.0	10.5
T^+_{166}	$t^{12}+18t^{10}+135t^8+348t^6+63t^4-512t^3-270t^2+729$	34.0	18.0
T^+_{161}	$t^{12}-t^8+2t^6+t^4+2t^2+1$	27.0	9.6
T_{156}	$t^{12}-10t^6-8t^3-1$	11.0	4.7
T_{135}	$t^{12}-36t^8+24t^6+108t^4-144t^2+48$	15.0	5.3
T^+_{117}	$t^{12}+4t^9+2t^6-4t^3-2$	34.0	29.5
T^+_{106}	$t^{12}+12t^{11}+60t^{10}+160t^9+240t^8+192t^7+64t^6+3$	3.6	42.0
T^+_{89}	$t^{12}-18t^8-9t^4+9$	23.0	5.0
T^+_{74}	$t^{12}-3t^{10}-3t^8+4t^6+2t^4-t^2+1$	28.0	7.4
T^+_{62}	$t^{12}-10t^{10}+32t^8-32t^6-59t^4+198t^2+196$	13.0	4.1
T^+_{58}	$t^{12}+2t^{10}-10t^8-20t^6-5t^4+4t^2+1$	13.0	3.7
T_{52}	$t^{12}-6t^{10}-9t^8-36t^6+223t^4-214t^2-23$	33.0	10.0
T_{44}	$t^{12}-6t^6-10t^3-6$	17.0	15.3
T_{39}	$t^{12}-5t^3+5$	10.0	10.0
T^+_{25}	$t^{12}-2t^{11}+2t^{10}+2t^9-4t^8+3t^6-4t^4+2t^3+2t^2-2t+1$	16.0	39.0
T_{15}	$t^{12}-12t^{10}+54t^8-112t^6+105t^4-36t^2+27$	3.7	14.0
T^+_{9}	$t^{12}+2t^{10}+2t^8-t^6+4t^4-t^2+1$	15.0	4.3
T^+_{3}	$t^{12}-3t^{10}+2t^8+t^6+2t^4-3t^2+1$	6.4	9.6
T_1	$t^{12}-t^{11}+t^{10}-t^9+t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3+t^2-t+1$	17.0	10.0

Literaturverzeichnis

[1] H. Anai, M. Noro and K. Yokoyama: *Computation of the splitting fields and the Galois groups of polynomials*; Preprint from ISIS, Fujitsu Laboratories Limited (1994); 1-14

[2] G. Butler: *The transitive groups of degree fourteen und fifteen*; J. Symbolic Comput. 16 (1993); 413-422

[3] G. Butler and J. McKay: *The transitive groups of degree up to eleven*; Comm. Algebra 11 (1983); 863-911

[4] H. Cohen: *A Course in Computational Algebraic Number Theory*; Springer-Verlag; Berlin - Heidelberg - New York (1993)

[5] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, and R.A. Wilson: *ATLAS of finite groups*; Oxford University Press (1985)

[6] J.H. Conway, A. Hulpke and J. McKay: *On transitive permutation groups*; Preprint

[7] H. Darmon and D. Ford: *Computational verification of* M_{11} *and* M_{12} *as Galois groups over* $\mathbb{Q}$; Comm.Algebra 17 (1989); 2941-2943

[8] J.D. Dixon, B. Mortimer: *Permutation groups*; Springer-Verlag; Berlin - Heidelberg - New York (1996)

[9] Y. Eichenlaub: *Problémes effectifs de théorie de Galois en degrés* 8 *à* 11; Dissertation (1996)

[10] Y. Eichenlaub and M. Olivier: *Computation of Galois groups for polynomials with degree up to eleven*; Preprint, Université Bordeaux 1 (1995)

[11] H. Geyer *Programme zur Berechnung der Galoisgruppen von Polynomen* 8. *und* 9. *Grades Dokumentation*; Preprint, Universität Heidelberg (1992)

[12] K. Girstmair: *On the Computation of Resolvents and Galois Groups*; Manuscripta Math. 43 (1983), 289-307

[13] K. Girstmair: *On Invariant Polynomials and Their Application in Field Theory*; Math. Comp. 48 (1987), 781-797

[14] A. Hulpke: *Konstruktion transitiver Permutationsgruppen*; Aachener Beiträge zur Mathematik, Band 18, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen (1996)

[15] B. Huppert: *Endliche Gruppen I*; Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1967)

[16] KANT group: *KANT V4*; erscheint im J. Symb. Comput.

[17] J. Klüners: *Über die Berechnung von Teilkörpern algebraischer Zahlkörper*; Diplomarbeit; Berlin; (1994)

[18] M.W. Liebeck, C.E. Praeger, and J. Saxl: *A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups*; J. Algebra 111 (1987), 365-383

[19] J.C. Lagarias, H.L. Montgomery & A.M. Odlyzko: *A bound for the least prime ideal in the Chebotarev density theorem*; Invent. Math. 54 (1979), 271-296

[20] F. Lorenz: *Einführung in die Algebra Teil I*; BI-Wissenschaftsverlag; Mannheim (1992)

[21] MAGMA: *Computational Algebra, J. Cannon et. al.*; john@maths.su.oz.au, Syndey, Austalia

[22] G. Malle: *Datenbank zu Polynomen kleinen Grades mit vorgegebener Galoisgruppe, im Aufbau*; Interdisziplinäres Zentrum für wissenschaftliches Rechnen, Heidelberg (1996)

[23] MAPLE: Maple V Release 3; Waterloo Maple Software

[24] J.D.P. Meldrum: *Wreath Products Of Groups And Semigroups*; Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 74 (1995)

[25] K. Meyberg: *Algebra, Teil I und II*; Carl Hanser Verlag; München - Wien (1980)

[26] J. Oesterlé: *Versions effectives du théoremè de Chebotarev sous l'hypothèse de Rieman généralisée*; Astérique 61 (1979), 165-167

[27] J.J. Rotman: *An Introduction to the Theory of Groups - Fourth Edition*; Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1995)

[28] G.F. Royle: *The transitive groups of degree twelve*; J. Symbolic Comput. 4 (1987), 255-268

[29] PARI-GP:C.Batut,D.Bernadi,H.Cohen and M.Olivier,version 1.39.13;(1996)

[30] M. Pohst und H. Zassenhaus: *Algorithmic Algebraic Number Theory*; Cambridge University Press (1989)

[31] M. Schönert et al: *Gap 3.4, patchlevel 3*; Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen (1995)

[32] L. Soicher: *The computation of Galois Groups*; Master's thesis, Concordia University, Montreal (1981)

[33] L. Soicher and J. McKay: *Computation Galois Groups over the rationals*; J. Number Theory 20 (1985), 273-281

[34] R.P. Stauduhar: *The determination of Galois Groups*; Math. Comp. 27 (1973), 981-996

[35] N. Tschebotareff: *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitionsklasse gehören*; Math. Ann. 95 (1925-1926), 191-228

[36] B.L. van der Waerden: *Algebra I*; Springer-Verlag; Berlin - Göttingen - Heidelberg (1960)

[37] K. Yokoyama: *A Modular Method for Computing the Galois Groups of Polynomials*; Preprint from ISIS, Fujitsu Laboratories Limited (1996)

Anhang I

Dieser Anhang enthält, bis auf Konjugation in der symmetrischen Gruppe S_n, die Diagramme der transitiven Permutationsgruppen vom Grad $4 \leq n \leq 12$. Die Notation der Gruppen setzt sich aus einem T, welches für transitiv steht, und einer Nummer zusammen, die man für den jeweiligen Grad [6] entnimmt. Falls es sich um eine gerade Gruppe handelt, wird dies mit einem „ + “-Exponenten vermerkt, z.B. T_{36}^{+}. Bei den verwendeten Namen beziehen wir uns ebenfalls auf [6]. Alle Graphen wurden bezüglich der Erzeuger in [6], [31] mit Hilfe von GAP [31] berechnet. Bis auf die Grade 4 und 5 haben wir die Diagramme in primitive, imprimitive gerade und imprimitive ungerade Gruppen unterteilt, wie sie in dem von uns geschriebenen Programm durchlaufen werden. Deshalb werden auch im imprimitiven Fall die Bezugsgruppen S_n und A_n mit aufgeführt. Für die Primzahlgrade 7 und 11 sind alle transitiven Gruppen primitiv, und wir erhalten nur einen Graphen. Die Gruppen sind so angeordnet, daß ihre Kardinalität mit der auf gleicher Höhe befindlichen Zahl rechts neben dem Diagramm übereinstimmt. Ist H eine maximale Untergruppe von G, so bedeutet eine durchgezogene Verbindungslinie, daß H exakt in G enthalten ist, während eine gestrichelte Linie andeuten soll, daß eine Konjugierte von H, nämlich $H' = \rho H \rho^{-1}$ exakte Untergruppe von G ist. Eine Permutation ρ mit dieser Eigenschaft kann man im Anhang II finden. Falls die Anzahl der $G-Orbits$ von $\mathfrak{C}(G,H)$ (bzw. $\mathfrak{C}(G,H')$) größer als eins ist (siehe auch 3.3.4), so wird die Anzahl an der Verbindungslinie zwischen H und G vermerkt. Bei den imprimitiven Gruppen vom Grad 12 haben wir allerdings darauf verzichtet. Nichttriviale Repräsentanten der Konjugationklassen, d.h. Permutationen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ mit $\sigma_1 H \sigma_1^{-1}, \ldots, \ldots, \sigma_r H \sigma_r^{-1} < G$ findet man ebenfalls im Anhang II.

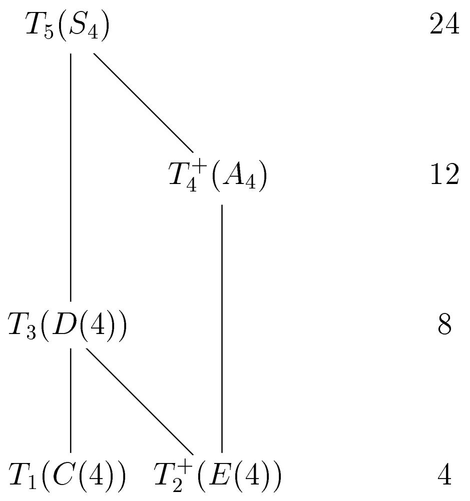

Abbildung I.1: Transitive Permutationsgruppen vom Grad 4

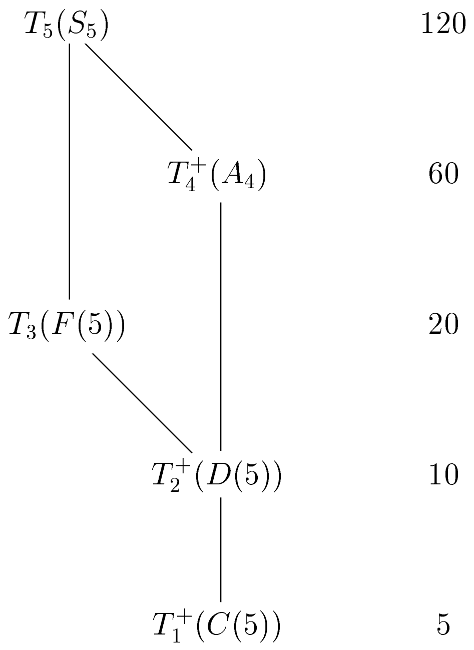

Abbildung I.2: Transitive Permutationsgruppen vom Grad 5

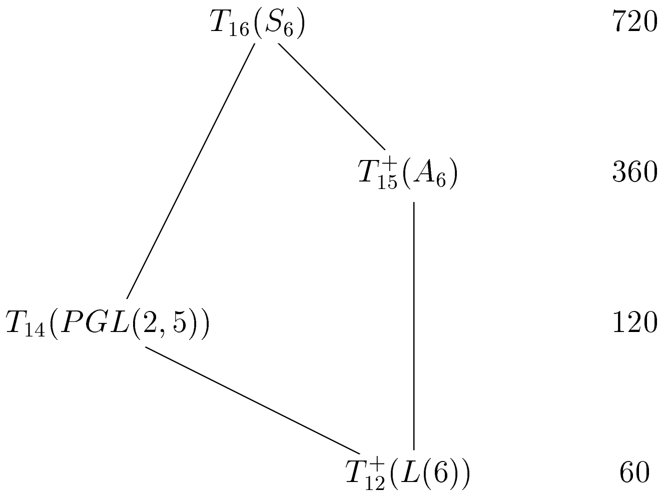

Abbildung I.3: Primitive Permutationsgruppen vom Grad 6

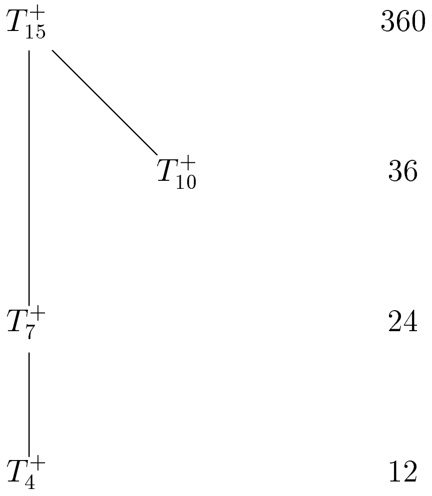

Abbildung I.4: Imprimitive gerade Permutationsgruppen vom Grad 6

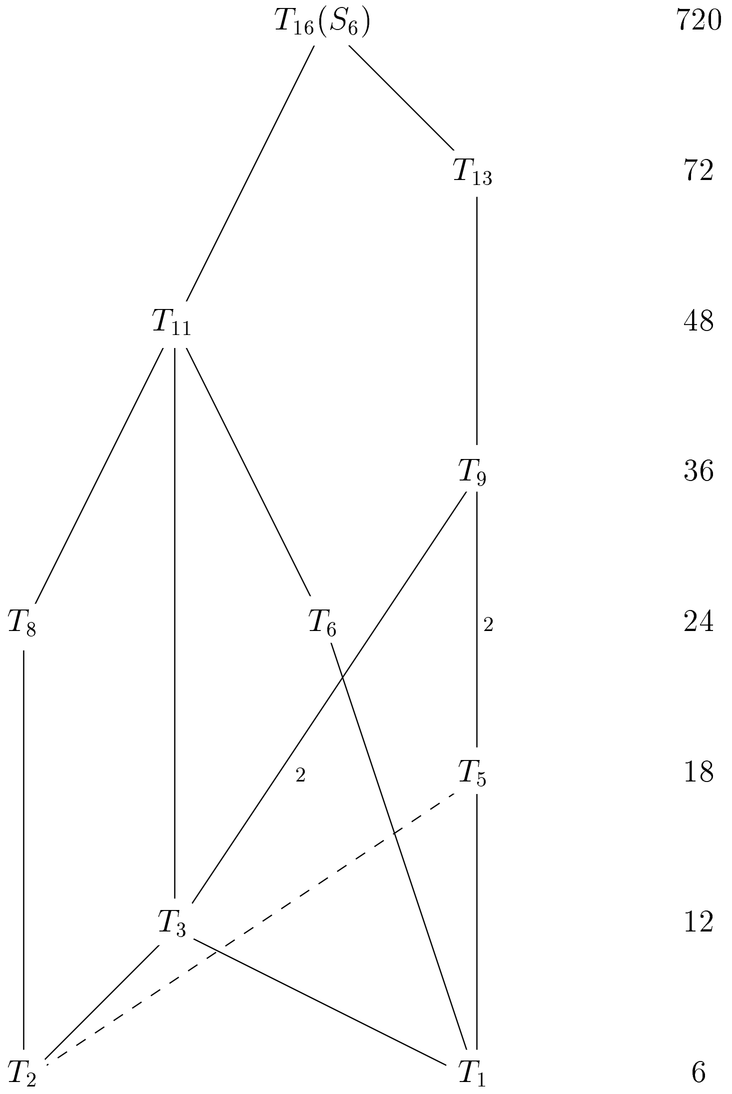

Abbildung I.5: Imprimitive ungerade Permutationsgruppen vom Grad 6

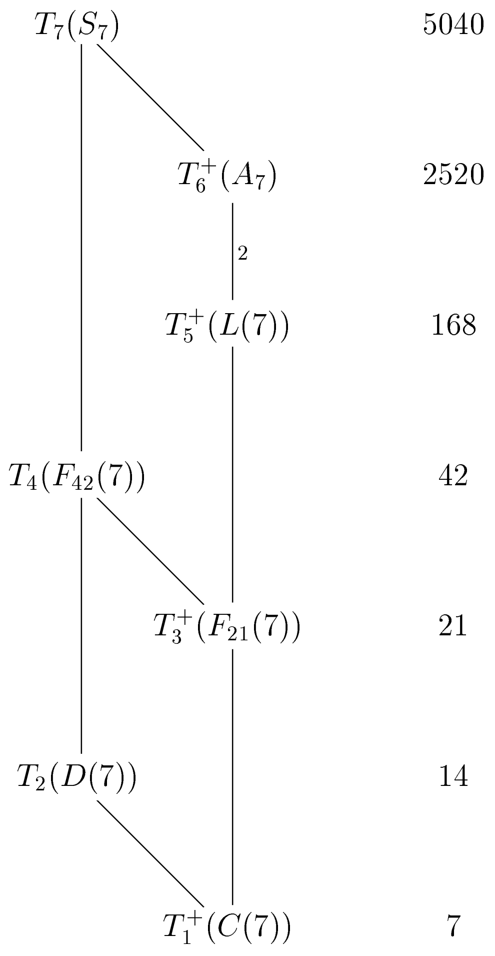

Abbildung I.6: Transitive Permutationsgruppen vom Grad 7

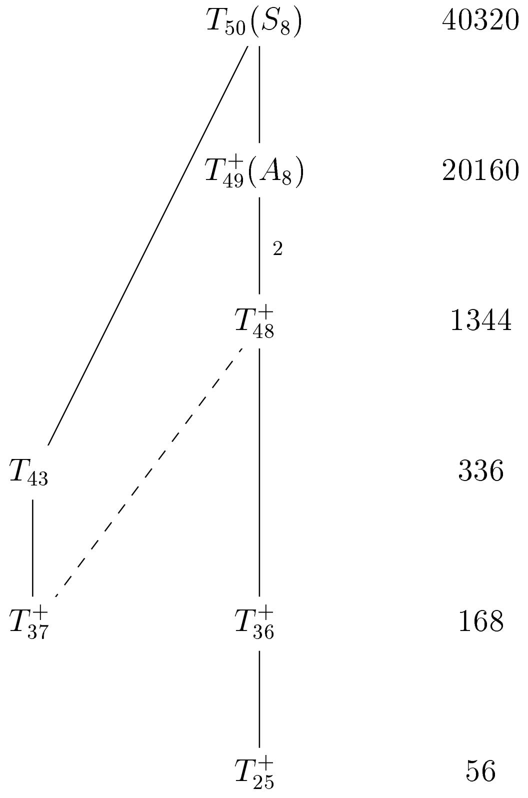

Abbildung I.7: Primitive Permutationsgruppen vom Grad 8

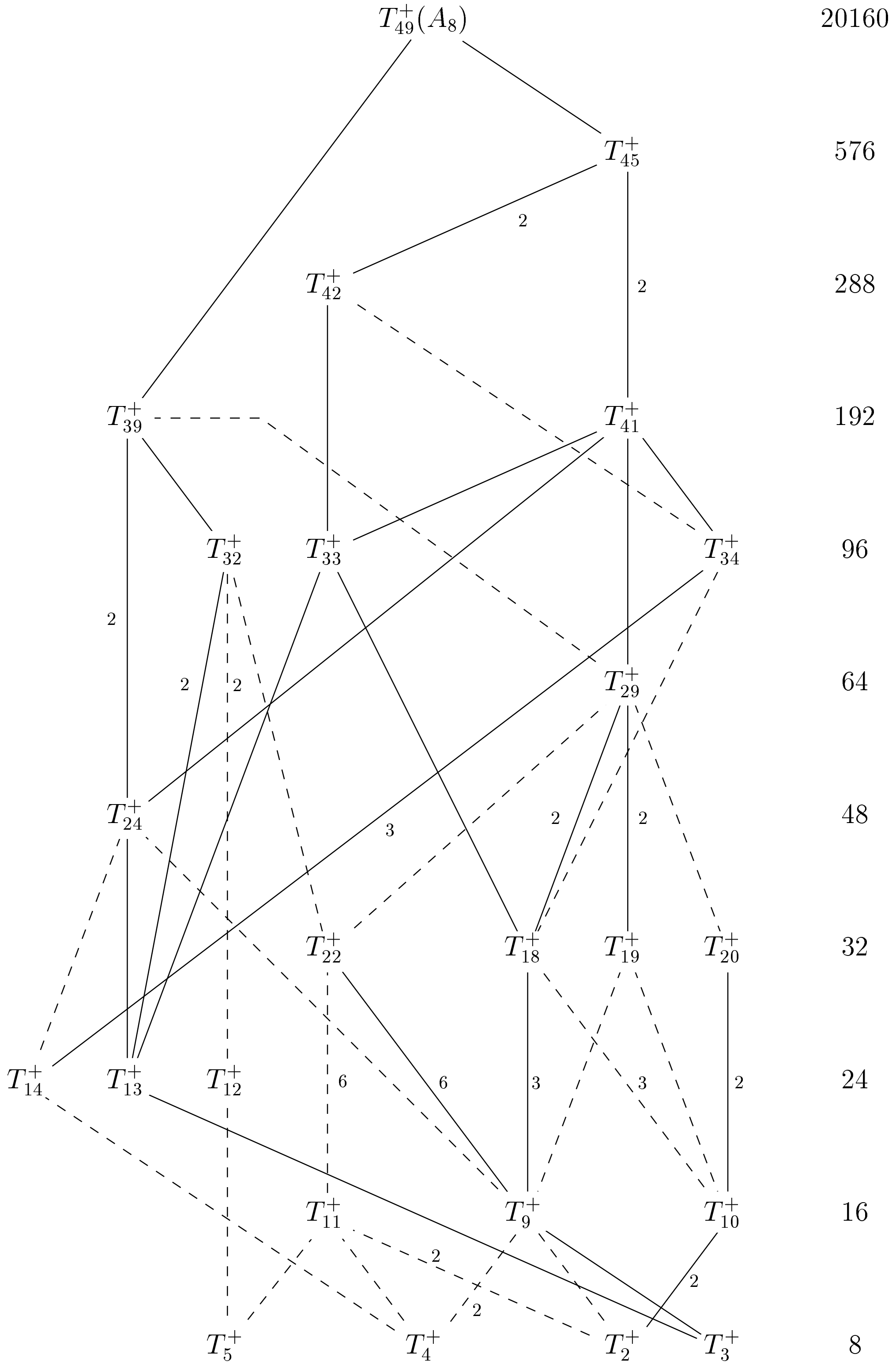

Abbildung I.8: Imprimitive gerade Permutationsgruppen vom Grad 8

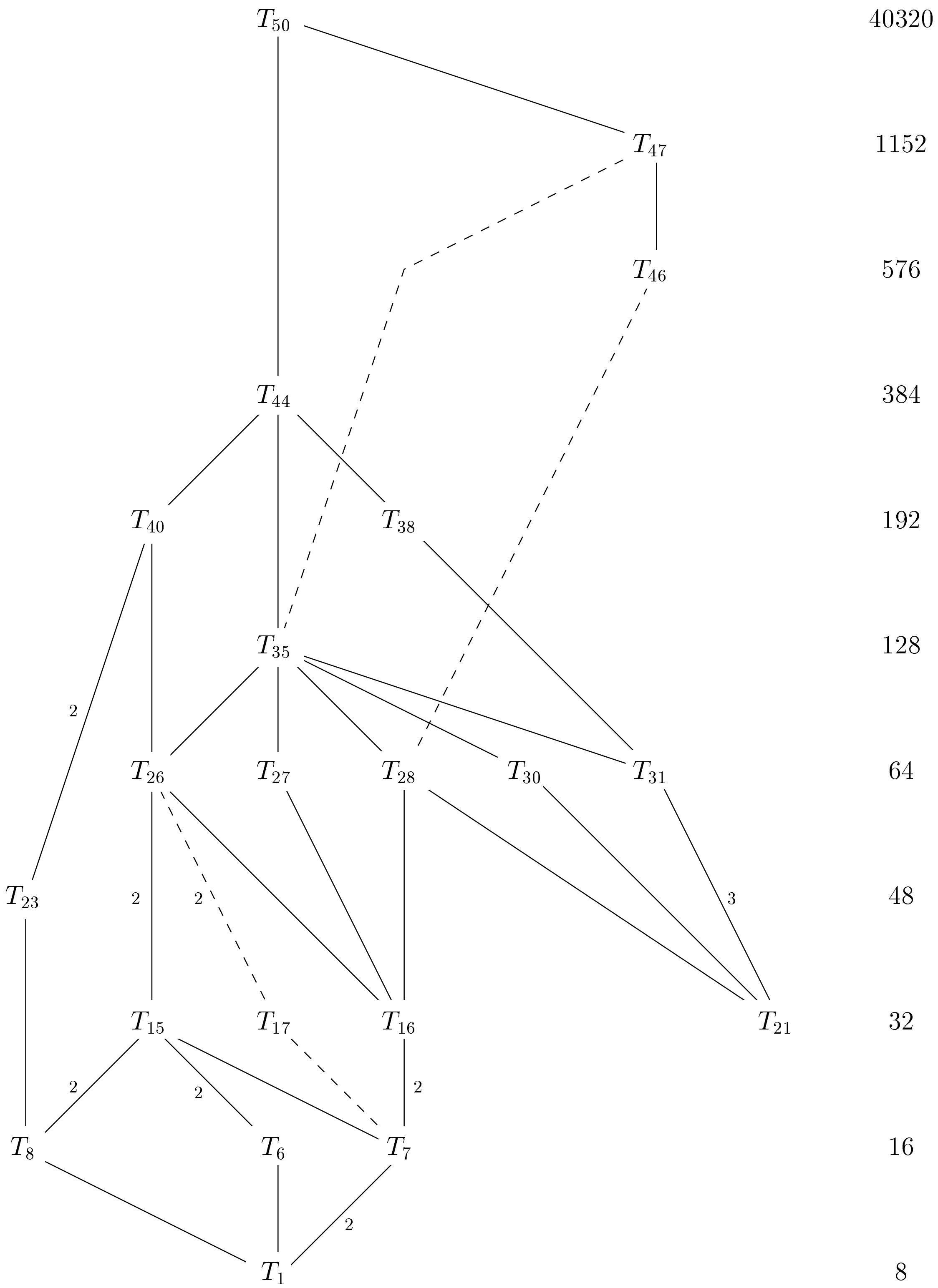

Abbildung I.9: Imprimitive ungerade Permutationsgruppen vom Grad 8

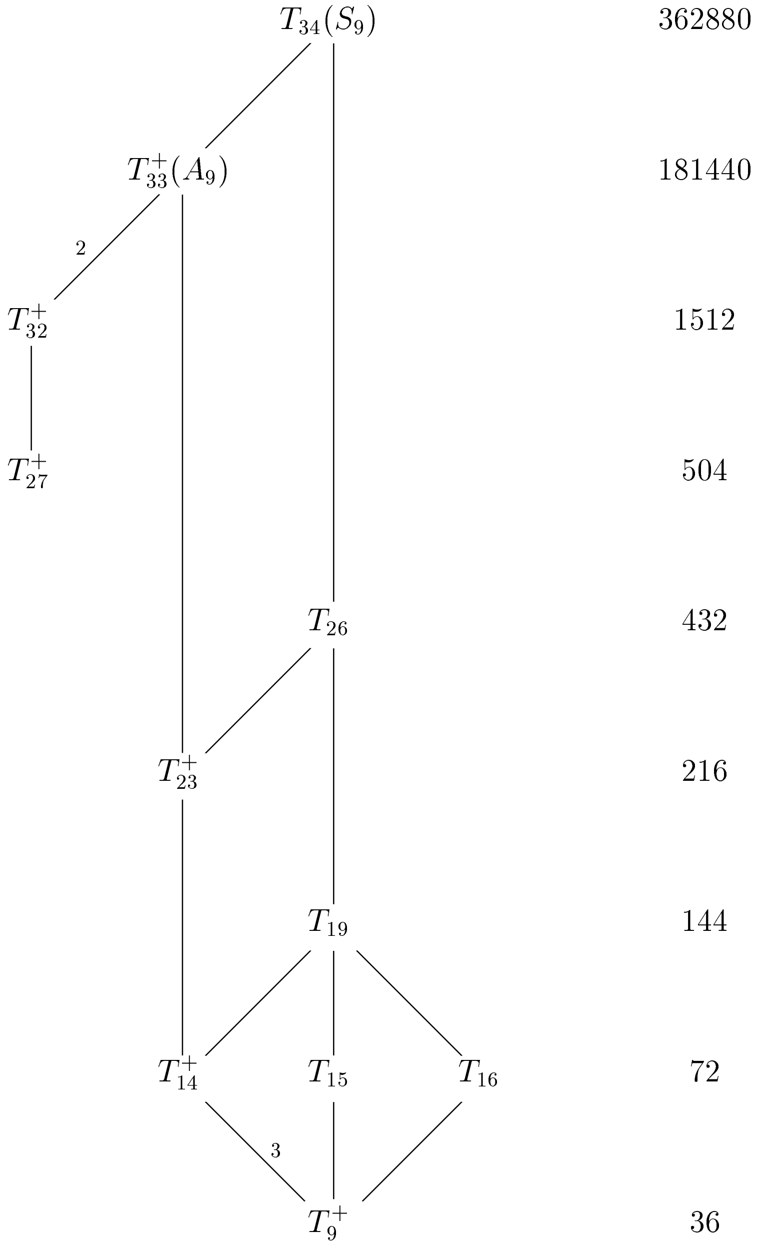

Abbildung I.10: Primitive Permutationsgruppen vom Grad 9

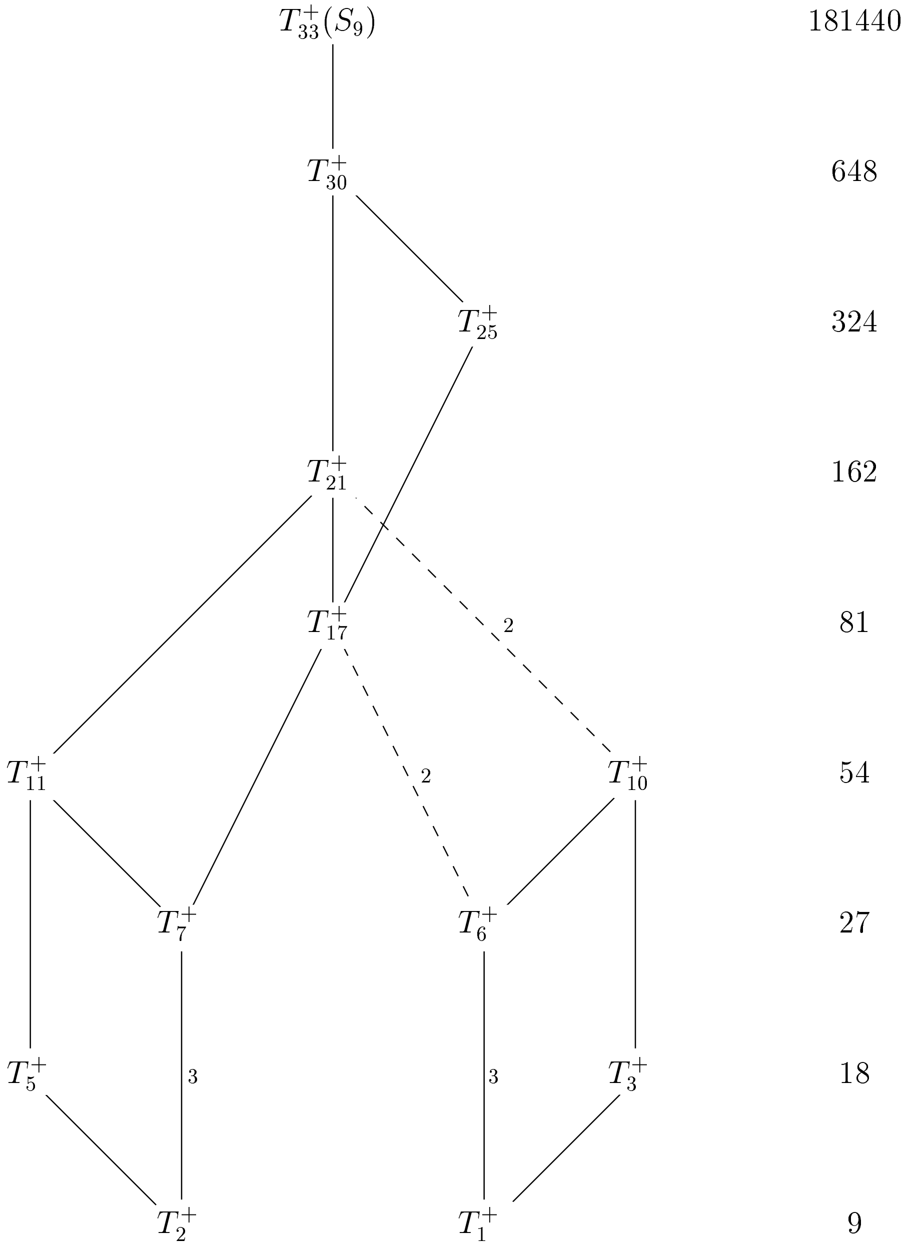

Abbildung I.11: Imprimitive gerade Permutationsgruppen vom Grad 9

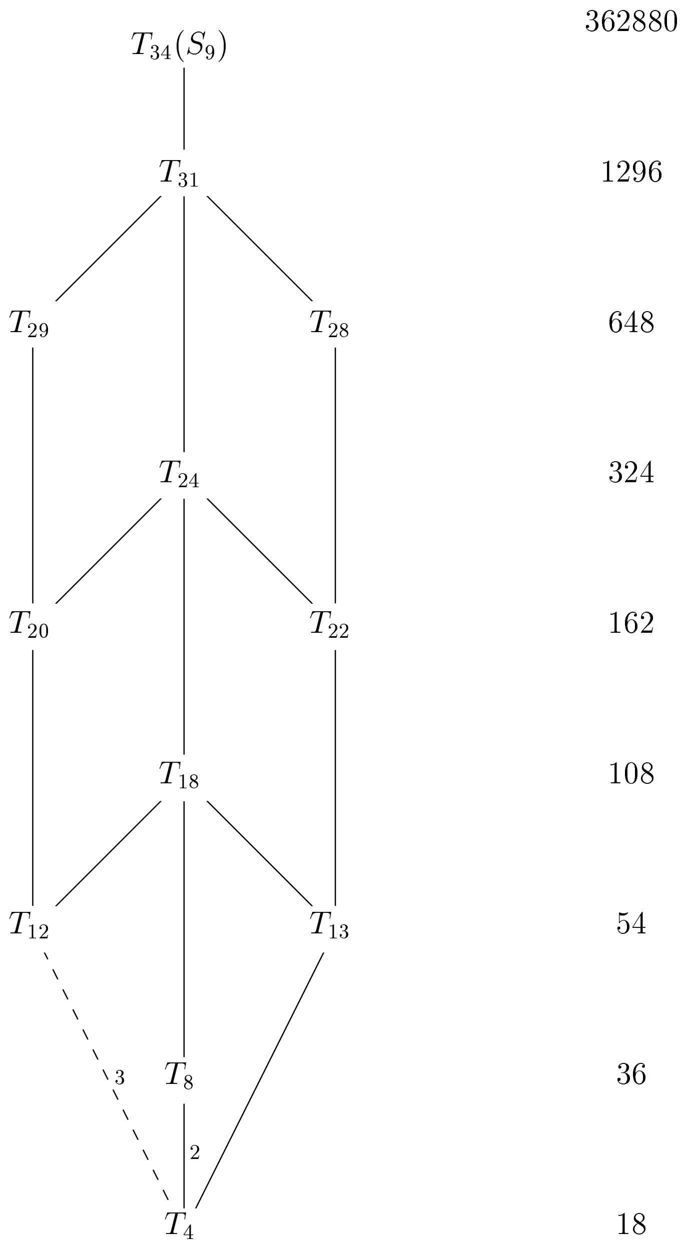

Abbildung I.12: Imprimitive ungerade Permutationsgruppen vom Grad 9

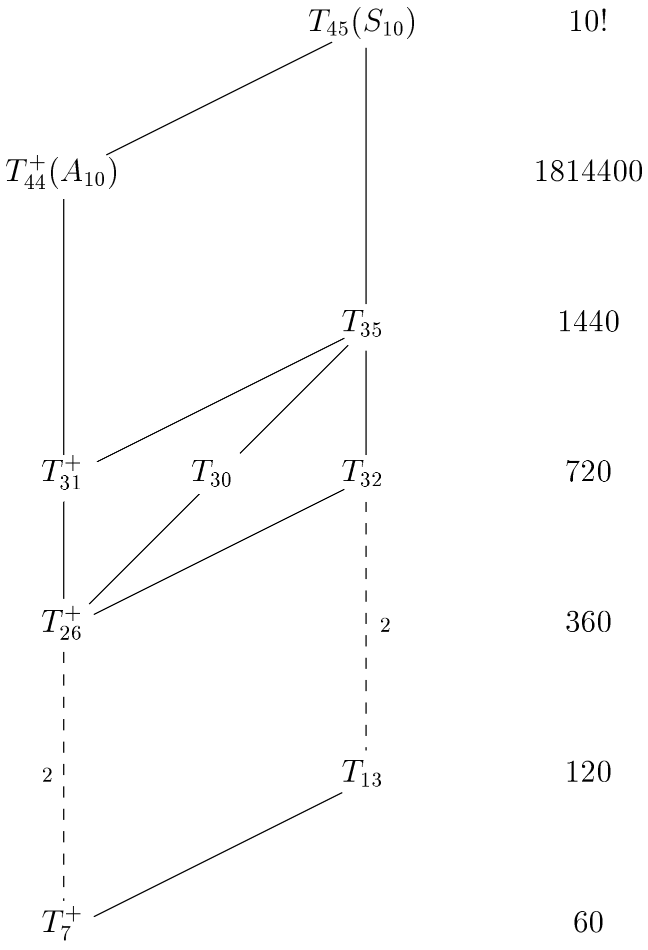

Abbildung I.13: Primitive Permutationsgruppen vom Grad 10

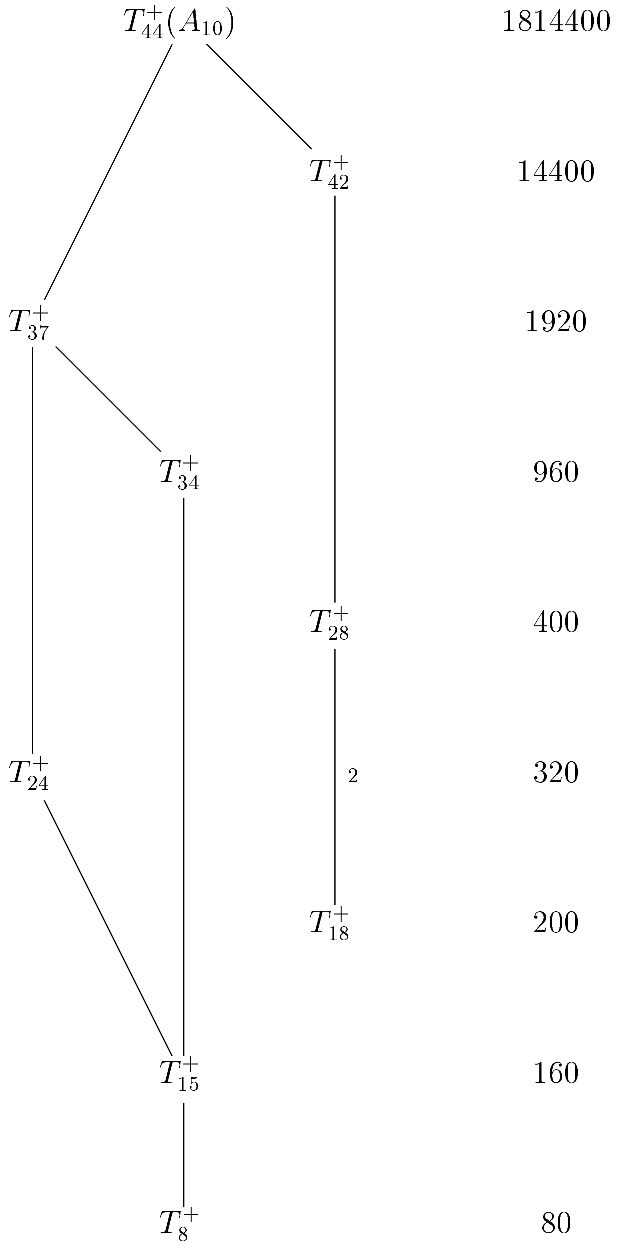

Abbildung I.14: Imprimitive gerade Permutationsgruppen vom Grad 10

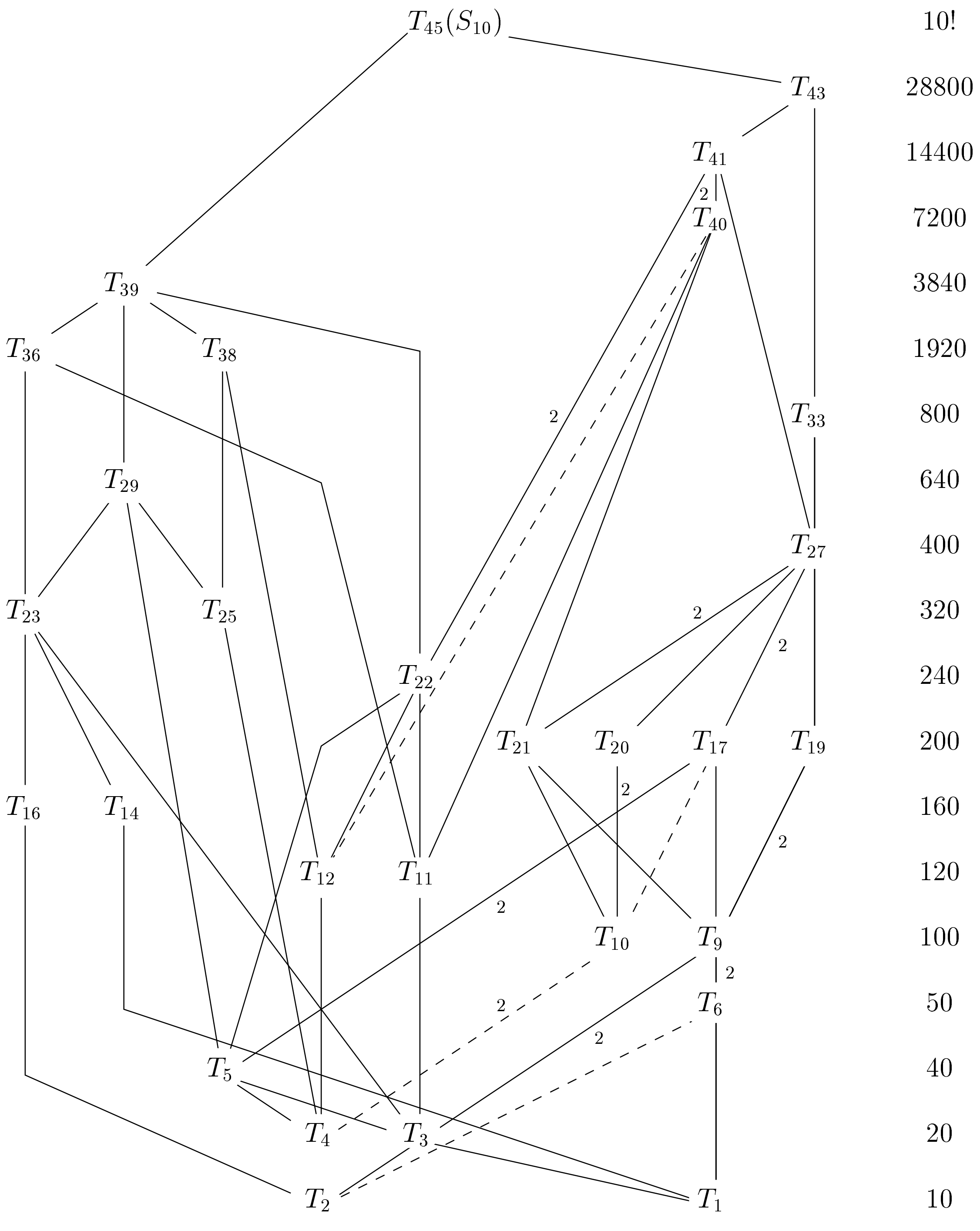

Abbildung I.15: Imprimitive ungerade Permutationsgruppen vom Grad 10

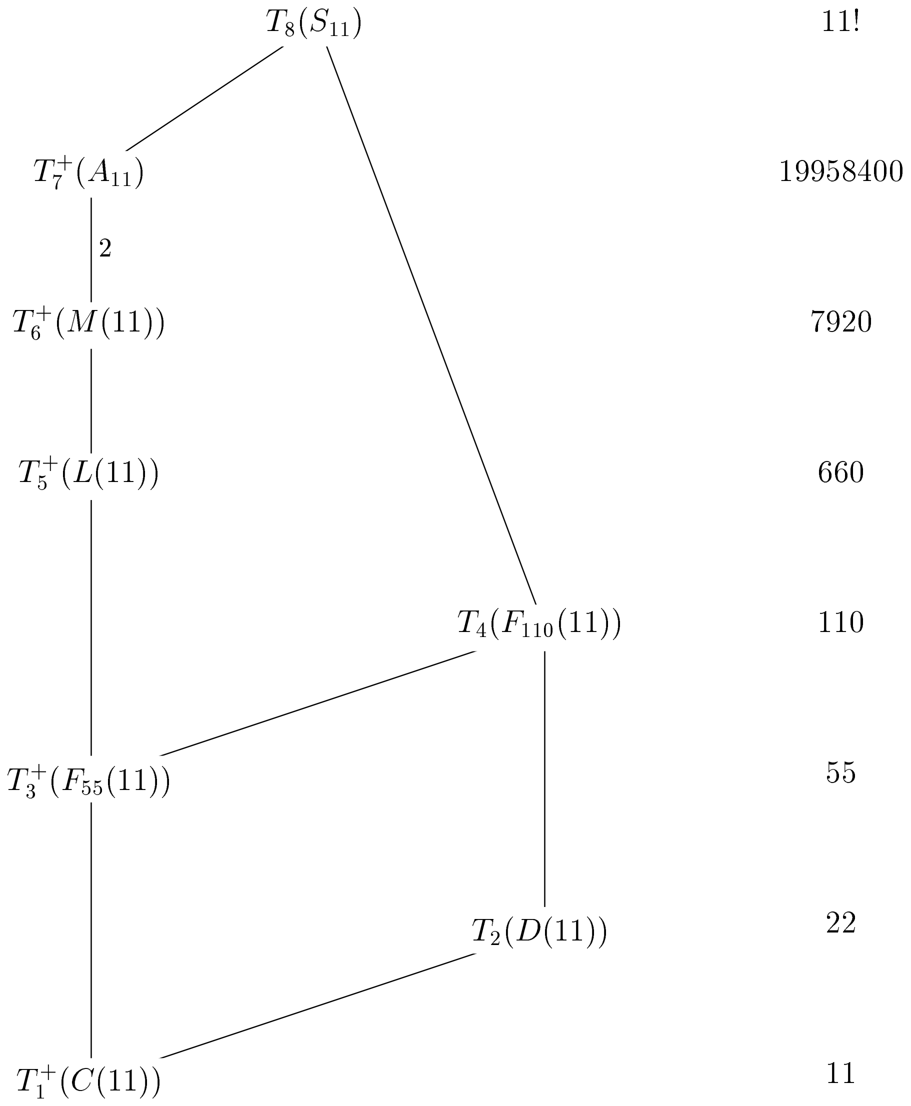

Abbildung I.16: Transitive Permutationsgruppen vom Grad 11

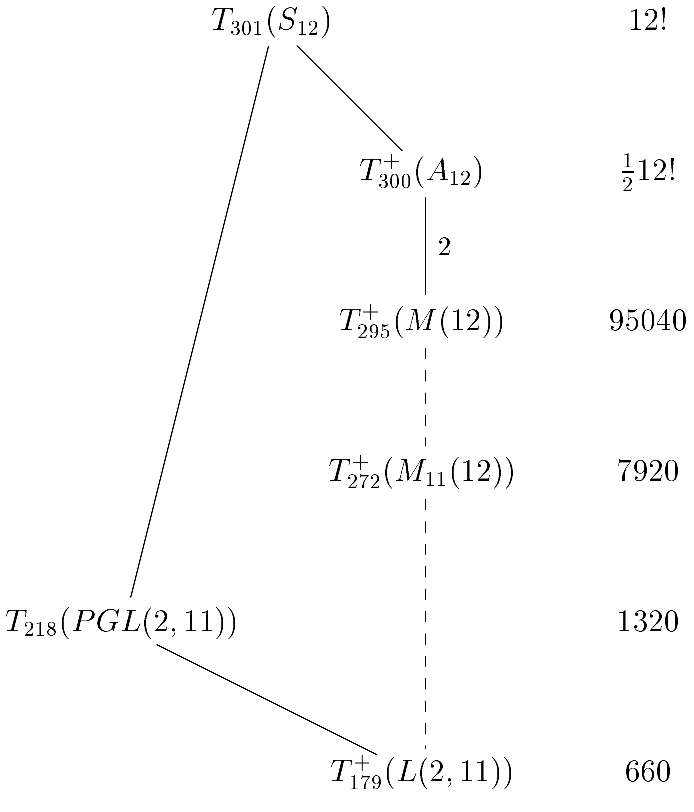

Abbildung I.17: Primitive Permutationsgruppen vom Grad 12

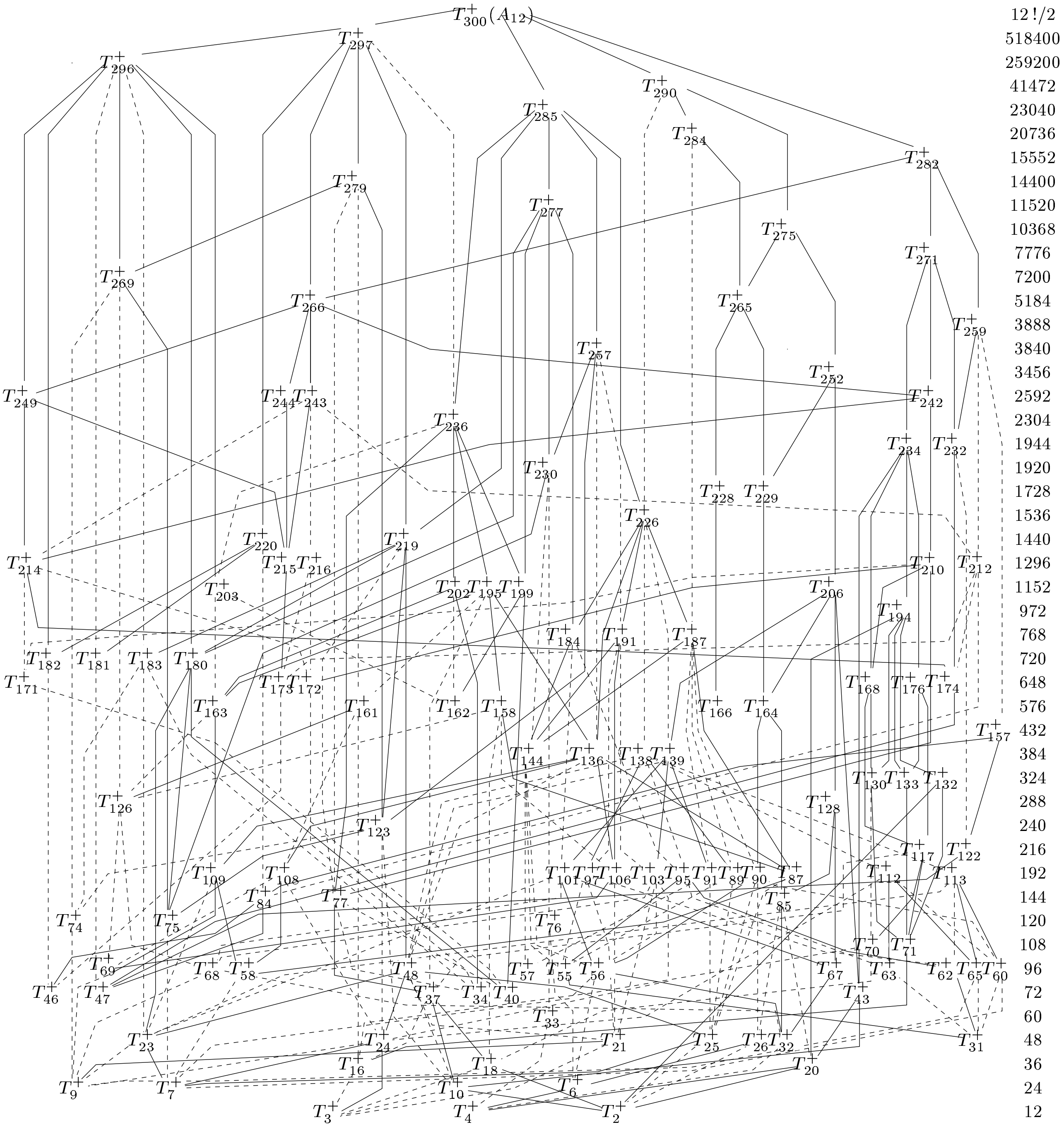

Abbildung I.18: Imprimitive gerade Permutationsgruppen vom Grad 12

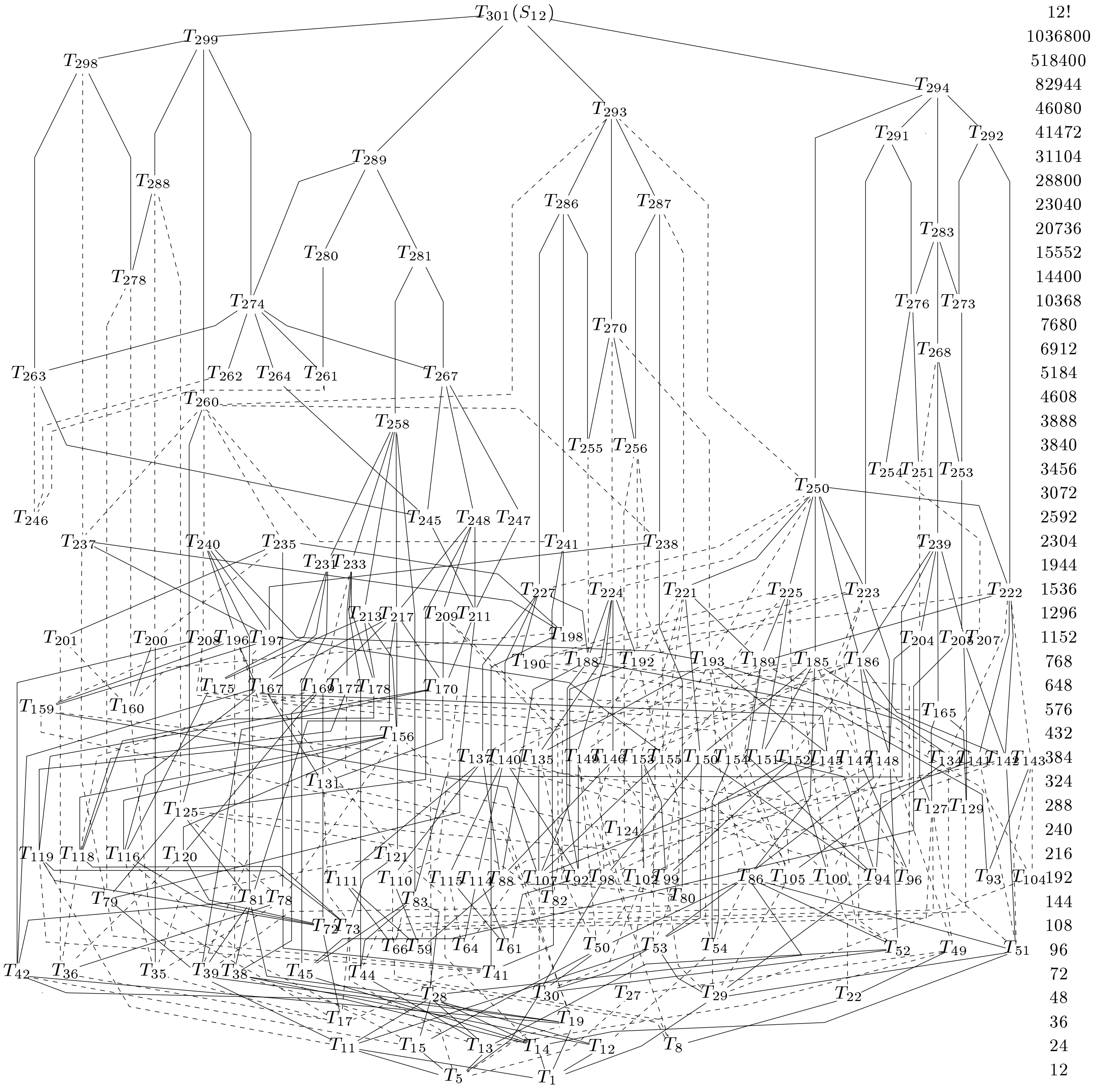

Abbildung I.19: Imprimitive ungerade Permutationsgruppen vom Grad 12

Anhang II

Zur Berechnung der Galoisgruppe eines irreduziblen normierten Polynoms von Grad n geben wir in den Spalten 1-4 der folgenden Tabellen die Nummer, die Notation, die Ordnung und die Parität der transitiven Permutationsgruppen an. In Spalte 5 werden die minimalen transitiven Obergruppen G der gegebenen Gruppe H und die G-relativen H-invarianten Polynome F in folgender Weise aufgelistet: Wir geben ein Monom $m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von F und die Anzahl der Monome von

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in H'} \sigma p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

wobei $H' = \rho^{-1} H \rho \leq G$ ist. Wenn τ nicht die Identität ist, wird die Permutation τ unterhalb der Tabelle des jeweiligen Grades angegeben. In Spalte 6 steht die Anzahl der G- Konjugationsklassen. Repräsentanten der nicht-trivialen Konjugationsklassen findet man ebenfalls unterhalb der Tabellen. Letztlich geben wir in Spalte 7 der Tabelle ein Beispielpolynom $f(x)$ an (soweit bekannt), dessen Galoisgruppe $\mathfrak{G}(f, \mathbb{Q})$ bis auf Konjugation die Permutationsgruppe aus Spalte 2 ist. Die Beispielpolynome für den Grad 12 wurden uns freundlicherweise von G. Malle zur Verfügung gestellt [22]. Die Notation der Gruppen mit ihren Erzeugern findet man in [6].

Grad 3:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	A_3	3	$+$	$d(f)$	–	x^3+x^2-2x-1
2	S_3	6	–		–	x^3+2

Grad 4:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(4)$ $=4$	4	–	$T_1/T_3: \quad x_1x_2^2 \quad (4)$	1	$x^4+x^3+x^2+x+1$
2	$E(4)$ $=2[\times]2$ $=D_4$	4	$+$	$T_2^+/T_4^+: \quad x_1x_2 \quad (2)$	1	x^4+1
3	$D(4)$ $=D_8$	8	–	$T_3/T_5: \quad x_1x_3 \quad (2)$	1	x^4-2
4	A_4	12	$+$	$d(f)$	–	$x^4+8x+12$
5	S_4	24	–		–	x^4+x+1

Grad 5:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(5)$ $=5$	5	$+$	$T_1^+/T_2^+: \quad x_1x_2^2 \quad (5)$	1	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$
2	$D(5)$ $=5:2$ $=D_{10}$	10	$+$	$T_2^+/T_4^+: \quad x_1x_2 \quad (5)$	1	$x^5-5x+12$
3	$F(5)$ $=5:4$ $=Hol(C(5))$	20	–	$T_3/T_5: \quad x_1x_2x_4^2 \quad (10)$	1	x^5+2
4	A_5	60	$+$	$d(f)$	–	$x^5+20x+16$
5	S_5	120	–		–	x^5-x+1

Grad 6:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(6)$ $=6$ $=3[\times]2$	6	–	$T_1/T_3: \quad x_1x_2x_4 \quad (6)$ $T_1/T_5: \quad x_1x_4 \quad (3)$ $T_1/T_6: \quad x_1x_2 \quad (6)$	1 1 1	$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
2	$D_6(6)$ $=[3]2$ $=S_3$	6	–	$T_2/T_3: \quad x_1x_2 \quad (3)$ $T_2'/T_5: \quad x_1x_2 \quad (3)$ $T_2/T_8: \quad x_1x_2 \quad (3)$	1 1 1	x^6+108
3	$D(6)$ $=S(3)[\times]2$ $=D_{12}$	12	–	$T_3/T_9: \quad x_1x_4 \quad (3)$ $T_3/T_{11}: \quad x_1x_2 \quad (6)$	2 1	x^6+2
4	$A_4(6)$ $=[2^2]3$	12	$+$	$T_4^+/T_7^+: \quad x_1x_2x_4 \quad (6)$	1	x^6-3x^2-1

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
5	$F_{18}(6)$ $= [3^2]2$ $= 3 \wr 2$ $= G_{18}$	18	–	$T_5/T_9: \quad x_1x_3^2 \quad (6)$	2	x^6+3x^3+3
6	$2A_4(6)$ $= [2^3]3$ $= 2 \wr 3$ $= S_4/\langle(12)(34)\rangle$	24	–	$T_6/T_{11} \quad x_1x_2x_4 \quad (6)$	1	x^6-3x^2+1
7	$S_4(6d)$ $= [2^2]S(3)$ $= 2 \wr 3$ $= S_4/\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$	24	+	$T_7^+/T_{15}^+: x_1x_4 \quad (3)$	1	x^6-4x^2-1
8	$S_4(6c)$ $= \frac{1}{2}[2^3]S(3)$ $= S_4/C(4)$	24	–	$T_8/T_{11}: \quad x_1x_2x_3^2x_4^2 \quad (24)$	1	$x^6-3x^5+6x^4-7x^3+2x^2$ $+x-4$
9	$F_{18}(6):2$ $= [\frac{1}{2}S(3)^2]2$ $= G_{36}^1$	36	–	$T_9/T_{13}: \quad x_1x_2x_3^2x_4^2 \quad (18)$	1	x^6+2x^3-2
10	$F_{36}(6)$ $= \frac{1}{2}[S(3)^2]2$ $= G_{36}^2$	36	+	$T_{10}^+/T_{15}^+: x_1x_3 \quad (6)$	1	$x^6+6x^4+2x^3+9x^2$ $+6x-4$
11	$2S_4(6)$ $= [2^3]S(3)$ $= 2 \wr S(3)$ $= G_{48}$	48	–	$T_{11}/T_{16}: x_1x_4 \quad (3)$	1	x^6+2x^2+2
12	$L(6)$ $= PSL(2,5)$ $= A_5(6)$	60	+	$T_{12}^+/T_{15}^+: x_1x_2x_3 \quad (10)$	1	$x^6+x^5-x^4+x^3-2*x^2-2$
13	$F_{36}(6):2$ $= [S(3)^2]2$ $= S(3) \wr 2$ $= G_{72}$	72	–	$T_{13}/T_{16}: x_1x_3 \quad (6)$	1	$x^6+x^2+2*x+1$
14	$L(6):2$ $= PGL(2,5)$ $= S_5(6)$	120	–	$T_{14}/T_{16}: x_1x_2x_3^2x_6^2 \quad (30)$	1	x^6+4x^5+x-1
15	A_6	360	+	d(f)	–	$x^6+24x-20$
16	S_6	720	–		–	x^6+x+1

Inklusion bis auf Konjugation: $T_2/T_5:(4,6)$.
Nicht triviale Konjugationsklassen: $T_3/T_9:(2,4)$, $T_5/T_9:(4,6)$.

Grad 7:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(7)$ $= 7$	7	$+$	$T_1^+/T_3^+ :\ x_1x_2\ (7)$	1	$x^7+x^6-12x^5-7x^4+28x^3$ $+14x^2-9x+1$
2	$D(7)$ $= 7:2$ D_{14}	14	$-$	$T_2/T_4 :\ x_1x_2\ (7)$	1	$x^7+7x^3+7x^2+7x-1$
3	$F_{21}(7)$ $= 7:3$ $= Hol(C(7)) \cap A_7$	21	$+$	$T_3^+/T_5^+ :\ x_1x_2x_6\ (7)$	1	$x^7-14x^5+56x^3-56x+22$
4	$F_{42}(7)$ $= 7:6$ $= Hol(C(7))$	42	$-$	$T_4/T_7 :\ x_1x_2x_4\ (14)$	1	x^7+2
5	$L(7)$ $= L(3,2)$	168	$+$	$T_5^+/T_6^+ :\ x_1x_2x_4\ (7)$	2	$x^7-7x^3+14x^2-7x+1$
6	A_7	2520	$+$	d(f)	$-$	$x^7+7x^4+14x+3$
7	S_7	5040	$-$		$-$	x^7+x+1

Nicht triviale Konjugationsklassen: $T_5^+/T_6^+ : (6,7)$.

Grad 8:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(8)$ $= 8$	8	$-$	$T_1/T_6 :\ x_1x_2x_4\ (8)$ $T_1/T_7 :\ x_1x_2\ (8)$ $T_1/T_8 :\ x_1x_2\ (8)$	1 2 1	$x^8-16x^6+40x^4-32x^2+8$
2	$4[\times]2$	8	$+$	$T_2'^+/T_9^+ :\ x_1x_2x_4\ (8)$ $T_2^+/T_{10}^+ :\ x_1x_2\ (8)$ $T_2'^+/T_{11}^+ :\ x_1x_4\ (8)$	1 2 2	x^8+1
3	$E(8)$ $= 2[\times]2[\times]2$	8	$+$	$T_3^+/T_9^+ :\ x_1x_4\ (4)$ $T_3^+/T_{13}^+ :\ x_1x_2\ (4)$	1 1	x^8-x^4+1
4	$D_8(8)$ $= [4]2$	8	$+$	$T_4'^+/T_9^+ :\ x_1x_6\ (4)$ $T_4'^+/T_{11}^+ :\ x_1x_2\ (8)$ $T_4'^+/T_{14}^+ :\ x_1x_2\ (8)$	2 1 1	x^8+3x^4+1
5	$Q_8(8)$	8	$+$	$T_5'^+/T_{11}^+ :\ x_1x_2x_3\ (8)$ $T_5'^+/T_{12}^+ :\ x_1x_2\ (8)$	1 1	$x^8-24x^6+108x^4-144x^2+36$
6	$D(8)$	16	$-$	$T_6/T_{15} :\ x_1x_2\ (8)$	2	x^8+2
7	$\frac{1}{2}[2^3]4$	16	$-$	$T_7/T_{15} :\ x_1x_2x_5\ (8)$ $T_7/T_{16} :\ x_1x_3^2\ (8)$ $T_7'/T_{17} :\ x_1x_3x_4\ (16)$	1 2 1	$x^8-10x^6+25x^4-20x^2+5$
8	$2D_8(8)$ $= [D(4)]2$	16	$-$	$T_8/T_{15} :\ x_1x_2x_4\ (8)$ $T_8/T_{23} :\ x_1x_3\ (8)$	2 1	x^8-2
9	$E(8):2$ $= D(4)[\times]2$	16	$+$	$T_9^+/T_{18}^+ :\ x_1x_4\ (8)$ $T_9'^+/T_{19}^+ :\ x_1x_2\ (4)$ $T_9^+/T_{22}^+ :\ x_1x_2\ (4)$ $T_9'^+/T_{24}^+ :\ x_1x_3\ (4)$	3 1 6 1	x^8+2x^4+4

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
10	$[2^2]4$	16	$+$	$T'^{+}_{10}/T^{+}_{18}:\quad x_1x_2x_4\quad (16)$ $T'^{+}_{10}/T^{+}_{19}:\quad x_1x_2\quad (16)$ $T^{+}_{10}/T^{+}_{20}:\quad x_1x_3\quad (4)$	3 1 2	$x^8-32x^6+384x^4-2368x^2+1920x$ $+1216$
11	$\frac{1}{2}[2^3]E(4)$ $=Q_8:2$	16	$+$	$T'^{+}_{11}/T^{+}_{22}:\quad x_1x_4^2\quad (16)$	6	x^8+9
12	$2A_4(8)$ $=[2]A(4)$ $=SL(2,3)$	24	$+$	$T'^{+}_{12}/T^{+}_{32}:\quad x_1x_2x_7\quad (24)$	2	$x^8+72x^6+828x^4+1008x^2+324$
13	$E(8):3$ $=A(4)[\times]2$	24	$+$	$T^{+}_{13}/T^{+}_{24}:\quad x_1x_2^2x_4\quad (24)$ $T^{+}_{13}/T^{+}_{32}:\quad x_1x_2\quad (12)$ $T^{+}_{13}/T^{+}_{33}:\quad x_1x_6\quad (4)$	1 2 1	x^8+4x^6+36
14	$S(4)[\frac{1}{2}]2$ $=\frac{1}{2}(S_4[\times]2)$	24	$+$	$T'^{+}_{14}/T^{+}_{24}:\quad x_1x_2x_4x_5\quad (12)$ $T^{+}_{14}/T^{+}_{34}:\quad x_1x_5\quad (4)$	1 3	$x^8+60x^6+1350x^4+461500x^2+50625$
15	$[\frac{1}{4}cD(4)^2]2$	32	$-$	$T_{15}/T_{26}:\quad x_1x_2x_3\quad (16)$	2	x^8-3
16	$\frac{1}{2}[2^4]4$	32	$-$	$T_{16}/T_{26}:\quad x_1x_2x_5\quad (8)$ $T_{16}/T_{27}:\quad x_1x_2x_3x_4^2\quad (32)$ $T_{16}/T_{28}:\quad x_1x_2x_5\quad (8)$	1 1 1	x^8+5x^6+125
17	$[4^2]2$	32	$-$	$T'_{17}/T_{26}:\quad x_1x_3^2\quad (8)$	2	$x^8+39x^6+1265472$
18	$E(8):E_4$ $=[2^2]D(4)$	32	$+$	$T^{+}_{18}/T^{+}_{29}:\quad x_1x_2\quad (4)$ $T^{+}_{18}/T^{+}_{33}:\quad x_1x_2\quad (4)$ $T'^{+}_{18}/T^{+}_{34}:\quad x_1x_2\quad (4)$	2 1 1	$x^8-x^6-x^4-x^2+1$
19	$E(8):4$ $=[\frac{1}{4}eD(4)^2]2$	32	$+$	$T^{+}_{19}/T^{+}_{29}:\quad x_1x_2^2x_4\quad (32)$	2	$x^8+8x^6+16x^4+16$
20	$[2^3]4$	32	$+$	$T'^{+}_{20}/T^{+}_{29}:\quad x_1x_3x_4\quad (32)$	1	$x^8-8x^6+24x^4-160x^2+384x$ -272
21	$\frac{1}{2}[2^4]E(4)$ $=[\frac{1}{4}dD(4)^2]2$	32	$-$	$T_{21}/T_{28}:\quad x_1x_2\quad (8)$ $T_{21}/T_{30}:\quad x_1x_2\quad (8)$ $T_{21}/T_{31}:\quad x_1x_2x_3x_4^2\quad (32)$	1 1 3	$x^8-2x^6+x^4+5$
22	$E(8):D_4$ $=[2^3]2^2$	32	$+$	$T'^{+}_{22}/T^{+}_{29}:\quad x_1x_4\quad (8)$ $T'^{+}_{22}/T^{+}_{32}:\quad x_1x_2\quad (8)$	1 1	$x^8-32x^6+384x^4-2120x^2+432x$ $+3448$
23	$2S_4(8)$ $=GL(2,3)$	48	$-$	$T_{23}/T_{40}:\quad x_1x_2x_4\quad (8)$	2	$x^8+16x^6-10584$
24	$E(8):D_6$ $=S(4)[\times]2$	48	$+$	$T^{+}_{24}/T^{+}_{39}:\quad x_1x_2\quad (12)$ $T^{+}_{24}/T^{+}_{41}:\quad x_1x_6\quad (4)$	2 1	$x^8+4x^7-4x^5-4x^2+2$
25	$E(8):7$ $=F_{56}(8)$	56	$+$	$T^{+}_{25}/T^{+}_{36}:\quad x_1x_2x_3^2\quad (56)$	1	$x^8-196x^6+15582x^4-3136x^3$ $-551348x^2-93632x+9288489$
26	$\frac{1}{2}[2^4]eD(4)$	64	$-$	$T_{26}/T_{35}:\quad x_1x_2x_3^2x_4^2\quad (32)$ $T_{26}/T_{40}:\quad x_1x_3\quad (8)$	1 1	x^8-x^4+2
27	$[2^4]4$	64	$-$	$T_{27}/T_{35}:\quad x_1x_2x_5\quad (8)$	1	x^8+8x^6+2744
28	$\frac{1}{2}[2^4]dD(4)$	64	$-$	$T_{28}/T_{35}:\quad x_1x_2x_3x_4^2\quad (32)$ $T'_{28}/T_{46}:\quad x_1x_2\quad (16)$	1 1	$x^8+6x^4-8x^2+8$
29	$E(8):D_8$ $=[2^3]D(4)$	64	$+$	$T'^{+}_{29}/T^{+}_{39}:\quad x_1x_2\quad (8)$ $T^{+}_{29}/T^{+}_{41}:\quad x_1x_3\quad (4)$	1 1	$x^8+x^6+x^4-x^2+1$
30	$\frac{1}{2}[2^4]cD(4)$	64	$-$	$T_{30}/T_{35}:\quad x_1x_2x_3x_4^2x_5^2\quad (64)$	1	$x^8+4x^6+4x^4-2$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
31	$[2^4]E(4)$	64	$-$	$T_{31}/T_{35}:$ x_1x_2 (8) $T_{31}/T_{38}:$ x_1x_2 (8)	1 1	$x^8+4x^6+4x^4+3$
32	$[2^3]A(4)$	96	$+$	$T_{32}^+/T_{39}^+:$ $x_1x_2x_3^2x_5$ (48)	1	$x^8-x^6-3x^2+4$
33	$E(8):A_4$ $=[\frac{1}{3}A(4)^2]2$ $=E(4):6$	96	$+$	$T_{33}^+/T_{41}^+:$ $x_1x_2x_4x_5^2$ (48) $T_{33}^+/T_{42}^+:$ $x_1x_2x_4x_7$ (12)	1 1	$x^8-72x^6+1944x^4-25056x^2$ $+15552x+69984$
34	$\frac{1}{2}[E(4)^2:S_3]2$ $=E(4)^2:D_6$	96	$+$	$T_{34}^+/T_{41}^+:$ $x_1x_2x_4x_5$ (12) $T_{34}'^+/T_{42}^+:$ $x_1x_2x_4x_5$ (12)	1 1	$x^8+72x^7+1980x^6+25272x^5$ $+140454x^4+227448x^3$ $+1487484x^2+52488x+6561$
35	$[2^4]D(4)$	128	$-$	$T_{35}/T_{44}:$ x_1x_3 (8) $T_{35}'/T_{47}:$ x_1x_2 (16)	1 1	$x^8+3x^6+3x^4+3x^2+3$
36	$E(8):F_{21}$	168	$+$	$T_{36}^+/T_{48}^+:$ $x_1x_2x_3x_7^2$ (56)	1	$x^8+243594036x^6+1934500632624x^5$ $+29635819628209830x^4$ $+203774949685874022624x^3$ $+2988168234396894632781684x^2$ $+8779374238787472347934586416x$ $+37541982917702994635948231748609$
37	$L(8)$ $=PSL(2,7)$	168	$+$	$T_{37}'^+/T_{48}^+:$ $x_1x_2x_3x_6$ (14)	1	$x^8-2x^7-14x^6+70x^5-140x^4+$ $154x^3+3073x^2-3590x+16756$
38	$[2^4]A(4)$	192	$-$	$T_{38}/T_{44}:$ $x_1x_2x_3^2x_5$ (48)	1	x^8+4x^6+108
39	$[2^3]S(4)$	192	$+$	$T_{39}^+/T_{49}^+:$ x_1x_6 (4)	1	x^8+x^6+1
40	$\frac{1}{2}[2^4]S(4)$	192	$-$	$T_{40}/T_{44}:$ $x_1x_2x_3^2x_4^3x_5^2$ (192)	1	$x^8-8x^6+18x^4-54$
41	$E(8):S_4$ $=[E(4)^2:S_3]2$ $=E(4)^2:D_{12}$	192	$+$	$T_{41}^+/T_{45}^+:$ $x_1x_2x_4x_7$ (12)	2	$x^8+24x^5-12x^4+48x^2-18$
42	$[A(4)^2]2$	288	$+$	$T_{42}^+/T_{45}^+:$ $x_1x_2^2x_3^3$ (24)	2	$x^8+7x^4-8x^3+9$
43	$L(8):2$ $=PGL(2,7)$	336	$-$	$T_{43}/T_{50}:$ $x_1x_2x_3x_5$ (28)	1	$x^8+x^7+7x^2+x+1$
44	$[2^4]S(4)$	384	$-$	$T_{44}/T_{50}:$ x_1x_5 (4)	1	$x^8-3x^4-x^2-1$
45	$[\frac{1}{2}S(4)^2]2$	576	$+$	$T_{45}^+/T_{49}^+:$ x_1x_2 (12)	1	$x^8-6x^6+8x^5+321x^4$ $-864x^3+900x^2-432x+81$
46	$\frac{1}{2}[S(4)^2]2$	576	$-$	$T_{46}/T_{47}:$ $x_1x_2^2x_3^3x_5x_6^2x_7^4$ (576)	1	$x^8+8x^5-9x^4+16x^2-36x+9$
47	$[S(4)^2]2$	1152	$-$	$T_{47}/T_{50}:$ x_1x_2 (12)	1	$x^8-8x^5+8x^4+8$
48	$E(8):L_7$ $=AL(8)$	1344	$+$	$T_{48}^+/T_{49}^+:$ $x_1x_2x_3x_8$ (14)	2	x^8+7x^2+2x+7
49	A_8	20160	$+$	$d(f)$	$-$	x^8+6x^4-8x+8
50	S_8	40320	$-$		$-$	x^8+x-1

Inklusion bis auf Konjugation:

$T_2^+/T_9^+ : (2,4,6,7,3,8,5)$
$T_4^+/T_9^+ : (2,4)(3,8,5,7,6)$
$T_2^+/T_{11}^+ : (3,5,4)(6,7,8)$
$T_4^+/T_{11}^+ : (2,3,5)(6,8,7)$
$T_5^+/T_{11}^+ : (3,5,7)(6,8)$
$T_5^+/T_{12}^+ : (3,5)(6,8)$
$T_4^+/T_{14}^+ : (2,4,8,6)(5,7)$
$T_7/T_{17} : (2,4,5,3)(7,8)$
$T_{10}^+/T_{18}^+ : (2,4,5)(6,7,8)$
$T_9^+/T_{19}^+ : (3,8)(5,6)$
$T_{10}^+/T_{19}^+ : (2,4,7,8,5,3)$
$T_{11}^+/T_{22}^+ : (3,4,6)(5,8,7)$
$T_9^+/T_{24}^+ : (2,4,8,3,6,7,5)$
$T_{14}^+/T_{24}^+ : (4,7)(5,6)$
$T_{17}/T_{26} : (2,3,5)(6,8,7)$
$T_{20}^+/T_{29}^+ : (2,4,5,3)(7,8)$
$T_{22}^+/T_{29}^+ : (3,8)(5,6)$
$T_{12}^+/T_{32}^+ : (4,7)(5,6)$

$T_{22}^+/T_{32}^+ : (3,5)(6,7,8)$
$T_{18}^+/T_{34}^+ : (6,7)$
$T_{29}^+/T_{39}^+ : (3,6)(5,7,8)$
$T_{34}^+/T_{42}^+ : (6,7)$
$T_{28}/T_{46} : (2,4,5)(7,8)$
$T_{35}/T_{47} : (2,4,5)(7,8)$
$T_{37}^+/T_{48}^+ : (5,6,8)$

Nicht triviale Konjugationsklassen:
$T_1/T_7 : (3,7)(4,8)$
$T_4'^+/T_9^+ : (4,7)(5,6)$
$T_2^+/T_{10}^+ : (3,7)(4,8)$
$T_2'^+/T_{11}^+ : (2,3,8,6,7,4)$
$T_6/T_{15} : (3,7)(4,8)$
$T_8/T_{15} : (3,7)(4,8)$
$T_7/T_{16} : (4,8)$
$T_9^+/T_{18}^+ : (3,8)(4,7)$
$T_9^+/T_{18}^+ : (2,3,8)(4,6,7)$
$T_{10}'^+/T_{18}^+ : (2,3,8)(5,7,6)$
$T_{10}'^+/T_{18}^+ : (2,8)(5,7)$
$T_{10}^+/T_{20}^+ : (4,8)$
$T_9^+/T_{22}^+ : (6,7)$
$T_9^+/T_{22}^+ : (2,4)(3,5)$
$T_9^+/T_{22}^+ : (2,4)(3,5)(6,7)$
$T_9^+/T_{22}^+ : (2,6)(3,7)$
$T_9^+/T_{22}^+ : (2,6,3,7)$
$T_{11}'^+/T_{22}^+ : (6,7)$
$T_{11}'^+/T_{22}^+ : (4,6)(5,7)$
$T_{11}'^+/T_{22}^+ : (4,6,5,7)$
$T_{11}'^+/T_{22}^+ : (2,4)(3,5)$
$T_{11}'^+/T_{22}^+ : (2,4)(3,5)(6,7)$
$T_{15}/T_{26} : (4,8)$
$T_{17}'/T_{26} : (4,8)$
$T_{18}^+/T_{29}^+ : (5,7)$
$T_{19}^+/T_{29}^+ : (5,7)$
$T_{21}/T_{31} : (3,4)(7,8)$
$T_{21}/T_{31} : (2,3)(6,7)$
$T_{12}'^+/T_{32}^+ : (3,8,4,7)$
$T_{13}^+/T_{32}^+ : (7,8)$
$T_{14}^+/T_{34}^+ : (4,6,5)$
$T_{14}^+/T_{34}^+ : (4,7,5)$
$T_{24}^+/T_{39}^+ : (7,8)$
$T_{23}/T_{40} : (4,8)$
$T_{41}^+/T_{45}^+ : (5,7)$
$T_{42}^+/T_{45}^+ : (6,7)$
$T_{48}^+/T_{49}^+ : (7,8)$

Grad 9:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(9)$ $= 9$	9	$+$	$T_1^+/T_3^+ :$ $x_1x_2x_4$ (9) $T_1^+/T_6^+ :$ x_1x_2 (9)	1 3	$x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x-1$
2	$E(9)$ $= 3[\times]3$	9	$+$	$T_2^+/T_5^+ :$ $x_1x_2x_3$ (9) $T_2^+/T_7^+ :$ x_1x_3 (9)	1 3	$x^9-15x^7+4x^6+54x^5-12x^4$ $-38x^3+9x^2+6x-1$
3	$D(9)$ $= 9:2$	18	$+$	$T_3^+/T_{10}^+ :$ x_1x_2 (9)	1	$x^9+9x^7-6x^6+27x^5-36x^4$ $+27x^3-54x^2-32$
4	$S(3)[\times]3$	18	$-$	$T_4/T_8 :$ $x_1x_2x_3$ (9) $T_4'/T_{12} :$ x_1x_3 (18) $T_4/T_{13} :$ x_1x_4 (9)	2 3 1	$x^9+4x^6+3x^3-1$
5	$S(3)[\frac{1}{2}]S(3)$ $= 3^2:2$	18	$+$	$T_5^+/T_{11}^+ :$ x_1x_3 (9)	1	$x^9+3x^6+3x^3-1$
6	$\frac{1}{3}[3^3]3$	27	$+$	$T_6^+/T_{10}^+ :$ $x_1x_4^2$ (9) $T_6'^+/T_{17}^+ :$ $x_1x_2x_3x_6$ (27)	1 2	$x^9+x^8-32x^7-84x^6-14x^5$ $+112x^4+84x^3+4x^2-8x$ -1
7	$E(9):3$ $= [3^2]3$	27	$+$	$T_7^+/T_{11}^+ :$ $x_1x_2^2$ (9) $T_7^+/T_{17}^+ :$ $x_1x_3x_6$ (9)	1 1	$x^9-232x^7-9x^6+7485x^5$ $+8631x^4-3097x^3-738x^2$ $+325x-27$
8	$S(3)[\times]S(3)$ $= E(9):D_4$	36	$-$	$T_8/T_{18} :$ x_1x_4 (9)	1	$x^9-2x^7-x^6-2x^4+3x^3$ $+2x^2+2x+1$
9	$E(9):4$	36	$+$	$T_9^+/T_{14}^+ :$ x_1x_2 (18)	3	$x^9-3x^8+6x^7-18x^6-9x^5$ $+87x^4-54x^3-18x^2$ $+36x+12$
10	$[3^2]S(3)_6$	54	$+$	$T_{10}'^+/T_{21}^+ :$ $x_1x_2x_3x_6$ (54)	2	x^9-2

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
11	$E(9):6$ $= \frac{1}{2}[3^2:2]S(3)$	54	$+$	$T_{11}^+/T_{21}^+ :$ $x_1x_3x_8$ (9)	1	$x^9 - x^6 + 5x^3 + 1$
12	$[3^2]S(3)$	54	$-$	$T_{12}/T_{18} :$ $x_1x_2^2$ (9) $T_{12}/T_{20} :$ $x_1x_3x_6$ (9)	1 1	$x^9+x^8+x^7+4x^6-2x^5-x^4 +3x^3+x^2-1$
13	$E(9):D_6$ $= [3^2:2]3$ $= [\frac{1}{2}S(3)^2]3$	54	$-$	$T_{13}/T_{18} :$ $x_1x_2x_3$ (27) $T_{13}/T_{22} :$ $x_1x_3x_8$ (9)	1 1	$x^9 - 2x^6 - x^3 + 1$
14	$M(9)$ $= E(9):Q_8$	72	$+$	$T_{14}^+/T_{23}^+ :$ $x_1x_2x_3x_4$ (18)	1	$x^9-14x^7-40x^6-9x^5+70x^4 +306x^3-270x^2-79x-10$
15	$E(9):8$	72	$-$	$T_{15}/T_{19} :$ $x_1x_2x_3^2$ (72)	1	$x^9-9x^7-21x^6+72x^5+99x^4 -99x^3-585x^2+549x+166$
16	$E(9):D_8$	72	$-$	$T_{16}/T_{19} :$ x_1x_2 (18)	1	$x^9-2x^7+3x^6+x^5-x^4-2x^3 +x+1$
17	$[3^3]3$ $= 3 \wr 3$	81	$+$	$T_{17}^+/T_{21}^+ :$ $x_1x_2^2$ (9) $T_{17}^+/T_{25}^+ :$ $x_1x_2^2$ (9)	1 1	$x^9-17x^7-6x^6+87x^5+47x^4 -143x^3-69x^2+72x+27$
18	$E(9):D_{12}$ $= [3^2:2]S(3)$ $= [\frac{1}{2}S(3)^2]S(3)$	108	$-$	$T_{18}/T_{24} :$ $x_1x_3x_8$ (9)	1	$x^9 - 2x^6 - 2x^3 - 1$
19	$E(9):2D_8$	144	$-$	$T_{19}/T_{26} :$ $x_1x_2x_3x_5$ (18)	1	$x^9-3x^8-24x^5-24x^4 -48x+16$
20	$[3^3]S(3)$ $= 3 \wr S(3)$	162	$-$	$T_{20}/T_{24} :$ $x_1x_2^2$ (9) $T_{20}/T_{29} :$ $x_1x_2^2$ (9)	1 1	$x^9-2x^7-2x^6-2x^5+x^4 +4x^3+3x^2+3x+1$
21	$\frac{1}{2}[3^3:2]S(3)$	162	$+$	$T_{21}^+/T_{30}^+ :$ $x_1x_2^2x_3$ (54)	1	$x^9+3x^6+3x^3-2$
22	$[3^3:2]3$	162	$-$	$T_{22}/T_{24} :$ $x_1x_2x_3$ (27) $T_{22}/T_{28} :$ $x_1x_2^2x_3x_4^2$ (54)	1 1	$x^9-12x^6-27x^5-18x^4+9x^3 +36x-8$
23	$E(9):2A_4$	216	$+$	$T_{23}^+/T_{33}^+ :$ $x_1x_2x_9$ (12)	1	$x^9+9x^7-60x^6+72x^5 +354x^3-495x^2+2124x -845$
24	$[3^3:2]S(3)$	324	$-$	$T_{24}/T_{31} :$ $x_1x_2^2x_3x_4^2$ (54)	1	$x^9-2x^6-2x^3-2$
25	$[\frac{1}{2}S(3)^3]3$	324	$+$	$T_{25}^+/T_{30}^+ :$ $x_1x_2x_3$ (27)	1	$x^9-9x^6-9x^4+24x^3+9x^2 -9x+1$
26	$E(9):2S_4$	432	$-$	$T_{26}/T_{34} :$ $x_1x_2x_9$ (12)	1	$x^9-x^7+5x^6+x^5-2x^4+4x^3 +3x^2-x-1$
27	$L(9)$ $= PSL(2,8)$	504	$+$	$T_{27}^+/T_{32}^+ :$ $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (252)	1	$x^9-36x^6-54x^5+432x^3 +324x^2-243x-1152$
28	$[S(3)^3]3$ $= S(3) \wr 3$	648	$-$	$T_{28}/T_{31} :$ $x_1x_2x_3$ (27)	1	$x^9-2x^7-2x^6-x^5-2x^4 +3x^2+3x+1$
29	$[\frac{1}{2}S(3)^3]S(3)$	648	$-$	$T_{29}/T_{31} :$ $x_1x_2^2x_3x_4^2x_6x_7^2$ (108)	1	$x^9-6x^6-18x^5+36x^4-36x^3 +108x^2-144x+48$
30	$\frac{1}{2}[S(3)^3]S(3)$	648	$+$	$T_{30}^+/T_{33}^+ :$ x_1x_2 (9)	1	$x^9+2x^5+4x^4+4x^3+4x^2 +x+1$
31	$[S(3)^3]S(3)$ $= S(3) \wr S(3)$	1296	$-$	$T_{31}/T_{34} :$ x_1x_2 (9)	1	$x^9-2x^7-2x^6-x^5-x^4+4x^3 +5x^2+4x+1$
32	$L(9):3$ $= P\Gamma L(2,8)$	1512	$+$	$T_{32}^+/T_{33}^+ :$ $x_1x_2x_3x_4x_7^2$ (126)	2	$x^9+x^7+2x^5+4x^3-x^2+x+1$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
33	A_9	181440	$+$	d(f)	-	$x^9 - 2x^7 - 2x^6 + 2x^4 + 4x^3 + 5x^2$ $+x - 2$
34	S_9	362880	$-$		-	$x^9 - 2x^7 - 2x^6 - 2x^5 - 2x^4 - 2x^3$ $-2x^2 - 2x - 2$

Inklusion bis auf Konjugation:

T_4/T_{12} : $(2,3,6,7,9,8,5,4)$ T_6^+/T_{17}^+ : $(2,3,6,7,9,8,5,4)$ T_{10}^+/T_{21}^+ : $(2,3,6,7,9,8,5,4)$

Nicht triviale Konjugationsklassen:

T_1^+/T_6^+ : $(3,6,9)$ T_1^+/T_6^+ : $(3,9,6)$ T_2^+/T_7^+ : $(6,7,8)$
T_2^+/T_7^+ : $(6,8,7)$ T_4/T_8 : $(2,4,9,7)(3,6,8,5)$ T_4'/T_{12} : $(3,4,5)(6,7,8)$
T_4'/T_{12} : $(3,4,5)$ T_9^+/T_{14}^+ : $(3,4,5)(6,8,7)$ T_9^+/T_{14}^+ : $(3,5,4)(6,7,8)$
$T_6'^+/T_{17}^+$: $(2,9)(4,5)(7,8)$ $T_{10}'^+/T_{21}^+$: $(3,6,4,7,5,8)$ T_{32}^+/T_{33}^+ : $(8,9)$.

Grad 10:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(10)$ $= 5[\times]2$	10	$-$	T_1/T_3 : $x_1x_2x_4$ (10)	1	$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5$ $+x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
				T_1/T_6 : x_1x_6 (5)	1	
				T_1/T_{14} : x_1x_2 (10)	1	
2	$D(10)$ $= 5:2$	10	$-$	T_2/T_3 : x_1x_2 (5)	1	$x^{10} - 35x^6 + 130x^4 + 160$
				T_2'/T_6 : x_1x_2 (5)	1	
				T_2/T_{16} : x_1x_2 (5)	1	
3	$D_{10}(10)$ $= [D(5)]2$	20	$-$	T_3/T_5 : x_1x_2 (10)	1	$x^{10} - x^8 - x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1$
				T_3/T_9 : x_1x_6 (5)	2	
				T_3/T_{11} : x_1x_2 (10)	1	
				T_3/T_{23} : x_1x_2 (10)	1	
4	$\frac{1}{2}[F(5)]2$	20	$-$	T_4/T_5 : x_1x_3 (10)	1	$x^{10} - x^5 - 1$
				T_4'/T_{10} : x_1x_{10} (20)	2	
				T_4/T_{12} : x_1x_3 (10)	1	
				T_4/T_{25} : x_1x_3 (10)	1	
5	$F(5)[\times]2$	40	$-$	T_5/T_{17} : x_1x_6 (5)	2	$x^{10} - 2$
				T_5/T_{22} : $x_1x_2x_3$ (20)	1	
				T_5/T_{29} : x_1x_2 (20)	1	
6	$[5^2]2$	50	$-$	T_6/T_9 : $x_1x_3^2$ (10)	2	$x^{10} + 4x^9 - 40x^8 - 26x^7$ $+252x^6 + 110x^5 - 405x^4$ $-128x^3 + 98x^2 + 36x + 1$
7	$A_5(10)$	60	$+$	$T_7'^+/T_{26}^+$: x_1x_3 (15)	2	$x^{10} - 2x^5 - 15x^4 - 10x^3$ $-15x^2 - 5$
8	$[2^4]5$	80	$+$	T_8^+/T_{15}^+ : $x_1x_2x_6$ (10)	1	$x^{10} - 4x^8 + 2x^6 + 5x^4 - 2x^2 - 1$
9	$[\frac{1}{2}D(5)^2]2$	100	$-$	T_9/T_{17} : x_1x_3 (10)	1	$x^{10} - 50x^8 - 100x^7 + 865x^6$ $+4036x^5 + 4100x^4 + 16400x^2$ $+13120x + 2624$
				T_9/T_{19} : x_1x_3 (10)	2	
				T_9/T_{21} : $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (50)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
10	$\frac{1}{2}[D(5)^2]2$	100	$-$	T'_{10}/T_{17} : x_1x_3 (10) T_{10}/T_{20} : x_1x_3 (10) T_{10}/T_{21} : $x_1x_2x_3^2x_6^2$ (100)	1 2 1	$x^{10}-2x^5-4$
11	$A(5)[\times]2$	120	$-$	T_{11}/T_{22} : $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (60) T_{11}/T_{36} : x_1x_2 (20) T_{11}/T_{40} : x_1x_6 (5)	1 1 1	$x^{10}+10x^6+25x^2-8$
12	$\frac{1}{2}[S(5)]2$ $=S_5(10a)$	120	$-$	T_{12}/T_{22} : $x_1x_2x_3x_4^2x_6$ (120) T_{12}/T_{38} : x_1x_2 (20) T'_{12}/T_{40} : x_1x_6 (5)	1 1 1	$x^{10}+2x^9+3x^8-x^6-2x^5$ $-x^4+3x^2+2x+1$
13	$S_5(10d)$	120	$-$	T'_{13}/T_{32} : x_1x_3 (15)	2	$x^{10}-2x^8-x^7-2x^6+x^5$ $+3x^4-2x^3-x^2+x+1$
14	$[2^5]5$	160	$-$	T_{14}/T_{23} : $x_1x_2x_6$ (10)	1	$x^{10}+x^8-4x^6-3x^4+3x^2+1$
15	$[2^4]D(5)$	160	$+$	T^+_{15}/T^+_{24} : x_1x_2 (20) T^+_{15}/T^+_{34} : x_1x_2 (20)	1 1	$x^{10}-x^8-2x^6+x^4+3x^2-1$
16	$\frac{1}{2}[2^5]D(5)$	160	$-$	T_{16}/T_{23} : $x_1x_2^2x_3x_5x_7x_9^2$ (160)	1	$x^{10}+7x^8+17x^6-31x^4$ $-40x^2+127$
17	$[5^2:4]2$	200	$-$	T_{17}/T_{27} : $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (100)	2	$x^{10}-2x^5-2$
18	$[5^2:4]2_2$	200	$+$	T^+_{18}/T^+_{28} : $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (200)	2	$x^{10}+60x^6-240x^5+850x^2$ $-5440x-1088$
19	$[5^2:4_2]2$	200	$-$	T_{19}/T_{27} : $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (100)	1	$x^{10}-10x^8+35x^6-2x^5$ $-50x^4+10x^3+25x^2$ $-10x+2$
20	$[5^2:4_2]2_2$	200	$-$	T_{20}/T_{27} : $x_1x_2x_3x_4^2x_5^2$ (200)	1	$x^{10}-3x^9+x^8+36x^7-39x^6$ $-105x^5+99x^4+180x^3$ $-45x^2-135x-45$
21	$[D(5)^2]2$	200	$-$	T_{21}/T_{27} : x_1x_3 (10) T_{21}/T_{40} : x_1x_3 (10)	2 1	$x^{10}+x^6-2x^5-x^4+3x^2-2x+1$
22	$S(5)[\times]2$	240	$-$	T_{22}/T_{39} : x_1x_2 (20) T_{22}/T_{41} : x_1x_6 (5)	1 2	$x^{10}-2x^8-2x^7-x^6+x^4$ $-2x^3+2x^2-1$
23	$[2^5]D(5)$	320	$-$	T_{23}/T_{29} : x_1x_2 (20) T_{23}/T_{36} : x_1x_2 (20)	1 1	$x^{10}-2x^8-x^7+3x^6+2x^5$ $-2x^4-2x^3+2x^2+3x+1$
24	$[2^4]F(5)$	320	$+$	T^+_{24}/T^+_{37} : $x_1x_2x_3x_7$ (40)	1	$x^{10}+x^8-x^4+3x^2-1$
25	$\frac{1}{2}[2^5]F(5)$	320	$-$	T_{25}/T_{29} : $x_1x_2x_3x_4^2x_5^2$ (160) T_{25}/T_{38} : $x_1x_2x_3x_7$ (40)	1 1	$x^{10}-2x^8-2x^6-x^2-2$
26	$L(10)$ $=PSL(2,9)$	360	$+$	T^+_{26}/T^+_{31} : $x_1x_2x_3$ (60)	1	$x^{10}-15x^8-75x^6-6x^5$ $-165x^4-30x^3-180x^2$ $-50x-90$
27	$[\frac{1}{2}F(5)^2]2$	400	$-$	T_{27}/T_{33} : $x_1x_2x_3x_4$ (50) T_{27}/T_{41} : $x_1x_3x_7^2$ (20)	1 1	$x^{10}+3x^6-2x^5+x^2+2x+1$
28	$\frac{1}{2}[F(5)^2]2$	400	$+$	T^+_{28}/T^+_{42} : $x_1x_3x_7^2$ (20)	1	$x^{10}-10x^7+10x^6+36x^5$ $+50x^4-10x^3-1$
29	$[2^5]F(5)$	640	$-$	T_{29}/T_{39} : $x_1x_2x_3x_7$ (40)	1	$x^{10}+2x^8-2x^6-x^2+2$
30	$L(10):2$ $=PGL(2,9)$	720	$-$	T_{30}/T_{35} : $x_1x_2x_3^2x_4^2$ (360)	1	$x^{10}+90x^6-648x^5+1080x^4$ $-2160x^3+3645x^2+5400x$ $+12960$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
31	$M(10)$ $= L(10)'2$	720	$+$	$T_{31}^+/T_{44}^+ :$ $x_1x_2x_3x_6$ (30)	1	$x^{10} - 1800x^8 - 24000x^7$ $+1422000x^6 + 30960000x^5$ $-462480000x^4 - 14500800000x^3$ $+12996000000x^2 + 2414368000000x$ -12197187420489
32	$S_6(10)$ $= L(10) : 2$	720	$-$	$T_{32}/T_{35} :$ $x_1x_2x_3$ (60)	1	$x^{10} - 9x^8 + 27x^6 + 2x^5 - 27x^4$ $-9x^3 + 8x + 1$
33	$[F(5)^2]2$	800	$-$	$T_{33}/T_{43} :$ $x_1x_3x_7^2$ (20)	1	$x^{10} - 2x^9 + 12x^8 - 20x^7$ $+66x^6 - 20x^5 + 228x^4 + 84x^3$ $+276x^2 + 120x + 100$
34	$[2^4]A(5)$	960	$+$	$T_{34}^+/T_{37}^+ :$ $x_1x_4^2x_6x_8x_9^2x_{10}^2$ (240)	1	$x^{10} - x^8 - 2x^6 - x^4 + x^2 - 1$
35	$L(10).2^2$ $= P\Gamma L(2,9)$	1440	$-$	$T_{35}/T_{45} :$ $x_1x_2x_3x_6$ (30)	1	$x^{10} + 300x^6 - 18x^5 + 10000x^2$ $-200x + 81$
36	$[2^5]A(5)$	1920	$-$	$T_{36}/T_{39} :$ $x_1x_4x_5^2x_6x_7^2x_{10}^2$ (240)	1	$x^{10} - 2x^8 - x^6 + 3x^4 - x^2 + 2$
37	$[2^4]S(5)$	1920	$+$	$T_{37}^+/T_{44}^+ :$ x_1x_6 (5)	1	$x^{10} - 2x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5$ $-x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1$
38	$\frac{1}{2}[2^5]S(5)$	1920	$-$	$T_{38}/T_{39} :$ $x_1x_3^3x_4x_5^2x_7^2x_9^3x_{10}$ (1920)	1	$x^{10} - 2x^8 - x^6 - 2x^4$ $+2x^2 - 2$
39	$[2^5]S(5)$	3840	$-$	$T_{39}/T_{45} :$ x_1x_6 (5)	1	$x^{10} - 2x^8 - 2x^7 - 2x^6$ $-2x^5 + 2x^4 - 2x^3$ $+2x^2 - 1$
40	$[A(5)^2]2$	7200	$-$	$T_{40}/T_{41} :$ $x_1^2x_3^4x_7^3x_9$ (120)	2	$x^{10} + x^9 - x^8 - x^7 - 2x^6$ $+2x^3 + 3x^2 + x + 1$
41	$[\frac{1}{2}S(5)^2]2$ $= [A(5) : 2]2$	14400	$-$	$T_{41}/T_{43} :$ $x_1x_2^3x_4x_5^4x_7^2x_8^4x_9^3x_{10}^2$ (7200)	1	$x^{10} + 2x^9 + 4x^8 - x^6$ $+x^4 - 2x - 1$
42	$\frac{1}{2}[S(5)^2]2$	14400	$+$	$T_{42}^+/T_{44}^+ :$ x_1x_3 (20)	1	$x^{10} + 10x^6 - 8x^5 - 25x^2$ $+40x - 16$
43	$[S(5)^2]2$	28800	$-$	$T_{43}/T_{45} :$ x_1x_3 (20)	1	$x^{10} - 2x^8 - 2x^7 - 2x^6$ $-2x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2$ $-2x + 1$
44	A_{10}	$\frac{1}{2}10!$	$+$	d(f)	-	$x^{10} - 2x^8 - 2x^7 - 2x^3$ $+2x^2 + x - 1$
45	S_{10}	10!	$-$		-	$x^{10} + x + 1$

Inklusion bis auf Konjugation:

$T_2/T_6 : (4,10)(6,8)$
$T_4/T_{10} : (4,6,10,8)$
$T_{10}/T_{17} : (4,6,10,8)$
$T_7^+/T_{26}^+ : (4,5)(6,8,10,7)$
$T_{13}/T_{32} : (4,5)(6,8,10,7)$
$T_{12}/T_{40} : (8,10)$

Nicht triviale Konjugationsklassen:

$T_3/T_9 : (2,6)(8,10)$
$T_6/T_9 : (4,10)(6,8)$
$T_4'/T_{10} : (2,10)(4,8)$
$T_5/T_{17} : (4,10)(6,8)$
$T_9/T_{19} : (4,6,10,8)$
$T_{10}/T_{20} : (4,6,10,8)$
$T_7'^+/T_{26}^+ : (2,5,8,3)(4,10,9,6)$
$T_{17}/T_{27} : (4,6,10,8)$
$T_{21}/T_{27} : (4,6,10,8)$
$T_{18}^+/T_{28}^+ : (4,6,10,8)$
$T_{13}'/T_{32} : (2,4,6,5,8,9,10,3)$
$T_{22}/T_{41} : (3,7,9,5)(6,10,8)$
$T_{40}/T_{41} : (8,10).$

Grad 11:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
1	$C(11)$ $= 11$	11	$+$	$T_1^+/T_3^+ :\quad x_1x_2\quad (11)$	1	$x^{11}+x^{10}-10x^9-9x^8+36x^7$ $+28x^6-56x^5-35x^4+35x^3$ $+15x^2-6x-1$
2	$D(11)$ $= 11:2$	22	$-$	$T_2/T_4 :\quad x_1x_2\quad (11)$	1	$x^{11}-x^{10}+5x^9-4x^8+10x^7$ $-6x^6+11x^5-7x^4+9x^3$ $-4x^2+2x+1$
3	$F_{55}(11)$ $= 11:5$	55	$+$	$T_3^+/T_5^+ :\quad x_1x_2x_3\quad (55)$	1	$x^{11}-33x^9+396x^7-2079x^5$ $+4455x^3-2673x-243$
4	$F_{110}(11)$ $= 11:10$	110	$-$	$T_4/T_8 :\quad x_1x_2x_3\quad (55)$	1	$x^{11}-2$
5	$L(11)$ $= PSL(2,11)(11)$	660	$+$	$T_5^+/T_6^+ :\quad x_1x_2x_6\quad (55)$	1	$x^{11}+44x^9-1133x^8+3597x^7$ $+18161x^6-105215x^5$ $+74514x^4+690767x^3$ $-1435929x^2+138600x$ $+53994$
6	$M(11)$	7920	$+$	$T_6^+/T_7^+ :\quad x_1x_2x_3x_4x_{10}\quad (66)$	2	$x^{11}-x^{10}-121x^9+65x^8$ $+5345x^7-481x^6-96739x^5$ $-23689x^4+413690x^3$ $-493810x^2+26910x-856170$
7	A_{11}	$\frac{1}{2}11!$	$+$	d(f)	-	$x^{11}+x^{10}+2x^9+2x^8$ $+x^6-x^5+2x^4+2x^3$ $+x^2-1$
8	S_{11}	11!	$-$		-	$x^{11}+2x^9-x^8-x^7+x^6$ $+2x^5-x^3+x^2-x-1$

Nicht triviale Konjugationsklassen:
$T_6/T_7 \quad : (10, 11).$

Grad 12:

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
1	$C(4)[\times]C(3)$	12	$-$	$T_1/T_{11}:$	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8$ $-x^7+x^6-x^5+x^4$ $-x^3+x^2-x+1$
				$T_1/T_{12}:$	$x_1x_2x_4$	(12)	1	
				$T_1/T_{14}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_1/T_{19}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_1/T_{29}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_1'/T_{73}:$	x_1x_7	(6)	1	
2	$E(4)[\times]C(3)$ $= 6 \times 2$	12	$+$	$T_2^+/T_{10}^+:$	$x_1x_2x_3$	(12)	1	$x^{12}-x^{10}+x^8-x^6$ $+x^4-x^2+1$
				$T_2^+/T_{18}^+:$	x_1x_4	(6)	1	
				$T_2^+/T_{20}^+:$	x_1x_4	(6)	1	
				$T_2'^+/T_{25}^+:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_2'^+/T_{26}^+:$	x_1x_2	(12)	1	
3	$D_6(6)[\times]2$ $= \frac{1}{2}[3:2]E(4)$	12	$+$	$T_3'^+/T_{10}^+:$	x_1x_3	(6)	3	$x^{12}+25x^6+1$
				$T_3'^+/T_{16}^+:$	x_1x_2	(6)	2	
				$T_3'^+/T_{18}^+:$	x_1x_2	(6)	1	
				$T_3'^+/T_{21}^+:$	x_1x_2	(6)	1	
				$T_3^+/T_{24}^+:$	x_1x_2	(6)	1	
				$T_3'^+/T_{179}^+:$	x_1x_2	(6)	1	
4	$A_4(12)$	12	$+$	$T_4^+/T_6^+:$	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}+4x^{10}+24x^8+48x^6$ $-560x^4+3136$
				$T_4^+/T_{20}^+:$	x_1x_4	(6)	2	
				$T_4'^+/T_{32}^+:$	x_1x_2	(12)	2	
				$T_4'^+/T_{33}^+:$	x_1x_8	(6)	1	
				$T_4^+/T_{132}^+:$	x_1x_4	(6)	1	
5	$\frac{1}{2}[3:2]4$	12	$-$	$T_5/T_{11}:$	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}-3x^{11}+2x^9+43x^8$ $-74x^7-71x^6-26x^5$ $+271x^4+720x^3$ $-406x^2-1633x$ $+1699$
				$T_5/T_{13}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_5/T_{15}:$	$x_1x_2x_3$	(12)	1	
				$T_5'/T_{19}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_5'/T_{27}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_5/T_{30}:$	x_1x_3	(12)	1	
				$T_5'/T_{72}:$	x_1x_7	(6)	1	
6	$A_4(12)\times 2$	24	$+$	$T_6^+/T_{26}^+:$	x_1x_2	(24)	3	$x^{12}-6x^{10}-2x^9+27x^8$ $-6x^7-30x^6+12x^5$ $-14x^3-1$
				$T_6'^+/T_{56}^+:$	x_1x_2	(24)	2	
				$T_6'^+/T_{76}^+:$	x_1x_8	(6)	1	
7	$A_4(6)[\times]2$ $= [\frac{1}{8}2^6]3$	24	$+$	$T_7^+/T_{23}^+:$	$x_1x_2x_7$	(12)	1	$x^{12}+2x^{10}+4x^8+x^6$ $+2x^4-3x^2+1$
				$T_7^+/T_{24}^+:$	$x_1x_3x_5$	(8)	1	
				$T_7^+/T_{25}^+:$	$x_1x_3x_5$	(8)	2	
				$T_7'^+/T_{56}^+:$	x_1x_2	(24)	2	
				$T_7'^+/T_{58}^+:$	x_1x_6	(6)	1	
				$T_7'^+/T_{60}^+:$	x_1x_6	(6)	1	
				$T_7'^+/T_{75}^+:$	x_1x_8	(6)	1	
8	$S_4(12d)$	24	$-$	$T_8/T_{22}:$	x_1x_2	(12)	2	$x^{12}-x^{11}+x^{10}-6x^9+2x^8$ $-x^7+5x^6+8x^5+4x^4$ $+2x^2+1$
				$T_8'/T_{44}:$	x_1x_{10}	(6)	2	
				$T_8'/T_{66}:$	x_1x_2	(12)	2	
				$T_8'/T_{177}:$	x_1x_2	(6)	1	
				$T_8'/T_{218}:$	x_1x_5	(6)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
9	$\frac{1}{2}[\frac{1}{8}2^6]S(3)$ $= S_4(12e)$	24	+	$T_9^+/T_{21}^+ :$	$x_1x_3x_5$	(8)	2	$x^{12}+2x^{10}+2x^8-x^6+4x^4$ $-x^2+1$
				$T_9'^+/T_{23}^+ :$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_9'^+/T_{24}^+ :$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_9'^+/T_{65}^+ :$	x_1x_6	(6)	1	
				$T_9'^+/T_{68}^+ :$	x_1x_3	(12)	2	
				$T_9'^+/T_{69}^+ :$	x_1x_2	(6)	3	
				$T_9'^+/T_{74}^+ :$	x_1x_6	(6)	1	
10	$S(3)[\times]E(4)$	24	+	$T_{10}^+/T_{37}^+ :$	x_1x_4	(6)	2	$x^{12}+16x^{10}+124x^8+440x^6$ $+736x^4+1824x^2+1936$
				$T_{10}^+/T_{43}^+ :$	x_1x_4	(6)	1	
				$T_{10}'^+/T_{48}^+ :$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{10}'^+/T_{123}^+ :$	x_1x_4	(6)	1	
11	$S(3)[\times]C(4)$	24	−	$T_{11}/T_{28} :$	$x_1x_2x_6$	(12)	1	$x^{12}+x^9+6x^6-4x^3+1$
				$T_{11}/T_{39} :$	x_1x_4	(12)	2	
				$T_{11}/T_{53} :$	x_1x_3	(12)	1	
				$T_{11}'/T_{119} :$	x_1x_7	(6)	1	
12	$\frac{1}{2}[3:2]cD(4)$	24	−	$T_{12}/T_{28} :$	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}-23x^6-27$
				$T_{12}/T_{38} :$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{12}'/T_{54} :$	x_1x_4	(12)	1	
				$T_{12}'/T_{118} :$	x_1x_7	(6)	1	
				$T_{12}'/T_{218} :$	x_1x_{12}	(6)	1	
13	$\frac{1}{2}[3:2]eD(4)$	24	−	$T_{13}/T_{28} :$	$x_1x_2x_3$	(12)	1	$x^{12}-9x^8+3x^4-3$
				$T_{13}'/T_{38} :$	x_1x_6	(12)	1	
				$T_{13}/T_{44} :$	x_1x_7	(6)	1	
				$T_{13}'/T_{49} :$	x_1x_3	(12)	1	
				$T_{13}/T_{52} :$	x_1x_3	(12)	1	
				$T_{13}'/T_{120} :$	x_1x_7	(6)	1	
14	$D(4)[\times]C(3)$	24	−	$T_{14}/T_{28} :$	$x_1x_2x_7$	(12)	1	$x^{12}+26x^6+9x^3+1$
				$T_{14}/T_{42} :$	x_1x_4	(12)	1	
				$T_{14}/T_{45} :$	x_1x_7	(6)	1	
				$T_{14}/T_{51} :$	x_1x_3	(12)	1	
				$T_{14}'/T_{121} :$	x_1x_7	(6)	1	
15	$\frac{1}{2}[3:2]dD(4)$	24	−	$T_{15}/T_{28} :$	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}-12x^{10}+54x^8-112x^6$ $+105x^4-36x^2+27$
				$T_{15}'/T_{42} :$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{15}/T_{50} :$	x_1x_3	(12)	1	
				$T_{15}'/T_{116} :$	x_1x_7	(6)	1	
16	$[3^2]E(4)$	36	+	$T_{16}'^+/T_{37}^+ :$	x_1x_3	(6)	2	$x^{12}+8x^{10}-72x^8-200x^6$ $+528x^4+3872x^2+484$
				$T_{16}'^+/T_{70}^+ :$	x_1x_3	(6)	1	
				$T_{16}^+/T_{71}^+ :$	x_1x_3	(6)	3	
				$T_{16}'^+/T_{161}^+ :$	x_1x_3	(6)	1	
17	$[3^2]4$	36	−	$T_{17}'/T_{35} :$	$x_1x_2x_5$	(36)	1	$x^{12}+6x^{10}-49x^8+31x^6$ $-319x^4+4205x^2+4205$
				$T_{17}'/T_{36} :$	x_1x_4	(6)	1	
				$T_{17}'/T_{41} :$	x_1x_4	(6)	2	
				$T_{17}/T_{72} :$	x_1x_3	(6)	1	
				$T_{17}'/T_{73} :$	x_1x_3	(6)	1	
				$T_{17}'/T_{160} :$	x_1x_3	(6)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
18	$[3^2]E(4)$	36	+	T_{18}^{+}/T_{37}^{+} :	$x_1x_3x_7$	(12)	2	$x^{12}+x^9+2x^6-x^3+1$
				$T_{18}^{\prime +}/T_{70}^{+}$:	x_1x_2	(6)	2	
				$T_{18}^{\prime +}/T_{158}^{+}$:	x_1x_4	(12)	1	
19	$[3^2]4$	36	−	T_{19}/T_{38} :	$x_1x_3x_7$	(12)	1	$x^{12}-3x^{11}+9x^{10}-11x^9$ $+15x^8-8x^7+33x^6$ $+26x^5+19x^4-19x^3$ $+8x^2+1$
				T_{19}/T_{39} :	$x_1x_3x_7$	(12)	2	
				T_{19}/T_{42} :	$x_1x_2x_3$	(36)	1	
				T_{19}/T_{131} :	x_1x_7	(6)	1	
				T_{19}'/T_{159} :	x_1x_4	(12)	1	
20	$A(4)[\times]C(3)$	36	+	T_{20}^{+}/T_{43}^{+} :	$x_1x_2x_3$	(12)	1	$x^{12}-32x^9+156x^8-704x^6$ $+480x^5+3744x^4+512x^3$ $-768x^2-2304x+1728$
				$T_{20}^{\prime +}/T_{85}^{+}$:	x_1x_2	(12)	2	
				T_{20}^{+}/T_{194}^{+} :	x_1x_4	(18)	1	
21	$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}2^6]S(3)$	48	+	$T_{21}^{\prime +}/T_{48}^{+}$:	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}+x^{10}+4x^8+x^6$ $+2x^4-2x^2+1$
				$T_{21}^{\prime +}/T_{97}^{+}$:	x_1x_2	(6)	1	
				$T_{21}^{\prime +}/T_{103}^{+}$:	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{21}^{\prime +}/T_{106}^{+}$:	x_1x_{10}	(6)	3	
22	$S_4(12d)\times 2$	48	−	T_{22}/T_{49} :	x_1x_2	(24)	1	$x^{12}-x^{11}-5x^8+9x^7-7x^6$ $+9x^5-5x^4-x+1$
				T_{22}'/T_{100} :	x_1x_4	(24)	2	
23	$S_4(6d)[\times]2$ $=[\frac{1}{8}2^6]S(3)$	48	+	T_{23}^{+}/T_{48}^{+} :	$x_1x_3x_5$	(8)	2	$x^{12}+x^{10}+4x^8+4x^6$ $+4x^4+x^2+1$
				$T_{23}^{\prime +}/T_{101}^{+}$:	x_1x_2	(24)	2	
				$T_{23}^{\prime +}/T_{109}^{+}$:	x_1x_6	(6)	1	
				$T_{23}^{\prime +}/T_{113}^{+}$:	x_1x_6	(6)	1	
				T_{23}^{+}/T_{180}^{+} :	x_1x_6	(6)	1	
				$T_{23}^{\prime +}/T_{183}^{+}$:	x_1x_2	(6)	1	
24	$S_4(6c)[\times]2$	48	+	T_{24}^{+}/T_{48}^{+} :	$x_1x_2x_4x_9$	(24)	2	$x^{12}-2x^{11}+2x^{10}-2x^9$ $+3x^8-2x^7+2x^5$ $+3x^4-8x^3+8x^2$ $-4x+1$
				$T_{24}^{\prime +}/T_{103}^{+}$:	x_1x_2	(24)	2	
				$T_{24}^{\prime +}/T_{108}^{+}$:	x_1x_6	(6)	1	
				$T_{24}^{\prime +}/T_{112}^{+}$:	x_1x_6	(6)	1	
				$T_{24}^{\prime +}/T_{123}^{+}$:	x_1x_8	(6)	1	
25	$2A_4(6)[\times]2$ $=[\frac{1}{4}2^6]3$	48	+	T_{25}^{+}/T_{48}^{+} :	$x_1x_2x_7$	(12)	1	$x^{12}-2x^{11}+2x^{10}+2x^9$ $-4x^8+3x^6-4x^4$ $+2x^3+2x^2$ $-2x+1$
				$T_{25}^{\prime +}/T_{87}^{+}$:	x_1x_6	(6)	1	
				$T_{25}^{\prime +}/T_{89}^{+}$:	x_1x_2	(6)	1	
				$T_{25}^{\prime +}/T_{90}^{+}$:	x_1x_2	(24)	3	
				$T_{25}^{\prime +}/T_{91}^{+}$:	x_1x_2	(6)	1	
26	$A_4(12)\times 2^2$	48	+	$T_{26}^{\prime +}/T_{85}^{+}$:	x_1x_4	(6)	2	$x^{12}-6x^{10}+18x^8-32x^6$ $+33x^4-18x^2+1$
				$T_{26}^{\prime +}/T_{90}^{+}$:	$x_1x_2x_3$	(16)	2	
27	$[2]S_4(6)_2$	48	−	T_{27}'/T_{49} :	$x_1x_2x_8$	(24)	1	
				T_{27}'/T_{102} :	$x_1x_4x_{11}$	(16)	2	
28	$D(4)[\times]S(3)$	48	−	T_{28}/T_{81} :	x_1x_4	(12)	2	$x^{12}-2x^6+4x^4-4x^2+2$
				T_{28}/T_{83} :	x_1x_7	(6)	1	
				T_{28}/T_{86} :	x_1x_3	(12)	1	
				T_{28}'/T_{156} :	x_1x_7	(6)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
29	$[\frac{1}{2}4^2]3$	48	$-$	$T_{29}/T_{51}:$	$x_1x_4^2$	(12)	1	$x^{12}-4x^{11}+35x^9-69x^8-55x^7+174x^6-89x^4+5x^3-5x^2+x+1$
				$T_{29}/T_{53}:$	$x_1x_2x_7$	(12)	1	
				$T'_{29}/T_{54}:$	$x_1x_2^2$	(12)	1	
				$T_{29}/T_{94}:$	x_1x_2	(24)	1	
				$T'_{29}/T_{99}:$	x_1x_4	(24)	1	
				$T'_{29}/T_{104}:$	x_1x_4	(24)	1	
				$T'_{29}/T_{105}:$	$x_1x_6^2$	(12)	1	
30	$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}4^3]S(3)$	48	$-$	$T_{30}/T_{50}:$	$x_1x_4^2$	(12)	1	$x^{12}+150x^{10}+8445x^8+219500x^6+2588100x^4+11280000x^2+3699200$
				$T_{30}/T_{52}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{30}/T_{53}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{30}/T_{98}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T'_{30}/T_{102}:$	x_1x_4	(12)	1	
				$T'_{30}/T_{107}:$	$x_1x_6^2$	(12)	3	
31	$[4^2]3$	48	$+$	$T^+_{31}/T^+_{55}:$	$x_1x_2x_3$	(16)	1	
				$T'^+_{31}/T^+_{60}:$	$x_1x_6^2$	(12)	1	
				$T^+_{31}/T^+_{62}:$	$x_1x_2x_7$	(24)	1	
				$T'^+_{31}/T^+_{63}:$	$x_1x_2x_4$	(16)	1	
				$T'^+_{31}/T^+_{65}:$	$x_1x_6^2$	(12)	1	
32	$[E(4)^2]3$	48	$+$	$T^+_{32}/T^+_{56}:$	$x_1x_2x_3$	(16)	1	$x^{12}-9x^{10}+28x^8-33x^6+18x^4-14x^2+1$
				$T^+_{32}/T^+_{67}:$	$x_1x_2x_4$	(24)	1	
				$T'^+_{32}/T^+_{68}:$	$x_1x_2x_4$	(16)	1	
				$T^+_{32}/T^+_{85}:$	x_1x_4	(6)	1	
33	$A_5(12)$	60	$+$	$T'^+_{33}/T^+_{76}:$	$x_1x_2x_3x_4$	(30)	1	
				$T'^+_{33}/T^+_{179}:$	x_1x_8	(6)	2	
34	$F_{36}:2(12e)$	72	$+$	$T'^+_{34}/T^+_{77}:$	$x_1x_2x_3x_4x_7$	(72)	2	$x^{12}+12x^{10}+54x^8+104x^6+57x^4-36x^2+16$
				$T'^+_{34}/T^+_{172}:$	x_1x_7	(6)	4	
				$T'^+_{34}/T^+_{183}:$	x_1x_4	(12)	1	
				$T^+_{34}/T^+_{202}:$	x_1x_4	(12)	1	
35	$[D_6^2]2$ $= D_6 \wr 2$	72	$-$	$T'_{35}/T_{78}:$	x_1x_4	(6)	2	$x^{12}-4x^{10}+12x^8-51x^6+164x^4-8x^2+433$
				$T'_{35}/T_{116}:$	x_1x_3	(6)	1	
				$T'_{35}/T_{121}:$	x_1x_3	(6)	1	
				$T_{35}/T_{200}:$	x_1x_3	(6)	1	
36	$F_{36}:2(12d)$	72	$-$	$T_{36}/T_{78}:$	$x_1x_2x_3x_6$	(72)	2	$x^{12}+x^9-x^6+x^3+1$
				$T'_{36}/T_{118}:$	x_1x_3	(6)	1	
				$T'_{36}/T_{120}:$	x_1x_3	(6)	1	
				$T'_{36}/T_{201}:$	x_1x_4	(12)	1	
37	$[3^2:2]E(4)$	72	$+$	$T^+_{37}/T^+_{77}:$	$x_1x_2x_3x_4$	(18)	1	$x^{12}+2x^6-4x^3+2$
				$T'^+_{37}/T^+_{117}:$	x_1x_7	(6)	3	
				$T'^+_{37}/T^+_{195}:$	x_1x_4	(12)	1	
38	$\frac{1}{2}[3^2:2]cD(4)$	72	$-$	$T_{38}/T_{81}:$	$x_1x_2x_3$	(36)	2	$x^{12}+4x^9-4x^6-3x^3+3$
				$T_{38}/T_{169}:$	x_1x_7	(6)	1	
				$T'_{38}/T_{196}:$	x_1x_4	(12)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
39	$[3^2:2]4$	72	$-$	$T_{39}/T_{79}:$	$x_1x_2x_3x_4x_7$	(72)	1	$x^{12}-5x^3+5$
				$T'_{39}/T_{80}:$	$x_1x_2x_5$	(36)	1	
				$T_{39}/T_{81}:$	$x_1x_2x_5$	(36)	1	
				$T_{39}/T_{170}:$	x_1x_7	(6)	1	
				$T'_{39}/T_{197}:$	x_1x_4	(12)	1	
40	$F_{36}(6)[\times]2$	72	$+$	$T'^{+}_{40}/T^{+}_{77}:$	$x_1x_2x_3x_4x_7$	(72)	1	$x^{12}+6x^{10}+13x^8+24x^6$ $+32x^4-8x^2+4$
				$T'^{+}_{40}/T^{+}_{171}:$	x_1x_6	(6)	2	
				$T^{+}_{40}/T^{+}_{180}:$	x_1x_4	(12)	1	
				$T^{+}_{40}/T^{+}_{199}:$	x_1x_4	(12)	1	
41	$\frac{1}{2}[(\frac{1}{4}2^3)^2]F_{36}(6)$	72	$-$	$T_{41}/T_{78}:$	$x_1x_2x_5$	(36)	1	$x^{12}+3x^9-x^6-3x^3+1$
				$T'_{41}/T_{79}:$	$x_1x_2x_3x_4$	(18)	1	
				$T_{41}/T_{82}:$	$x_1x_2x_5$	(36)	1	
				$T'_{41}/T_{119}:$	x_1x_3	(6)	1	
				$T_{41}/T_{198}:$	x_1x_4	(12)	1	
42	$[3^2]D(4)$ $= 6 \wr 2$	72	$-$	$T_{42}/T_{81}:$	$x_1x_3x_7$	(12)	2	$x^{12}-11x^6+37$
				$T_{42}/T_{167}:$	x_1x_7	(6)	1	
				$T_{42}/T_{208}:$	x_1x_3	(12)	1	
43	$A(4)[\times]S(3)$	72	$+$	$T^{+}_{43}/T^{+}_{206}:$	x_1x_5	(12)	1	$x^{12}-2x^9+18x^6+54$
				$T^{+}_{43}/T^{+}_{234}:$	x_1x_4	(18)	1	
				$T'^{+}_{43}/T^{+}_{295}:$	x_1x_5	(12)	1	
44	$\frac{1}{2}[3:2]S(4)$	72	$-$	$T_{44}/T_{83}:$	$x_1x_2x_3$	(12)	1	$x^{12}-6x^6-10x^3-6$
				$T'_{44}/T_{127}:$	x_1x_8	(12)	2	
				$T_{44}/T_{233}:$	x_1x_4	(18)	1	
45	$S(4)[\times]C(3)$	72	$-$	$T_{45}/T_{83}:$	$x_1x_5^2$	(12)	1	$x^{12}-4x^9+13x^8-11x^6$ $+5x^5+26x^4+x^3-x^2$ $-2x+1$
				$T_{45}/T_{205}:$	x_1x_5	(12)	1	
				$T_{45}/T_{231}:$	x_1x_4	(18)	1	
46	$[(\frac{1}{3}3^3):2]4_4$	72	$+$	$T^{+}_{46}/T^{+}_{84}:$	$x_1x_3x_5$	(36)	1	
				$T'^{+}_{46}/T^{+}_{173}:$	$x_1x_2x_4$	(36)	2	
				$T'^{+}_{46}/T^{+}_{182}:$	x_1x_5	(12)	1	
47	$[(\frac{1}{3}3^3):2]E(4)_4$	72	$+$	$T^{+}_{47}/T^{+}_{84}:$	x_1x_3	(18)	1	
				$T^{+}_{47}/T^{+}_{122}:$	x_1x_2	(18)	1	
				$T^{+}_{47}/T^{+}_{174}:$	$x_1x_2x_7$	(36)	4	
				$T'^{+}_{47}/T^{+}_{181}:$	x_1x_5	(12)	1	
48	$2S_4(6)[\times]2$ $=[\frac{1}{4}2^6]S(3)$	96	$+$	$T'^{+}_{48}/T^{+}_{136}:$	x_1x_6	(6)	1	$x^{12}+2x^{10}-4x^6+2x^2+1$
				$T'^{+}_{48}/T^{+}_{138}:$	x_1x_2	(6)	1	
				$T'^{+}_{48}/T^{+}_{139}:$	x_1x_2	(24)	3	
				$T^{+}_{48}/T^{+}_{219}:$	x_1x_6	(6)	1	
49	$[2]2S_4(6)_2$	96	$-$	$T'_{49}/T_{127}:$	x_1x_4	(6)	2	$x^{12}-2x^{11}-2x^9-13x^8$ $-20x^7-16x^6-20x^5$ $-13x^4-2x^3-2x+1$
				$T'_{49}/T_{148}:$	$x_1x_2x_{12}$	(16)	2	
50	$\frac{1}{2}e[\frac{1}{16}.D(4)^3]S(3)$	96	$-$	$T_{50}/T_{86}:$	x_1x_2	(12)	1	$x^{12}+x^8+3x^4+11$
				$T'_{50}/T_{135}:$	$x_1x_2x_4x_6$	(24)	3	
				$T'_{50}/T_{146}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T'_{50}/T_{149}:$	x_1x_2	(12)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
51	$[\frac{1}{16}.D(4)^3]3$	96	$-$	T_{51}/T_{86} :	$x_1x_2x_7$	(12)	1	$x^{12}+6x^8+9x^4+3$
				T'_{51}/T_{134} :	$x_1x_2x_6x_8$	(24)	1	
				T_{51}/T_{141} :	x_1x_2	(24)	1	
				T_{51}/T_{142} :	x_1x_2	(24)	1	
				T'_{51}/T_{143} :	x_1x_2	(24)	1	
52	$\frac{1}{2}c[\frac{1}{16}.D(4)^3]S(3)$	96	$-$	T_{52}/T_{86} :	$x_1x_2x_4$	(48)	1	$x^{12}-6x^{10}-9x^8-36x^6$ $+223x^4-214x^2-23$
				T'_{52}/T_{145} :	$x_1x_2x_6$	(48)	1	
				T'_{52}/T_{147} :	x_1x_4	(24)	1	
				T_{52}/T_{148} :	x_1x_2	(24)	1	
53	$[\frac{1}{2}4^2]S(3)$	96	$-$	T_{53}/T_{86} :	$x_1x_4^2$	(12)	1	$x^{12}-11x^{10}-x^9+46x^8$ $+12x^7-90x^6-48x^5$ $+78x^4+73x^3-19x^2$ $-36x-4$
				T_{53}/T_{150} :	x_1x_2	(24)	1	
				T'_{53}/T_{153} :	x_1x_4	(24)	1	
				T'_{53}/T_{155} :	$x_1x_2^2$	(12)	1	
54	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]D(6)_4$	96	$-$	T'_{54}/T_{86} :	$x_1x_2x_4$	(48)	1	$x^{12}-6x^8+9x^4+12$
				T'_{54}/T_{151} :	x_1x_2	(24)	1	
				T_{54}/T_{152} :	x_1x_4	(24)	1	
				T_{54}/T_{154} :	$x_1x_2x_4$	(48)	1	
55	$[\frac{1}{2}4^3]3$	96	$+$	T'^{+}_{55}/T^{+}_{89} :	$x_1x_2^2$	(12)	1	
				T^{+}_{55}/T^{+}_{95} :	$x_1x_2x_7$	(24)	1	
				T'^{+}_{55}/T^{+}_{97} :	$x_1x_2^2$	(12)	1	
				T'^{+}_{55}/T^{+}_{144} :	$x_1x_6^2$	(12)	1	
56	$[\frac{1}{2}2^6]3$	96	$+$	T^{+}_{56}/T^{+}_{90} :	$x_1x_2x_3$	(32)	3	$x^{12}-2x^{10}+2x^8-3x^6$ $+2x^4-2x^2+1$
				T^{+}_{56}/T^{+}_{101} :	$x_1x_2x_4$	(24)	1	
				T'^{+}_{56}/T^{+}_{103} :	$x_1x_2x_4$	(24)	1	
				T'^{+}_{56}/T^{+}_{144} :	x_1x_6	(6)	1	
57	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]A_4(6)_4$	96	$+$	T'^{+}_{57}/T^{+}_{91} :	$x_1x_2x_8$	(24)	1	
				T'^{+}_{57}/T^{+}_{144} :	$x_1x_2x_8$	(24)	2	
58	$[2^4]6$	96	$+$	T^{+}_{58}/T^{+}_{87} :	$x_1x_4x_8$	(8)	2	$x^{12}+x^{10}-13x^8-6x^6$ $+15x^4+8x^2+1$
				T^{+}_{58}/T^{+}_{108} :	$x_1x_4x_8$	(8)	1	
				T^{+}_{58}/T^{+}_{109} :	$x_1x_2x_3$	(12)	1	
				T'^{+}_{58}/T^{+}_{126} :	x_1x_2	(12)	1	
59	$[2^3]A_4(6)$	96	$-$	T_{59}/T_{88} :	$x_1x_2x_{10}$	(16)	2	$x^{12}+2x^{10}-43x^8$ $+146x^6-126x^4$ $+189$
				T_{59}/T_{110} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	
				T_{59}/T_{111} :	$x_1x_2x_{10}$	(16)	1	
				T'_{59}/T_{129} :	x_1x_4	(6)	1	
60	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]2A_4(6)_4$	96	$+$	T'^{+}_{60}/T^{+}_{89} :	$x_1x_4x_8$	(32)	2	$x^{12}-14x^8-7x^4+4$
				T'^{+}_{60}/T^{+}_{112} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	
				T^{+}_{60}/T^{+}_{113} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	
61	$[2^3]A_4(6)_4$	96	$-$	T_{61}/T_{92} :	$x_1x_2x_{10}$	(16)	2	$x^{12}-3x^8-4x^4-1$
				T_{61}/T_{114} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	
				T_{61}/T_{115} :	$x_1x_2x_{10}$	(16)	1	
62	$[4^2]S(3)$	96	$+$	T^{+}_{62}/T^{+}_{95} :	$x_1x_2x_3$	(16)	1	$x^{12}-10x^{10}+32x^8$ $-32x^6-59x^4$ $+198x^2+196$
				T'^{+}_{62}/T^{+}_{113} :	$x_1x_6^2$	(12)	1	
63	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]S_4(6d)_8b$	96	$+$	T'^{+}_{63}/T^{+}_{95} :	$x_1x_2x_3^2x_4$	(96)	1	
				T^{+}_{63}/T^{+}_{112} :	$x_1x_6^2$	(12)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
64	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]S_4(6d)_8a$	96	$-$	T'_{64}/T_{96} :	$x_1x_4x_{10}$	(16)	2	$x^{12}-16x^8+9x^4-16$
				T_{64}/T_{114} :	$x_1x_2x_6^2$	(96)	1	
				T'_{64}/T_{115} :	$x_1x_2x_4$	(16)	1	
65	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]S_4(6c)_4$	96	$+$	T'^{+}_{65}/T^{+}_{97} :	$x_1x_4x_8$	(32)	2	$x^{12}-3x^4+4$
				T^{+}_{65}/T^{+}_{112} :	$x_1x_2x_4$	(32)	1	
				T^{+}_{65}/T^{+}_{113} :	$x_1x_2x_6^2$	(96)	1	
66	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]S_4(6d)_2$	96	$-$	T'_{66}/T_{100} :	$x_1x_4x_8$	(16)	2	$x^{12}-2x^{10}+12x^8$ $-24x^6+13x^4$ $+18x^2-26$
				T'_{66}/T_{110} :	$x_1x_2x_6$	(48)	1	
				T_{66}/T_{111} :	$x_1x_2x_4$	(16)	1	
				T'_{66}/T_{127} :	x_1x_{10}	(6)	1	
67	$[E(4)^2]S(3)$	96	$+$	T^{+}_{67}/T^{+}_{101} :	$x_1x_2x_3$	(16)	1	$x^{12}-x^8-x^6-x^4+1$
				T^{+}_{67}/T^{+}_{128} :	x_1x_4	(6)	1	
68	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]S_4(6c)$	96	$+$	T'^{+}_{68}/T^{+}_{101} :	$x_1x_2x_3^2x_4$	(96)	1	$x^{12}+6x^{10}+18x^8+52x^6$ $+225x^4+486x^2+324$
				T'^{+}_{68}/T^{+}_{103} :	$x_1x_2x_3$	(32)	2	
69	$[2^4]D_6(6)$	96	$+$	T^{+}_{69}/T^{+}_{106} :	$x_1x_4x_8$	(8)	2	$x^{12}-3x^{11}+4x^{10}-8x^7$ $+31x^6-20x^5-6x^4$ $+21x^3+81x^2-23x+23$
				T'^{+}_{69}/T^{+}_{108} :	x_1x_2	(12)	1	
				T^{+}_{69}/T^{+}_{109} :	x_1x_2	(12)	1	
				T'^{+}_{69}/T^{+}_{126} :	x_1x_2	(12)	1	
70	$\frac{1}{2}[3^3:2]E(4)$	108	$+$	T^{+}_{70}/T^{+}_{117} :	$x_1x_5^2$	(12)	3	$x^{12}+x^9-x^6+2x^3+4$
				T'^{+}_{70}/T^{+}_{130} :	$x_1x_2x_3x_4$	(27)	3	
71	$[3^3]E(4)$	108	$+$	T^{+}_{71}/T^{+}_{117} :	$x_1x_5^2$	(12)	1	$x^{12}+4x^9+4x^6+3$
				T^{+}_{71}/T^{+}_{130} :	$x_1x_2x_3x_4$	(27)	1	
				T^{+}_{71}/T^{+}_{132} :	x_1x_2	(18)	1	
				T^{+}_{71}/T^{+}_{133} :	x_1x_2	(18)	1	
72	$[3^3]4$	108	$-$	T_{72}/T_{116} :	$x_1x_2x_5$	(36)	1	
				T_{72}/T_{119} :	$x_1x_5^2$	(12)	1	
				T_{72}/T_{120} :	$x_1x_5^2$	(12)	1	
				T_{72}/T_{131} :	$x_1x_2x_3x_4$	(27)	1	
73	$\frac{1}{2}[3^3:2]4$	108	$-$	T_{73}/T_{118} :	$x_1x_5^2$	(12)	1	
				T_{73}/T_{119} :	$x_1x_5^2$	(12)	1	
				T_{73}/T_{121} :	$x_1x_2x_5$	(36)	1	
				T'_{73}/T_{131} :	$x_1x_2x_3x_8$	(27)	1	
74	$S_5(12)$	120	$+$	T'^{+}_{74}/T^{+}_{123} :	$x_1x_3x_5$	(20)	1	$x^{12}-3x^{10}-3x^8+4x^6$ $+2x^4-x^2+1$
				T'^{+}_{74}/T^{+}_{183} :	$x_1x_3x_5$	(20)	1	
				T'^{+}_{74}/T^{+}_{269} :	x_1x_{10}	(6)	1	
75	$L(6)[\times]2$	120	$+$	T^{+}_{75}/T^{+}_{123} :	$x_1x_3x_5$	(20)	1	$x^{12}-2x^{10}-3x^8+14x^6$ $-18x^4+8x^2+1$
				T^{+}_{75}/T^{+}_{180} :	$x_1x_3x_5$	(20)	1	
				T^{+}_{75}/T^{+}_{230} :	x_1x_2	(30)	2	
				T^{+}_{75}/T^{+}_{269} :	x_1x_{12}	(6)	1	
76	$[2]L(6)_6$	120	$+$	T'^{+}_{76}/T^{+}_{230} :	x_1x_2	(30)	2	$x^{12}+2x^8-2x^6+5x^4$ $-6x^2+1$
77	$[S(3)^2]E(4)$	144	$+$	T^{+}_{77}/T^{+}_{210} :	x_1x_7	(6)	2	$x^{12}-2x^{10}+x^8+6x^6$ $-6x^4+1$
				T'^{+}_{77}/T^{+}_{219} :	x_1x_6	(12)	1	
				T'^{+}_{77}/T^{+}_{236} :	x_1x_4	(12)	1	
				T'^{+}_{77}/T^{+}_{279} :	x_1x_9	(6)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
78	$[2]F_{36} : 2_2\{S_3^2\}$	144	$-$	T'_{78}/T_{125} :	$x_1x_2x_3x_4$	(18)	1	$x^{12} - 8x^3 + 8$
				T'_{78}/T_{156} :	x_1x_3	(6)	1	
				T_{78}/T_{235} :	x_1x_4	(12)	1	
79	$[S(3)^2]4$	144	$-$	T_{79}/T_{125} :	$x_1x_2x_5$	(36)	1	$x^{12} - 4x^8 - 4x^6 + 5x^4$ $+4x^2 + 2$
				T_{79}/T_{211} :	x_1x_7	(6)	2	
				T'_{79}/T_{237} :	x_1x_4	(12)	1	
				T'_{79}/T_{278} :	x_1x_9	(6)	1	
80	$[2]F_{36} : 2_2\{3^2 : 4\}$	144	$-$	T'_{80}/T_{125} :	$x_1x_2x_3x_4x_7$	(72)	1	$x^{12} + 12x^{10} + 18x^8$ $-12x^6 - 159x^4$ $+144x^2 - 8$
				T'_{80}/T_{209} :	x_1x_{11}	(6)	1	
				T_{80}/T_{238} :	x_1x_4	(12)	1	
81	$[3^2 : 2]D(4)$	144	$-$	T_{81}/T_{125} :	$x_1x_2x_3x_4x_7x_8$	(72)	1	$x^{12} + x^6 + 2$
				T_{81}/T_{217} :	x_1x_7	(6)	1	
				T'_{81}/T_{240} :	x_1x_4	(12)	1	
82	$[(\frac{1}{4}2^3)^2]F_{36}(6)$	144	$-$	T'_{82}/T_{125} :	$x_1x_2x_3x_4^2x_7$	(144)	1	$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8$ $-116x^6 + 129x^4$ $-72x^2 - 16$
				T'_{82}/T_{209} :	x_1x_7	(6)	1	
				T_{82}/T_{241} :	x_1x_4	(12)	1	
83	$S(4)[\times]S(3)$	144	$-$	T_{83}/T_{239} :	x_1x_5	(12)	1	$x^{12} + 2x^9 + 4x^6$ $+2x^3 + 2$
				T_{83}/T_{258} :	x_1x_4	(18)	1	
84	$[(\frac{1}{3}3^3) : 2]D(4)_4$	144	$+$	T^{+}_{84}/T^{+}_{157} :	x_1x_2	(18)	1	
				T'^{+}_{84}/T^{+}_{212} :	$x_1x_2x_{11}$	(36)	2	
				T'^{+}_{84}/T^{+}_{220} :	x_1x_5	(12)	1	
				T'^{+}_{84}/T^{+}_{272} :	x_1x_8	(12)	1	
85	$[\frac{1}{4}E(4)^3 : 3]3$	144	$+$	T^{+}_{85}/T^{+}_{128} :	$x_1x_2^2$	(48)	1	
				T^{+}_{85}/T^{+}_{164} :	$x_1x_2x_3$	(16)	3	
86	$[\frac{1}{16}.D(4)^3]S(3)$	192	$-$	T_{86}/T_{185} :	x_1x_2	(24)	1	$x^{12} - x^{10} + x^8 - x^4$ $-x^2 - 1$
				T_{86}/T_{186} :	x_1x_2	(24)	1	
				T'_{86}/T_{193} :	$x_1x_2x_6x_8$	(24)	1	
87	$[2^5]6$	192	$+$	T^{+}_{87}/T^{+}_{136} :	$x_1x_2x_3$	(12)	1	$x^{12} + x^{10} - 6x^8 - 6x^6$ $+8x^4 + 8x^2 + 1$
				T^{+}_{87}/T^{+}_{158} :	x_1x_6	(12)	1	
				T^{+}_{87}/T^{+}_{187} :	x_1x_2	(24)	1	
88	$[2^4]A_4(6)$	192	$-$	T_{88}/T_{137} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	$x^{12} + 2x^{10} + 13x^8$ $+34x^6 + 42x^4$ $+252x^2 + 189$
				T'_{88}/T_{142} :	$x_1x_2x_3$	(32)	1	
				T_{88}/T_{146} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	
				T_{88}/T_{188} :	$x_1x_2x_6x_8$	(24)	1	
89	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2A_4(6)_4\{n4\}$	192	$+$	T^{+}_{89}/T^{+}_{138} :	$x_1x_4x_5$	(24)	1	$x^{12} - 18x^8 - 9x^4 + 9$
				T'^{+}_{89}/T^{+}_{187} :	$x_1x_2x_4x_6$	(96)	1	
90	$[E(4)^3]3$ $= E(4) \wr 3$	192	$+$	T^{+}_{90}/T^{+}_{139} :	$x_1x_2x_4$	(24)	1	$x^{12} + 2x^{10} + 2x^8 + 3x^6$ $+2x^4 + 2x^2 + 1$
				T^{+}_{90}/T^{+}_{164} :	x_1x_4	(6)	3	
				T'^{+}_{90}/T^{+}_{187} :	x_1x_6	(6)	1	
91	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2A_4(6)_4\{n2\}$	192	$+$	T'^{+}_{91}/T^{+}_{187} :	$x_1x_2x_6^2$	(48)	2	
92	$[2^4]A_4(6)_4\{n4\}$	192	$-$	T_{92}/T_{140} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	$x^{12} - 9x^8 - 38x^6$ $-42x^4 - 18x^2 - 3$
				T'_{92}/T_{141} :	$x_1x_2x_3$	(32)	1	
				T_{92}/T_{149} :	$x_1x_2x_3$	(24)	1	
				T_{92}/T_{188} :	$x_1x_2x_4x_6x_8$	(96)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
93	$[2^4]A_4(6)_4\{n2\}$	192	$-$	T_{93}/T_{143} : $x_1x_2x_4$ (32)	1	
				T_{93}/T_{188} : $x_1x_2x_6x_8^2$ (48)	2	
94	$[4^3]3$ $= 4 \wr 3$	192	$-$	T_{94}/T_{141} : $x_1x_4^2$ (12)	1	
				T_{94}/T_{150} : $x_1x_2x_7$ (24)	1	
				T_{94}/T_{151} : $x_1x_4^2$ (12)	1	
				T_{94}/T_{189} : $x_1x_4^2$ (12)	1	
95	$[\frac{1}{2}4^3]S(3)$	192	$+$	T'^{+}_{95}/T^{+}_{138} : $x_1x_2^2$ (12)	1	$x^{12} - 3x^{10} - 2x^8$ $+3x^6 - x^2 + 1$
				T'^{+}_{95}/T^{+}_{184} : $x_1x_6^2$ (12)	1	
96	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]S_4(6d)_8$	192	$-$	T'_{96}/T_{140} : $x_1x_2x_6^2$ (96)	1	$x^{12} - 3x^4 - 4$
				T_{96}/T_{147} : $x_1x_4x_8$ (32)	1	
				T'_{96}/T_{151} : $x_1x_2x_3$ (32)	1	
				T'_{96}/T_{190} : $x_1x_2x_6^2$ (96)	1	
97	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]S_4(6c)_4$	192	$+$	T^{+}_{97}/T^{+}_{138} : $x_1x_2^2x_4$ (96)	1	$x^{12} + x^8 + 9x^4 + 1$
				T'^{+}_{97}/T^{+}_{191} : $x_1x_2x_4x_6$ (96)	1	
98	$\frac{1}{2}[4^3]S(3)$	192	$-$	T'_{98}/T_{147} : $x_1x_2^2$ (12)	1	
				T'_{98}/T_{149} : $x_1x_6^2$ (12)	1	
				T_{98}/T_{150} : $x_1x_2x_3x_4x_8$ (96)	1	
				T'_{98}/T_{192} : $x_1x_6^2$ (12)	1	
99	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2A_4(6)_2$	192	$-$	T'_{99}/T_{142} : $x_1x_2x_3x_4^2$ (192)	1	$x^{12} - 12x^{10} + 60x^8$ $-160x^6 + 228x^4$ $-144x^2 + 8$
				T_{99}/T_{152} : $x_1x_4x_5$ (24)	1	
				T_{99}/T_{153} : $x_1x_4x_5$ (24)	1	
				T'_{99}/T_{189} : $x_1x_2x_4x_5$ (24)	1	
100	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]S_4(6d)_2$	192	$-$	T'_{100}/T_{137} : $x_1x_2x_6$ (48)	1	$x^{12} - 12x^{10} + 48x^8$ $-154x^6 + 72x^4 - 3$
				T'_{100}/T_{148} : $x_1x_2x_3$ (32)	1	
				T_{100}/T_{152} : $x_1x_4x_8$ (32)	1	
				T'_{100}/T_{190} : $x_1x_2x_6$ (48)	1	
101	$[\frac{1}{2}2^6]S(3)$	192	$+$	T^{+}_{101}/T^{+}_{139} : $x_1x_2x_3$ (32)	3	$x^{12} + 2x^{10} + 2x^8 + x^6$ $+2x^4 + 2x^2 + 1$
				T'^{+}_{101}/T^{+}_{184} : x_1x_6 (6)	1	
102	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]S_4(6c)_2$	192	$-$	T'_{102}/T_{146} : $x_1x_2x_6$ (48)	1	
				T'_{102}/T_{148} : $x_1x_2x_3^2x_7$ (96)	1	
				T_{102}/T_{153} : $x_1x_2x_4$ (48)	1	
				T'_{102}/T_{192} : $x_1x_2x_6$ (48)	1	
103	$\frac{1}{2}[E(4)^3]S(3)$	192	$+$	T^{+}_{103}/T^{+}_{139} : $x_1x_2x_3^2x_5$ (96)	3	$x^{12} + x^8 - 2x^6$ $+x^4 + 1$
				T'^{+}_{103}/T^{+}_{191} : x_1x_6 (6)	1	
104	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2A_4(6)_8$	192	$-$	T'_{104}/T_{143} : $x_1x_2x_8$ (24)	1	$x^{12} - 6x^8 - 10x^6$ $+15x^4 - 1$
				T'_{104}/T_{189} : $x_1x_2x_4$ (24)	2	
105	$\frac{1}{2}[2^6]6$	192	$-$	T_{105}/T_{134} : $x_1x_2x_4x_6x_8x_{10}^2$ (192)	1	$x^{12} - 12x^{10} + 48x^8$ $-64x^6 - 12x^4$ $+48x^2 + 8$
				T'_{105}/T_{154} : $x_1x_4x_5$ (12)	1	
				T'_{105}/T_{155} : $x_1x_4x_5$ (12)	1	
				T'_{105}/T_{159} : x_1x_{10} (12)	1	
				T'_{105}/T_{189} : x_1x_2 (24)	1	
106	$[2^5]D_6(6)$	192	$+$	T^{+}_{106}/T^{+}_{136} : x_1x_2 (12)	1	$x^{12} - 6x^{10} + 15x^8$ $-20x^6 + 15x^4$ $-6x^2 + 4$
				T'^{+}_{106}/T^{+}_{158} : x_1x_2 (12)	1	
				T^{+}_{106}/T^{+}_{191} : x_1x_2 (12)	1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
107	$\frac{1}{2}[2^6]D_6$	192	$-$	$T_{107}/T_{135}:$	$x_1x_2x_4x_6x_8x_{10}^2$	(192)	1	
				$T_{107}/T_{145}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{107}/T_{155}:$	x_1x_6	(12)	1	
				$T_{107}/T_{159}:$	x_1x_2	(12)	1	
				$T_{107}/T_{192}:$	x_1x_2	(12)	1	
108	$\frac{1}{2}[2^5]D(6)$	192	$+$	$T^{+}_{108}/T^{+}_{136}:$	$x_1x_2x_4^2x_8$	(96)	2	$x^{12}+2x^8+2x^6-2x^4$
				$T'^{+}_{108}/T^{+}_{161}:$	x_1x_4	(12)	2	$-x^2+1$
109	$[2^4]D(6)$	192	$+$	$T^{+}_{109}/T^{+}_{136}:$	$x_1x_4x_8$	(8)	2	$x^{12}+2x^8-2x^6-2x^4$
				$T^{+}_{109}/T^{+}_{163}:$	x_1x_6	(12)	2	$+x^2+1$
110	$[2^3]S_4(6d)$	192	$-$	$T_{110}/T_{137}:$	$x_1x_2x_{10}$	(16)	2	$x^{12}+x^8-x^6-x^4-1$
				$T'_{110}/T_{165}:$	x_1x_7	(6)	1	
111	$[2^3]S_4(6)_2$	192	$-$	$T_{111}/T_{137}:$	$x_1x_2x_4^2x_6$	(192)	2	$x^{12}-6x^{10}+48x^8$ $+72x^6+45x^4$ $+54x^2+18$
112	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]2S_4(6)_8$	192	$+$	$T'^{+}_{112}/T^{+}_{138}:$	$x_1x_2x_4x_8^2$	(96)	2	$x^{12}-18x^8-8x^4+4$
				$T'^{+}_{112}/T^{+}_{295}:$	x_1x_{11}	(6)	1	
113	$[\frac{1}{2}[\frac{1}{2}2^2]^3]2S_4(6)_4$	192	$+$	$T'^{+}_{113}/T^{+}_{138}:$	$x_1x_4x_8$	(32)	2	$x^{12}-x^8-5x^4+4$
114	$[2^3]S_4(6)_4$	192	$-$	$T_{114}/T_{140}:$	$x_1x_2x_{10}$	(16)	2	$x^{12}-x^8-x^4-1$
115	$[2^3]S_4(6)_8$	192	$-$	$T_{115}/T_{140}:$	$x_1x_2x_4^2x_6$	(192)	2	$x^{12}-2x^8+3x^4-4$
116	$[3^3]D(4)$	216	$-$	$T_{116}/T_{156}:$	$x_1x_5^2$	(12)	1	$x^{12}+3x^9+3x^6$
				$T_{116}/T_{167}:$	$x_1x_2x_3x_4$	(27)	1	$+3x^3+3$
				$T_{116}/T_{175}:$	x_1x_3	(18)	1	
117	$[3^3:2]E(4)$	216	$+$	$T^{+}_{117}/T^{+}_{168}:$	$x_1x_2x_3x_{12}$	(27)	4	$x^{12}+2x^9+x^6+5$
				$T^{+}_{117}/T^{+}_{176}:$	x_1x_2	(18)	1	
118	$\frac{1}{2}[3^3:2]eD(4)$	216	$-$	$T_{118}/T_{156}:$	$x_1x_2x_5^2$	(72)	1	$x^{12}+8x^6-8x^3+2$
				$T'_{118}/T_{169}:$	$x_1x_2x_3x_8$	(27)	1	
				$T_{118}/T_{177}:$	x_1x_3	(18)	1	
				$T_{118}/T_{178}:$	x_1x_3	(18)	1	
119	$[3^3:2]4$	216	$-$	$T_{119}/T_{156}:$	$x_1x_2x_5$	(36)	1	$x^{12}+x^9-4x^6$
				$T_{119}/T_{170}:$	$x_1x_2x_3x_{12}$	(27)	2	$-4x^3+1$
120	$\frac{1}{2}[3^3:2]cD(4)$	216	$-$	$T_{120}/T_{156}:$	$x_1x_2x_5^2$	(72)	1	$x^{12}+x^9-9x^6$
				$T_{120}/T_{169}:$	$x_1x_2x_3x_{12}$	(27)	1	$+3x^3+9$
121	$\frac{1}{2}[3^3:2]dD(4)$	216	$-$	$T_{121}/T_{156}:$	$x_1x_5^2$	(12)	1	$x^{12}+2x^6-3x^3+1$
				$T'_{121}/T_{167}:$	$x_1x_2x_3x_8$	(27)	1	
122	$[(\frac{1}{3}3^3):2]A(4)_4$	216	$+$	$T^{+}_{122}/T^{+}_{157}:$	$x_1x_2x_3^2x_6$	(108)	1	
				$T'^{+}_{122}/T^{+}_{232}:$	$x_1x_2x_8$	(36)	1	
123	$L(6):2[\times]2$	240	$+$	$T^{+}_{123}/T^{+}_{219}:$	$x_1x_2x_4x_7$	(30)	1	$x^{12}-6x^{10}+21x^8$
				$T^{+}_{123}/T^{+}_{257}:$	x_1x_2	(30)	2	$-34x^6+42x^4$
				$T^{+}_{123}/T^{+}_{279}:$	x_1x_{12}	(6)	2	$-12x^2+1$
				$T'^{+}_{123}/T^{+}_{295}:$	x_1x_{12}	(6)	1	
124	$[2]L(6):2_{12}$	240	$-$	$T'_{124}/T_{256}:$	$x_1x_2x_4$	(40)	2	
125	$[S(3)^2]D(4)$ $=D(6)\wr 2$	288	$-$	$T_{125}/T_{248}:$	x_1x_7	(6)	2	$x^{12}+x^{10}-2x^8$
				$T_{125}/T_{260}:$	x_1x_3	(12)	1	$-2x^6+2x^4$
				$T'_{125}/T_{288}:$	x_1x_9	(6)	1	$+2x^2-1$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom			#Kl.	Polynom
126	$[A_4^2]2$ $= A_4 \wr 2$	288	$+$	T'^{+}_{126}/T^{+}_{158} : T^{+}_{126}/T^{+}_{161} : T'^{+}_{126}/T^{+}_{163} : T'^{+}_{126}/T^{+}_{269} :	$x_1x_4x_8$ $x_1x_3x_5$ $x_1x_4x_5$ x_1x_{11}	(8) (8) (12) (6)	2 2 2 1	$x^{12} + x^8 + x^6 - 2x^4 - x^2 + 1$
127	$[\frac{1}{4}E(4)^3 : 3]S(3)_2$	288	$-$	T_{127}/T_{165} : T_{127}/T_{204} :	$x_1x_2x_4x_5$ $x_1x_2x_3$	(36) (16)	1 3	
128	$[\frac{1}{4}E(4)^3 : 3]S(3)$	288	$+$	T^{+}_{128}/T^{+}_{206} :	$x_1x_2x_3$	(16)	1	$x^{12} - 16x^9 + 75x^8 - 336x^6 - 360x^5 + 1431x^4 - 576x^3 - 1296x^2 + 1944x + 1701$
129	$[\frac{1}{4}E(4)^3 : 3 : 2]3$	288	$-$	T_{129}/T_{165} : T_{129}/T_{205} :	$x_1x_2^2$ $x_1x_2x_3$	(48) (16)	1 1	
130	$[3^4]E(4)$ $= 3 \wr E(4)$	324	$+$	T^{+}_{130}/T^{+}_{168} : T^{+}_{130}/T^{+}_{194} :	$x_1x_5^2$ x_1x_2	(12) (18)	4 1	$x^{12} + x^9 + 5x^6 + 8x^3 + 4$
131	$[3^4]4$ $= 3 \wr 4$	324	$-$	T_{131}/T_{167} : T_{131}/T_{169} : T_{131}/T_{170} :	$x_1x_2x_5$ $x_1x_5^2$ $x_1x_5^2$	(36) (12) (12)	1 1 2	$x^{12} - 3x^{10} + 2x^9 + 54x^8 - 72x^7 + 402x^6 - 756x^5 + 5445x^4 - 13288x^3 + 13176x^2 - 5856x + 976$
132	$\frac{1}{3}[3^4]A(4)$	324	$+$	T^{+}_{132}/T^{+}_{194} :	$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$	(162)	2	$x^{12} - 4x^{10} - 36x^7 - 12x^6 + 144x^5 + 228x^4 + 208x^3 + 360x^2 + 464x + 216$
133	$[3^3]A(4)$	324	$+$	T^{+}_{133}/T^{+}_{176} : T^{+}_{133}/T^{+}_{194} :	$x_1x_5^2$ $x_1x_2x_3x_4$	(12) (27)	1 1	
134	$[2^6]6$ $= 2 \wr 6$	384	$-$	T_{134}/T_{193} : T'_{134}/T_{208} : T'_{134}/T_{222} :	$x_1x_2x_3$ x_1x_2 x_1x_2	(12) (12) (24)	1 1 1	$x^{12} + x^{10} - 5x^8 - 4x^6 + 6x^4 + 3x^2 - 1$
135	$[2^6]D_6$ $= 2 \wr D_6(6)$	384	$-$	T_{135}/T_{193} : T'_{135}/T_{208} : T_{135}/T_{224} :	x_1x_2 x_1x_2 x_1x_2	(12) (12) (12)	1 1 1	$x^{12} - 36x^8 + 24x^6 + 108x^4 - 144x^2 + 48$
136	$[2^5]D(6)$	384	$+$	T^{+}_{136}/T^{+}_{195} : T^{+}_{136}/T^{+}_{226} : T'^{+}_{136}/T^{+}_{257} :	x_1x_6 x_1x_2 x_1x_8	(12) (24) (12)	2 1 1	$x^{12} + 22x^8 + 30x^6 + 85x^4 + 198x^2 + 121$
137	$[2^4]S_4(6d)$	384	$-$	T'_{137}/T_{186} : T_{137}/T_{227} :	$x_1x_2x_3$ $x_1x_2x_6x_8$	(32) (24)	1 1	$x^{12} - x^{10} - x^8 - 2x^6 + x^4 - x^2 - 1$
138	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2S_4(6)_4$	384	$+$	T'^{+}_{138}/T^{+}_{226} :	$x_1x_2x_4x_6$	(96)	1	$x^{12} - 16x^8 - 10x^4 + 1$
139	$[E(4)^3]S(3)$ $= E(4) \wr S(3)$	384	$+$	T^{+}_{139}/T^{+}_{206} : T'^{+}_{139}/T^{+}_{226} :	x_1x_4 x_1x_6	(6) (6)	1 1	$x^{12} - 6x^8 + 9x^4 + 9$
140	$[2^4]S_4(6d)_4$	384	$-$	T'_{140}/T_{185} : T_{140}/T_{227} :	$x_1x_2x_3$ $x_1x_2x_4x_6x_8$	(32) (96)	1 1	$x^{12} - 2x^{10} + 3x^8 + 4x^6 - 3x^4 - 4x^2 - 1$
141	$[\frac{1}{4}cD(4)^3]3$	384	$-$	T_{141}/T_{185} : T_{141}/T_{222} :	$x_1x_2x_7$ $x_1x_2x_4^2x_5^2$	(24) (96)	1 1	$x^{12} - 12x^8 + 9x^4 + 3$
142	$[\frac{1}{4}eD(4)^3]3$	384	$-$	T_{142}/T_{186} : T_{142}/T_{205} : T_{142}/T_{222} :	$x_1x_2x_7$ x_1x_7 $x_1x_2x_4x_5$	(24) (6) (24)	1 1 1	$x^{12} - 18x^{10} + 66x^8 + 117x^6 - 27x^2 - 3$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
143	$[2^4]2A_4(6)_4$	384	$-$	$T'_{143}/T_{222}:\ x_1x_2x_3x_4x_5^2\ (192)$	2	$x^{12}-6x^{10}+24x^8-56x^6+93x^4-90x^2+51$
144	$[2^5]A_4(6)$	384	$+$	$T^+_{144}/T^+_{184}:\ x_1x_2x_3\ (24)$ $T^+_{144}/T^+_{187}:\ x_1x_2x_4\ (32)$ $T^+_{144}/T^+_{191}:\ x_1x_2x_3\ (24)$ $T'^+_{144}/T^+_{230}:\ x_1x_{10}\ (12)$	1 1 1 1	
145	$\frac{1}{2}[2^6]D(6)$	384	$-$	$T_{145}/T_{193}:\ x_1x_2x_3^2x_4x_6x_8x_{10}^2\ (384)$ $T_{145}/T_{196}:\ x_1x_6\ (12)$ $T'_{145}/T_{223}:\ x_1x_2\ (24)$	1 1 1	
146	$[2^4]S_4(6c)$	384	$-$	$T'_{146}/T_{186}:\ x_1x_2x_3^2x_7\ (96)$ $T_{146}/T_{224}:\ x_1x_2x_6x_8\ (24)$	1 1	
147	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2S_4(6)_8$	384	$-$	$T'_{147}/T_{185}:\ x_1x_2x_3x_4x_8\ (96)$ $T'_{147}/T_{223}:\ x_1x_2x_3x_4x_8\ (96)$	1 1	$x^{12}-18x^8-3$
148	$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}eD(4)^3]S(3)$	384	$-$	$T_{148}/T_{186}:\ x_1x_2x_4\ (48)$ $T_{148}/T_{204}:\ x_1x_7\ (6)$ $T_{148}/T_{223}:\ x_1x_2x_4\ (48)$	1 3 1	$x^{12}-3x^{10}-3x^8+4x^6+3x^4-3x^2-1$
149	$[2^4]S_4(6c)_4$	384	$-$	$T'_{149}/T_{185}:\ x_1x_2x_3^2x_7\ (96)$ $T_{149}/T_{224}:\ x_1x_2x_6^2x_8^2\ (96)$	1 1	$x^{12}-x^8+2x^4+2$
150	$[4^3]S(3)$ $= 4 \wr S(3)$	384	$-$	$T_{150}/T_{185}:\ x_1x_4^2\ (12)$ $T_{150}/T_{221}:\ x_1x_4^2\ (12)$	1 1	$x^{12}-x^6-3x^4+2x^2+2$
151	$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}cD(4)^3]S(3)$	384	$-$	$T_{151}/T_{185}:\ x_1x_2x_4^2\ (96)$ $T_{151}/T_{225}:\ x_1x_2x_4^2\ (96)$	1 1	$x^{12}-18x^8+4x^4-8$
152	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2S_4(6)_2\{S_4(6c)\}$	384	$-$	$T'_{152}/T_{186}:\ x_1x_2x_3x_4^2x_8\ (192)$ $T'_{152}/T_{225}:\ x_1x_2x_4x_5\ (24)$	1 1	$x^{12}-4x^8-2x^6+4x^4-1$
153	$[(\frac{1}{2}2^2)^3]2S_4(6)_2\{S_4(6d)\}$	384	$-$	$T'_{153}/T_{186}:\ x_1x_2x_3x_4^2\ (192)$ $T'_{153}/T_{221}:\ x_1x_2x_4x_5\ (24)$	1 1	$x^{12}+4x^{10}-4x^8-36x^6+29x^4-16x^2+2$
154	$[2^5]D(6)_2t$	384	$-$	$T'_{154}/T_{193}:\ x_1x_2x_4x_6x_8^2x_{10}^2\ (192)$ $T'_{154}/T_{196}:\ x_1x_2\ (12)$ $T'_{154}/T_{225}:\ x_1x_2\ (24)$	1 1 1	$x^{12}+10x^8-4x^6+49x^4+52x^2+104$
155	$[2^5]D(6)_2i$	384	$-$	$T'_{155}/T_{193}:\ x_1x_2x_4x_6x_8x_{10}^2\ (192)$ $T_{155}/T_{197}:\ x_1x_2\ (12)$ $T'_{155}/T_{221}:\ x_1x_2\ (24)$ $T'_{155}/T_{256}:\ x_1x_2\ (12)$	1 2 1 1	$x^{12}-2x^{10}-3x^8-2x^6+x^4+4x^2+2$
156	$[3^3:2]D(4)$	432	$-$	$T_{156}/T_{213}:\ x_1x_3\ (18)$ $T_{156}/T_{217}:\ x_1x_2x_3x_{12}\ (27)$	1 2	$x^{12}-12x^6-12x^3-3$
157	$[(\frac{1}{3}3^3):2]S(4)_4$	432	$+$	$T'^+_{157}/T^+_{259}:\ x_1x_2x_7\ (36)$ $T'^+_{157}/T^+_{295}:\ x_1x_5\ (12)$	1 1	$x^{12}-8x^9+24x^7+44x^6-51x^4+48x^3-72x^2+16$
158	$[2^5]F_{18}(6)$	576	$+$	$T^+_{158}/T^+_{195}:\ x_1x_4x_5\ (12)$	2	$x^{12}+x^8-x^6-2x^4+x^2+1$
159	$[2^5]F_{18}(6)_2$	576	$-$	$T_{159}/T_{196}:\ x_1x_4x_5\ (12)$ $T_{159}/T_{197}:\ x_1x_4x_5\ (12)$ $T'_{159}/T_{208}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6^2\ (192)$	1 2 1	

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
160	$\frac{1}{2}[S_4(6c)^2]2$	576	$-$	$T'_{160}/T_{198}:$ $x_1x_4x_5^2x_8^2$ (48) $T_{160}/T_{200}:$ $x_1x_2x_3x_4x_5x_8$ (96) $T'_{160}/T_{201}:$ $x_1x_4x_5^2x_8^2$ (48) $T'_{160}/T_{278}:$ x_1x_9 (6)	2 1 1 1	$x^{12}+2x^{10}-x^8+6x^4$ $+4x^2+2$
161	$[\frac{1}{2}S_4(6c)^2]2$	576	$+$	$T'^{+}_{161}/T^{+}_{195}:$ $x_1x_4x_5^2x_8^2$ (48) $T'^{+}_{161}/T^{+}_{279}:$ x_1x_9 (6)	2 1	$x^{12}-x^8+2x^6+x^4$ $+2x^2+1$
162	$[2^4]F_{36}(6)$	576	$+$	$T^{+}_{162}/T^{+}_{199}:$ $x_1x_4x_8$ (8) $T'^{+}_{162}/T^{+}_{202}:$ $x_1x_4x_8$ (8) $T'^{+}_{162}/T^{+}_{203}:$ $x_1x_2x_3x_4^2x_7$ (288)	2 1 1	$x^{12}-2x^{10}-x^8+9x^6$ $-x^4-12x^2+1$
163	$[2^4]F_{18}(6):2$	576	$+$	$T^{+}_{163}/T^{+}_{195}:$ $x_1x_4x_8$ (8) $T^{+}_{163}/T^{+}_{202}:$ $x_1x_4x_8$ (8) $T'^{+}_{163}/T^{+}_{203}:$ $x_1x_2x_3x_4x_7x_8$ (72)	2 1 1	$x^{12}-x^8-6x^6+x^4$ $-6x^2+9$
164	$[\frac{1}{9}A(4)^3]3$	576	$+$	$T^{+}_{164}/T^{+}_{206}:$ $x_1x_2^2$ (48) $T^{+}_{164}/T^{+}_{229}:$ $x_1x_2x_4x_5$ (36)	1 3	
165	$[\frac{1}{4}E(4)^3:3:2]3$	576	$-$	$T_{165}/T_{239}:$ $x_1x_2x_3$ (16)	1	$x^{12}+6x^{10}-2x^9-8x^7$ $-64x^6-74x^4+60x^3$ $+132x^2+144x+166$
166	$[\frac{1}{9}A(4)^3]3_3$	576	$+$	$T^{+}_{166}/T^{+}_{228}:$ $x_1x_2x_4x_5$ (36)	3	$x^{12}+18x^{10}+135x^8$ $+348x^6+63x^4-512x^3$ $-270x^2+729$
167	$[3^4]D(4)$ $=3\wr D(4)$	648	$-$	$T_{167}/T_{217}:$ $x_1x_5^2$ (12) $T_{167}/T_{231}:$ x_1x_3 (18)	2 1	$x^{12}-3x^3+3$
168	$[3^4:2]E(4)$	648	$+$	$T^{+}_{168}/T^{+}_{210}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^2$ (36) $T^{+}_{168}/T^{+}_{234}:$ x_1x_2 (18)	1 1	$x^{12}+4x^9+6x^6+4x^3+17$
169	$\frac{1}{2}[3^4:2]cD(4)$	648	$-$	$T_{169}/T_{217}:$ $x_1x_2x_5^2$ (72) $T'_{169}/T_{233}:$ x_1x_3 (18)	2 1	$x^{12}+x^9-2x^6-6x^3-3$
170	$[3^4:2]4$	648	$-$	$T_{170}/T_{209}:$ $x_1x_2x_5$ (36) $T_{170}/T_{211}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^2$ (72) $T_{170}/T_{217}:$ $x_1x_2x_5$ (36)	1 2 1	$x^{12}+x^9+2x^6-4x^3+3$
171	$[3^4:2]E(4)_2$	648	$+$	$T'^{+}_{171}/T^{+}_{210}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^3$ (72) $T'^{+}_{171}/T^{+}_{214}:$ $x_1x_4x_5^2x_8^2$ (36)	1 2	$x^{12}-8x^9-90x^8+300x^6$ $-72x^5-594x^4+160x^3$ $+288x^2-32$
172	$\frac{1}{2}[3^4:2^2]E(4)$	648	$+$	$T^{+}_{172}/T^{+}_{210}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^2$ (36) $T'^{+}_{172}/T^{+}_{214}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^2$ (36) $T'^{+}_{172}/T^{+}_{216}:$ x_1x_2 (18)	2 1 1	
173	$[3^4:2]4_4$	648	$+$	$T'^{+}_{173}/T^{+}_{212}:$ $x_1x_2x_5$ (36) $T^{+}_{173}/T^{+}_{215}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^2$ (72) $T'^{+}_{173}/T^{+}_{216}:$ $x_1x_2x_5$ (36)	1 2 1	$x^{12}+3x^{10}-4x^9-54x^8$ $-162x^7-123x^6+108x^5$ $+549x^4+822x^3+864x^2$ $+456x-16$
174	$[3^4:2]E(4)_4$	648	$+$	$T'^{+}_{174}/T^{+}_{212}:$ x_1x_2 (18) $T^{+}_{174}/T^{+}_{214}:$ $x_1x_2x_5^2x_6^3$ (72) $T^{+}_{174}/T^{+}_{232}:$ x_1x_2 (18)	1 1 1	$x^{12}-8x^9-36x^8-48x^7$ $+8x^6+144x^5+273x^4$ $+248x^3+72x^2-96x-32$
175	$[3^3]S(4)$	648	$-$	$T_{175}/T_{213}:$ $x_1x_5^2$ (12) $T_{175}/T_{231}:$ $x_1x_2x_3x_4$ (27)	1 1	$x^{12}-12x^{10}+8x^9+36x^8$ $-48x^7-65x^6+162x^5$ $+135x^4-624x^3+648x^2$ $-288x+48$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
176	$[3^3:2]A(4)$	648	$+$	T^+_{176}/T^+_{234} : $x_1x_2x_3x_{12}$ (27)	1	$x^{12}+4x^6-8x^3+8$
177	$[3^3]S(4)_6$	648	$-$	T_{177}/T_{233} : $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (162)	2	$x^{12}-6x^6-2x^3+6$
178	$\frac{1}{2}[3^3:2]S(4)$	648	$-$	T_{178}/T_{213} : $x_1x_2x_3x_5x_6^2$ (648) T_{178}/T_{233} : $x_1x_2x_3x_{12}$ (27)	1 1	$x^{12}-10x^6-4x^3-1$
179	$L(2,11)$	660	$+$	T'^+_{179}/T^+_{295} : $x_1x_2x_3x_7$ (165)	1	
180	$A(6)[\times]2$	720	$+$	T^+_{180}/T^+_{219} : $x_1x_2x_3x_4x_6^2x_9^2$ (360) T^+_{180}/T^+_{277} : x_1x_2 (30) T^+_{180}/T^+_{296} : x_1x_{12} (6)	1 2 1	$x^{12}+4x^{10}+6x^8+6x^6$ $+5x^4+6x^2+1$
181	$M_{10}(12)$ $=[A_6[\frac{1}{360}]\{M_{10}\}A_6]2_2$	720	$+$	T^+_{181}/T^+_{220} : $x_1x_2x_3x_5$ (120) T'^+_{181}/T^+_{272} : x_1x_3 (30) T'^+_{181}/T^+_{296} : $x_1x_2x_3x_8$ (45)	1 1 1	
182	$PGL(2,9)(12)$ $=[A_6[\frac{1}{360}]\{M_{10}\}A_6]2$	720	$+$	T^+_{182}/T^+_{220} : $x_1x_2x_3x_5$ (120) T^+_{182}/T^+_{296} : $x_1x_2x_3x_8$ (45)	1 1	
183	$S_6(12)$	720	$+$	T^+_{183}/T^+_{219} : $x_1x_2x_3x_4x_5^2x_6x_8^2$ (720) T'^+_{183}/T^+_{296} : x_1x_{10} (6)	1 1	$x^{12}-6x^{11}+73x^{10}$ $-312x^9+2044x^8$ $-6368x^7+28579x^6$ $-62962x^5+208253x^4$ $-301728x^3+800176x^2$ $-636238x+1176880$
184	$[2^5]S_4(6d)$	768	$+$	T^+_{184}/T^+_{226} : $x_1x_2x_4$ (32) T^+_{184}/T^+_{277} : x_1x_6 (12)	1 1	$x^{12}-2x^{10}-2x^8+4x^6$ $-x^4+6x^2+1$
185	$[\frac{1}{4}cD(4)^3]S(3)$	768	$-$	T_{185}/T_{250} : $x_1x_2x_4^2x_5^2$ (96)	1	$x^{12}-x^8-x^4-3$
186	$[\frac{1}{4}eD(4)^3]S(3)$	768	$-$	T_{186}/T_{239} : x_1x_7 (6) T_{186}/T_{250} : $x_1x_2x_4x_5$ (24)	1 1	$x^{12}+6x^8-7x^4+2$
187	$[2^5]2A_4(6)$	768	$+$	T^+_{187}/T^+_{226} : $x_1x_2x_3$ (24) T'^+_{187}/T^+_{284} : x_1x_4 (6)	1 1	$x^{12}+x^{10}-3x^8-4x^6$ $+x^4+4x^2+1$
188	$[2^6]A_4$ $=2\wr A_4(6)$	768	$-$	T'_{188}/T_{222} : $x_1x_2x_3$ (32) T_{188}/T_{224} : $x_1x_2x_3$ (24) T_{188}/T_{227} : $x_1x_2x_3$ (24) T'_{188}/T_{255} : x_1x_{10} (12)	1 1 1 1	$x^{12}-27x^8-88x^6$ $+12x^4+108x^2+51$
189	$[\frac{1}{2}cD(4)^3]3$	768	$-$	T_{189}/T_{221} : $x_1x_2x_7$ (24) T_{189}/T_{222} : $x_1x_2x_3x_4^2x_5^2x_6^2$ (256) T_{189}/T_{225} : $x_1x_2x_7$ (24)	1 1 1	
190	$\frac{1}{2}[2^6]S_4(6d)$	768	$-$	T'_{190}/T_{223} : $x_1x_2x_3$ (32) T'_{190}/T_{225} : $x_1x_2x_3$ (32) T_{190}/T_{227} : $x_1x_2x_4^2x_6x_8^2x_{10}^2$ (384)	1 1 1	$x^{12}+2x^{10}-13x^8$ $+36x^6+15x^4$ $-38x^2-19$
191	$[2^5]S_4(6c)$	768	$+$	T^+_{191}/T^+_{226} : $x_1x_2x_3x_4^2$ (96) T'^+_{191}/T^+_{257} : x_1x_8 (12)	1 1	$x^{12}+x^{10}+2x^8-x^6$ $+2x^4-3x^2+1$
192	$\frac{1}{2}[2^6]S_4(6c)$	768	$-$	T'_{192}/T_{221} : $x_1x_2x_3^2x_7$ (96) T'_{192}/T_{223} : $x_1x_2x_3^2x_7$ (96) T_{192}/T_{224} : $x_1x_2x_4x_6^2x_8^2x_{10}^2$ (256) T'_{192}/T_{256} : x_1x_8 (12)	1 1 1 1	
193	$[2^6]D(6)$ $=2\wr D(6)$	768	$-$	T_{193}/T_{240} : x_1x_6 (12) T'_{193}/T_{250} : x_1x_2 (24) T'_{193}/T_{270} : x_1x_8 (12)	2 1 1	$x^{12}-3x^{10}-3x^8-x^4$ $+3x^2-1$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
194	$[3^4]A(4)$ $= 3 \wr A(4)$	972	$+$	$T^+_{194}/T^+_{234}:\ x_1x_5^2\quad(12)$	1	$x^{12} - 6x^{11} + 18x^{10} - 18x^9 + 27x^8 - 576x^7 + 2376x^6 - 4176x^5 + 4788x^4 - 2152x^3 + 672x^2 - 72x + 12$
195	$[2^5]F_{18}(6):2$	1152	$+$	$T^+_{195}/T^+_{236}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6\quad(72)$	1	$x^{12} - x^8 - 4x^6 - 5x^4 - 4x^2 + 1$
196	$[2^5]F_{18}:2_2$	1152	$-$	$T_{196}/T_{240}:\ x_1x_2x_3^2x_4x_6x_8x_{10}^2\quad(384)$	2	$x^{12} - 2x^8 - 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 - 1$
197	$\frac{1}{2}[2^6]F_{18}:2$	1152	$-$	$T_{197}/T_{237}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6\quad(72)$ $T_{197}/T_{238}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6\quad(72)$ $T_{197}/T_{240}:\ x_1x_2x_4x_6x_8x_{10}^2\quad(192)$	1 1 1	
198	$\frac{1}{2}[2^6]F_{36}$	1152	$-$	$T_{198}/T_{235}:\ x_1x_2x_3x_4^2x_6\quad(288)$ $T_{198}/T_{237}:\ x_1x_2x_3x_4^2x_6\quad(288)$ $T_{198}/T_{241}:\ x_1x_2x_4x_6x_8x_{10}^2\quad(192)$	1 1 1	$x^{12} - 2x^{10} - 3x^8 - 2x^4 - 4x^2 + 2$
199	$[2^5]F_{36}(6)$	1152	$+$	$T^+_{199}/T^+_{236}:\ x_1x_2x_3x_4^2x_6\quad(288)$ $T^+_{199}/T^+_{277}:\ x_1x_4\quad(24)$	1 1	$x^{12} + x^{10} + 4x^8 + 2x^6 + 6x^4 + 5x^2 + 1$
200	$[S_4(6c)^2]2$ $= S_4(6c) \wr 2$	1152	$-$	$T'_{200}/T_{235}:\ x_1x_4x_5^2x_8^2\quad(48)$ $T'_{200}/T_{288}:\ x_1x_9\quad(6)$	2 1	
201	$[2^4]F_{36}:2_4$	1152	$-$	$T_{201}/T_{235}:\ x_1x_2x_3x_4x_6x_8\quad(96)$	2	$x^{12} - 3x^{10} + 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 3$
202	$[2^4]F_{36}:2_2$	1152	$+$	$T^+_{202}/T^+_{236}:\ x_1x_2x_3x_4x_5^2x_6x_8^2\quad(576)$	2	$x^{12} - 2x^{10} - 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 4$
203	$[S_4(6d)^2]2$ $= S_4(6d) \wr 2$	1152	$+$	$T'^+_{203}/T^+_{236}:\ x_1x_4x_8\quad(8)$ $T^+_{203}/T^+_{296}:\ x_1x_7\quad(6)$	2 1	$x^{12} - 3x^{10} - 3x^8 - 2x^6 + x^4 + x^2 + 1$
204	$[\frac{1}{9}A(4)^3]S(3)_2$	1152	$-$	$T_{204}/T_{239}:\ x_1x_2x_4x_5\quad(36)$ $T'_{204}/T_{251}:\ x_1x_2x_4x_5\quad(36)$	1 1	
205	$[E(4)^3:3:2]3$	1152	$-$	$T_{205}/T_{239}:\ x_1x_2^2\quad(48)$ $T_{205}/T_{253}:\ x_1x_2x_4x_{11}\quad(36)$	1 1	$x^{12} - 12x^9 - 24x^8 - 24x^7 - 22x^6 + 48x^5 - 9x^4 + 88x^3 + 60x^2 - 72x + 3$
206	$[\frac{1}{9}A(4)^3]S(3)$	1152	$+$	$T^+_{206}/T^+_{252}:\ x_1x_2x_4x_{11}\quad(36)$	3	$x^{12} + 4x^9 - 3x^8 + 32x^6 - 48x^5 + 18x^4 - 64x^3 + 144x^2 - 108x + 27$
207	$[\frac{1}{9}A(4)^3]S(3)_6$	1152	$-$	$T'_{207}/T_{254}:\ x_1x_2x_4x_5\quad(36)$	1	$x^{12} - 48x^9 + 36x^8 - 48x^6 + 72x^5 - 27x^4 - 128x^3 + 288x^2 - 216x + 54$
208	$[2A_4^2]2$ $= 2A4 \wr 2$ $= 2 \wr F_{18}(6)$	1152	$-$	$T'_{208}/T_{240}:\ x_1x_4x_5\quad(12)$	2	$x^{12} - 2x^{10} + x^8 - 4x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 3$
209	$\frac{1}{2}[3^4:2^2]cD(4)$	1296	$-$	$T_{209}/T_{248}:\ x_1x_2x_5^2x_6^3\quad(144)$	2	$x^{12} + 108x^6 - 216x^5 + 63x^4 + 184x^3 - 216x^2 + 96x - 16$
210	$[3^4:2^2]E(4)$	1296	$+$	$T^+_{210}/T^+_{242}:\ x_1x_3x_5^2x_7^2\quad(36)$	6	$x^{12} - 4x^9 + 8x^6 - 36x^5 + 105x^4 - 120x^3 + 90x^2 - 36x + 9$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
211	$[3^4:2^2]4$	1296	$-$	$T_{211}/T_{245}:\ x_1x_3x_5^2x_7^2$ (36) $T_{211}/T_{247}:\ x_1x_2x_5$ (36) $T_{211}/T_{248}:\ x_1x_2x_5$ (36)	2 1 1	$x^{12}-135x^8-180x^7$ $+210x^6+540x^5+765x^4$ $+1160x^3+1080x^2$ $+480x+80$
212	$[3^4:2]D(4)_8$	1296	$+$	$T'^+_{212}/T^+_{243}:\ x_1x_2x_5^2x_6^3$ (144) $T'^+_{212}/T^+_{259}:\ x_1x_4$ (18)	2 1	$x^{12}-12x^{10}-8x^9-48x^7$ $-48x^6+66x^4-64x^3$ $-144x^2-32$
213	$[3^3:2]S(4)$	1296	$-$	$T_{213}/T_{258}:\ x_1x_2x_3x_{12}$ (27)	1	$x^{12}+12x^3+27$
214	$[\frac{1}{2}F_{36}^2]2$	1296	$+$	$T^+_{214}/T^+_{242}:\ x_1x_3x_5^2x_7^3$ (72) $T'^+_{214}/T^+_{243}:\ x_1x_2$ (18) $T^+_{214}/T^+_{249}:\ x_1x_2$ (18)	6 1 1	$x^{12}-2x^{10}-8x^9+3x^8$ $+8x^7+24x^6+20x^4$ $+8x^3+24x^2-8x+2$
215	$\frac{1}{2}[F_{36}^2]2$	1296	$+$	$T^+_{215}/T^+_{243}:\ x_1x_2x_5$ (36) $T^+_{215}/T^+_{244}:\ x_1x_3x_5^2x_7^3$ (72) $T^+_{215}/T^+_{249}:\ x_1x_2x_5$ (36)	1 2 1	$x^{12}-30x^{10}+270x^8$ $-120x^7-950x^6+720x^5$ $+1005x^4-400x^3$ $-900x^2+400$
216	$[3^4:2]D(4)_4$	1296	$+$	$T'^+_{216}/T^+_{243}:\ x_1x_2x_5^2x_6^2$ (72)	2	$x^{12}-16x^9+36x^8$ $+96x^7-568x^6-432x^5$ $+882x^4-576$
217	$[3^4:2]D(4)$	1296	$-$	$T_{217}/T_{248}:\ x_1x_2x_5^2x_6^2$ (72) $T_{217}/T_{258}:\ x_1x_3$ (18)	2 1	$x^{12}-6x^6-8x^3-4$
218	$PGL(2,11)$	1320	$-$	$T_{218}/T_{301}:\ x_1x_2x_3x_6$ (165)	1	$x^{12}-22x^8+220x^6$ $-352x^5-143x^4+704x^3$ $-44x^2-928x-88$
219	$S(6)[\times]2$	1440	$+$	$T^+_{219}/T^+_{285}:\ x_1x_2$ (30) $T^+_{219}/T^+_{297}:\ x_1x_{12}$ (6)	2 2	$x^{12}+2x^8-2x^6-3x^4$ $+2x^2+1$
220	$M_{10}.2(12)$ $=A_6.E_4(12)$	1440	$+$	$T'^+_{220}/T^+_{295}:\ x_1x_3$ (30) $T^+_{220}/T^+_{297}:\ x_1x_2x_3x_8$ (45)	1 2	
221	$[\frac{1}{2}cD(4)^3]S(3)$	1536	$-$	$T_{221}/T_{250}:\ x_1x_2x_3x_4^2x_5^2x_6^2$ (256) $T'_{221}/T_{287}:\ x_1x_6$ (12)	1 1	$x^{12}-2x^{10}-3x^8-2x^6$ $+5x^4+4x^2-1$
222	$[D(4)^4]3$ $=D(4)\wr 3$	1536	$-$	$T_{222}/T_{250}:\ x_1x_2x_7$ (24) $T_{222}/T_{292}:\ x_1x_7$ (6)	1 1	$x^{12}+x^{10}-x^8-5x^6$ $-5x^4-3x^2-1$
223	$\frac{1}{2}e[D(4)^3]S(3)$	1536	$-$	$T_{223}/T_{250}:\ x_1x_2x_3^2x_4x_5^2x_6^2$ (384) $T_{223}/T_{291}:\ x_1x_7$ (6)	1 1	$x^{12}-2x^{10}-x^8+24x^6$ $+7x^4-22x^2-11$
224	$[2^6]S_4(6c)$ $=2\wr S_4(6c)$	1536	$-$	$T'_{224}/T_{250}:\ x_1x_2x_3^2x_7$ (96) $T'_{224}/T_{270}:\ x_1x_8$ (12)	1 1	$x^{12}+4x^8-6x^6+6x^2+2$
225	$\frac{1}{2}c[D(4)^3]S(3)$	1536	$-$	$T_{225}/T_{250}:\ x_2x_3^3x_4^3x_5^2x_7^2x_{12}$ (1536)	1	$x^{12}-3x^{10}+2x^6+2x^4-3$
226	$[2^5]2S_4(6)$	1536	$+$	$T^+_{226}/T^+_{285}:\ x_1x_6$ (12) $T'^+_{226}/T^+_{290}:\ x_1x_4$ (6)	1 1	$x^{12}+x^{10}+2x^8+2x^6$ $+2x^4+2x^2+1$
227	$[2^6]S_4(6d)$ $=2\wr S_4(6d)$	1536	$-$	$T'_{227}/T_{250}:\ x_1x_2x_3$ (32) $T_{227}/T_{286}:\ x_1x_6$ (12)	1 1	$x^{12}-2x^{10}-2x^8+6x^6$ $+3x^4-4x^2-1$
228	$\frac{1}{3}[A(4)^3]3$	1728	$+$	$T^+_{228}/T^+_{265}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6^2$ (432)	2	$x^{12}-12x^{11}+48x^{10}$ $-64x^9+819x^8-6552x^7$ $+13104x^6+58968x^4$ $-235872x^3+1061424$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
229	$[\frac{1}{3}A(4)^3]3$	1728	$+$	$T^+_{229}/T^+_{252}:\ x_1x_2^2$ (48) $T^+_{229}/T^+_{265}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (72)	1 1	$x^{12}-12x^{11}+48x^{10}$ $-64x^9+927x^8-7416x^7$ $+14832x^6+69660x^4$ $-278640x^3+1347921$
230	$[2^5]L(6)$	1920	$+$	$T^+_{230}/T^+_{257}:\ x_1x_2x_4$ (80) $T^+_{230}/T^+_{277}:\ x_1x_2x_4$ (80)	1 1	$x^{12}+x^{10}-3x^8+4x^4+1$
231	$[3^4]S(4)$ $=3\wr S(4)$	1944	$-$	$T_{231}/T_{258}:\ x_1x_5^2$ (12)	1	$x^{12}+12x^{10}-15x^9+99x^8$ $-153x^7+701x^6-702x^5$ $+2133x^4-1719x^3$ $+1368x^2-684x+152$
232	$[3^4:2]A(4)_4$	1944	$+$	$T^+_{232}/T^+_{259}:\ x_1x_2x_3^2x_5$ (324) $T^+_{232}/T^+_{271}:\ x_1x_2x_5^2x_6^3$ (216)	1 2	
233	$\frac{1}{2}[3^4:2]S(4)$	1944	$-$	$T_{233}/T_{258}:\ x_1x_2x_3x_5x_6^2$ (648)	1	$x^{12}+2x^9+6x^3+3$
234	$[3^4:2]A(4)$	1944	$+$	$T^+_{234}/T^+_{271}:\ x_1x_2x_5^2x_6^2$ (108)	2	$x^{12}+2x^9+2x^6+2$
235	$[2^5]F_{36}:2_2\{S_3^2,t\}$	2304	$-$	$T'_{235}/T_{260}:\ x_1x_2x_3x_4x_5^2x_6^2x_7^2x_8^2$ (1152)	1	$x^{12}-2x^{10}-x^8+4x^4$ $+4x^2+2$
236	$[2^5]F_{36}(6):2$	2304	$+$	$T^+_{236}/T^+_{285}:\ x_1x_4$ (24) $T'^+_{236}/T^+_{297}:\ x_1x_7$ (6)	1 1	$x^{12}+2x^{10}+2x^8-3x^6$ $-3x^4+x^2+1$
237	$[2^5]F_{36}:2_2\{S_3^2,i\}$	2304	$-$	$T'_{237}/T_{260}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6^2$ (192) $T'_{237}/T_{298}:\ x_1x_7$ (6)	1 1	$x^{12}-2x^{10}+x^8-2x^6$ $-x^4+2$
238	$[2^5]F_{36}:2_2\{3^2:4\}$	2304	$-$	$T'_{238}/T_{260}:\ x_1x_2x_3^2x_{10}^3x_{11}^5x_{12}^2$ (2304) $T_{238}/T_{287}:\ x_1x_4$ (24)	1 1	$x^{12}-2x^{10}-3x^8+4x^6$ $+2x^4+4x^2-2$
239	$[E(4)^3:3:2]3$	2304	$-$	$T_{239}/T_{268}:\ x_1x_2x_4x_{11}$ (36)	1	$x^{12}-12x^9+9x^8-32x^6$ $+48x^5-18x^4-64x^3$ $+144x^2-108x+27$
240	$[2^6]F_{18}:2$ $=2\wr F_{18}(6):2$	2304	$-$	$T'_{240}/T_{260}:\ x_1x_2x_3x_4x_7x_8$ (72)	1	$x^{12}+3x^{10}+x^8-8x^6$ $-8x^4+5x^2+7$
241	$[2^6]F_{36}$ $=2\wr F_{36}(6)$	2304	$-$	$T'_{241}/T_{260}:\ x_1x_2x_3x_4^2x_7$ (288) $T_{241}/T_{286}:\ x_1x_4$ (24)	1 1	$x^{12}+x^{10}-3x^8-x^6$ $+6x^4-3$
242	$[3^4:2^3]E(4)$	2592	$+$	$T^+_{242}/T^+_{266}:\ x_1x_2$ (18) $T^+_{242}/T^+_{271}:\ x_1x_2$ (18)	1 1	$x^{12}+63x^8+84x^7+28x^6$ $+81x^4+216x^3+216x^2$ $+96x+16$
243	$[3^4:2^2]D(4)_4$	2592	$+$	$T^+_{243}/T^+_{266}:\ x_1x_2x_3x_5^2x_7^2$ (216)	2	$x^{12}-42x^{10}-28x^9$ $+360x^8-48x^7-998x^6$ $+180x^5-489x^4-704x^3$ $-1764x^2-112$
244	$\frac{1}{2}[S(3)^4]4$	2592	$+$	$T^+_{244}/T^+_{266}:\ x_1x_2x_5$ (36)	1	$x^{12}-12x^{10}-8x^9-18x^8$ $-24x^7+316x^6+648x^5$ $+513x^4+312x^3+216x^2$ $+96x+16$
245	$[3^4:2^3]4$	2592	$-$	$T_{245}/T_{263}:\ x_1x_2x_5$ (36) $T_{245}/T_{264}:\ x_1^2x_2^2x_4x_7^2x_8^2x_9x_{10}x_{11}$ (648) $T_{245}/T_{267}:\ x_1x_2x_5$ (36)	1 1 1	$x^{12}-8x^9-36x^8+8x^6$ $+162x^4+32x^3$ $-144x^2+16$
246	$\frac{1}{2}[S(3)^4]E(4)$	2592	$-$	$T_{246}/T_{261}:\ x_2x_3^3x_4^2x_5x_6^2x_9^2x_{11}^2x_{12}^3$ (1296) $T'_{246}/T_{262}:\ x_1x_2$ (18) $T'_{246}/T_{263}:\ x_1x_2$ (18)	3 1 1	$x^{12}+81x^4+216x^3$ $+216x^2+96x+16$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
247	$[3^4:2^2]D(4)_2$	2592	$-$	$T_{247}/T_{267}:\ x_1x_2x_3x_5^2x_7^3$ (432)	2	$x^{12}-18x^8-24x^7+8x^6+162x^4+144x^2+32$
248	$[3^4:2^2]D(4)$	2592	$-$	$T_{248}/T_{267}:\ x_1x_3x_5^2x_7^2$ (36)	2	$x^{12}-126x^8-168x^7+268x^6+648x^5+594x^4+528x^3+432x^2+192x+32$
249	$[F_{36}^2]2$ $=F_{36}\wr 2$	2592	$+$	$T^+_{249}/T^+_{266}:\ x_1x_3x_5^2x_7^3$ (72) $T^+_{249}/T^+_{296}:\ x_1x_5$ (12)	2 1	$x^{12}+12x^{10}-18x^8-24x^7-284x^6-72x^5+666x^4-32x^3+720x^2+160$
250	$[D(4)^4]S(3)$ $=D(4)\wr S(3)$	3072	$-$	$T'_{250}/T_{293}:\ x_1x_6$ (12) $T_{250}/T_{294}:\ x_1x_7$ (6)	1 1	$x^{12}+2x^{10}+2x^8+3x^6-2x^4+3x^2-1$
251	$[\frac{1}{3}A(4)^3]S(3)_2$	3456	$-$	$T'_{251}/T_{268}:\ x_1x_2x_4^2x_7^3$ (288) $T_{251}/T_{276}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (72)	1 1	$x^{12}+48x^6-72x^5+27x^4+64x^3-144x^2+108x-27$
252	$[\frac{1}{3}A(4)^3]S(3)$	3456	$+$	$T^+_{252}/T^+_{275}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (72)	1	$x^{12}-60x^9+1200x^6-4500x^5+3375x^4+32000x^3+67500$
253	$[E(4)^3:3^2:2]3$	3456	$-$	$T_{253}/T_{268}:\ x_1x_2^2$ (48) $T_{253}/T_{273}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_9$ (72)	1 1	$x^{12}-16x^9+3x^8+48x^6+24x^5-81x^4+64x^3+48x^2-72x-27$
254	$[\frac{1}{3}A(4)^3]S(3)_6$	3456	$-$	$T_{254}/T_{276}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6^2$ (432)	2	
255	$[2^6]L(6)$ $=2\wr L(6)$	3840	$-$	$T_{255}/T_{270}:\ x_1x_2x_4$ (80) $T_{255}/T_{286}:\ x_1x_2x_4$ (80)	1 1	$x^{12}+2x^{10}+4x^8+4x^6+3x^4+2x^2-1$
256	$\frac{1}{2}[2^6]L(6):2$	3840	$-$	$T_{256}/T_{270}:\ x_1x_2x_4x_6^2x_8^2x_{10}^2$ (640) $T_{256}/T_{287}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (120)	1 1	
257	$[2^5]L(6):2$	3840	$+$	$T^+_{257}/T^+_{285}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (120)	1	$x^{12}+3x^8-2x^6+6x^4+1$
258	$[3^4:2]S(4)$	3888	$-$	$T_{258}/T_{281}:\ x_1x_2x_5^2x_6^2$ (108)	2	$x^{12}-4x^3-2$
259	$[3^4:2]S(4)_8$	3888	$+$	$T^+_{259}/T^+_{282}:\ x_1x_2x_3x_5^2x_6^2$ (648)	2	$x^{12}-3x^{10}-2x^9-72x^7-132x^6+117x^4-74x^3+96x+16$
260	$[2S_4^2]2$ $=2S_4\wr 2$	4608	$-$	$T'_{260}/T_{293}:\ x_1x_4$ (24) $T_{260}/T_{299}:\ x_1x_7$ (6)	1 1	$x^{12}-2x^8+x^6+x^4-x^2-1$
261	$[S(3)^4]E(4)$ $=S(3)\wr E(4)$	5184	$-$	$T_{261}/T_{274}:\ x_1x_2$ (18) $T_{261}/T_{280}:\ x_1x_2$ (18)	1 1	$x^{12}-4x^{11}+6x^{10}-4x^9+x^8-x^6+2x^5-x^4+1$
262	$\frac{1}{2}[S(3)^4]dD(4)$	5184	$-$	$T_{262}/T_{274}:\ x_1x_2^3x_3x_4^2x_5^3x_7^3x_{10}^2x_{12}^3$ (1296)	1	$x^{12}-18x^8+24x^7+127x^6-270x^5+261x^4-256x^3+216x^2-96x+16$
263	$\frac{1}{2}[S(3)^4]cD(4)$	5184	$-$	$T_{263}/T_{274}:\ x_3x_4x_5x_6^2x_7^2x_9^3x_{10}^3x_{12}^3$ (5184) $T_{263}/T_{298}:\ x_1x_5$ (12)	1 1	$x^{12}-16x^9+72x^8+48x^7+70x^6+36x^5-57x^4-88x^3-126x^2-60x-8$
264	$[S(3)^4]4$ $=S(3)\wr 4$	5184	$-$	$T_{264}/T_{274}:\ x_1x_2x_5$ (36)	1	$x^{12}-4x^{11}+6x^{10}-3x^9-2x^8+3x^7-2x^5+x^4+x^3-x^2+1$
265	$[A(4)^3]3$ $=A(4)\wr 3$	5184	$+$	$T^+_{265}/T^+_{275}:\ x_1x_2^2$ (48) $T^+_{265}/T^+_{284}:\ x_1x_4^2x_7^3$ (36)	1 1	$x^{12}-30x^{10}-32x^9+545x^8+192x^7-4994x^6+888x^5+21418x^4+1520x^3-24430x^2-9576x+16849$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
266	$\frac{1}{2}[S(3)^4]eD(4)$	5184	$+$	$T^+_{266}/T^+_{282}:\ x_1x_3$ (18) $T^+_{266}/T^+_{297}:\ x_1x_5$ (12)	1 1	$x^{12}-12x^{10}+8x^9-18x^8$ $+24x^7+316x^6-648x^5$ $+351x^4+120x^3-216x^2$ $+96x-16$
267	$[3^4:2^3]D(4)$	5184	$-$	$T_{267}/T_{274}:\ x_1x_2x_3^2x_4x_5^2x_6^2x_8^2x_{11}$ (648) $T_{267}/T_{281}:\ x_1x_3$ (18)	1 1	$x^{12}-27x^{10}-34x^9-90x^8$ $-30x^7+276x^6+126x^5$ $-189x^4-100x^3+36x^2$ $+48x-16$
268	$[E(4)^3:3^2:2]S(3)$	6912	$-$	$T_{268}/T_{283}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_9$ (72)	1	$x^{12}+4x^9-3x^8-64x^3$ $+144x^2-108x+27$
269	$[L(6)^2]2$ $=L(6)\wr 2$	7200	$+$	$T^+_{269}/T^+_{279}:\ x_1x_3x_5$ (20) $T^+_{269}/T^+_{296}:\ x_1x_3x_5$ (20)	2 1	$x^{12}-4x^{11}+14x^{10}-20x^9$ $+25x^8+2x^7-3x^6+8x^5$ $+5x^4+16x^2+16x+4$
270	$[2^6]L(6):2$ $=2\wr L(6):2$	7680	$-$	$T_{270}/T_{293}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (120)	1	$x^{12}+4x^{10}+x^2-1$
271	$[3^4:2^3]A(4)$	7776	$+$	$T^+_{271}/T^+_{282}:\ x_1x_2x_3^2x_5$ (324)	1	$x^{12}-51x^{10}+558x^8$ $-282x^7+887x^6+468x^5$ $-3894x^4-1782x^3+288x^2$ $+168x+16$
272	$M_{11}(12)$	7920	$+$	$T'^+_{272}/T^+_{295}:\ x_1x_2x_3x_6$ (165)	1	
273	$[\frac{1}{4}S(4)^3]3$	10368	$-$	$T_{273}/T_{283}:\ x_1x_2^2$ (48) $T_{273}/T_{292}:\ x_1^2x_3x_4^4x_5^4x_6^3x_7^3x_{10}x_{12}^2$ (3456)	1 1	$x^{12}-12x^9+9x^8+192x^3$ $-432x^2+324x-81$
274	$[S(3)^4]D(4)$ $=S(3)\wr D(4)$	10368	$-$	$T_{274}/T_{289}:\ x_1x_3$ (18) $T_{274}/T_{299}:\ x_1x_5$ (12)	1 1	$x^{12}+x^{10}-2x^9+14x^8$ $-4x^7-13x^6+14x^5$ $+12x^3+27x^2+10x+5$
275	$[A(4)^3]S(3)$ $=A(4)\wr S(3)$	10368	$+$	$T^+_{275}/T^+_{290}:\ x_1x_4^2x_7^3$ (36)	1	$x^{12}-6x^{11}+14x^{10}-22x^9$ $+66x^8-10x^7+16x^6$ $+60x^5+6x^4+20x^3$ $+18x^2+4x+2$
276	$\frac{1}{2}[\frac{1}{4}S(4)^3]S(3)$	10368	$-$	$T_{276}/T_{283}:\ x_1x_2x_4^2x_7^3$ (288) $T_{276}/T_{291}:\ x_1x_2x_4^2x_7^3$ (288)	1 1	$x^{12}+192x^6-288x^5$ $+108x^4+256x^3-576x^2$ $+432x-108$
277	$[2^5]A(6)$	11520	$+$	$T^+_{277}/T^+_{285}:\ x_1^4x_2x_4^3x_8x_9x_{11}^2$ (5760)	1	$x^{12}-2x^8+6x^6+6x^4$ $+4x^2+1$
278	$\frac{1}{2}[(L(6):2)^2]2$	14400	$-$	$T_{278}/T_{288}:\ x_1x_2x_3x_4x_5x_6^2$ (1200) $T_{278}/T_{298}:\ x_1x_3x_5^2x_9^2$ (60)	1 1	$x^{12}+20x^8-80x^6+50x^4$ $-320x^3-912x^2+1280x$ $+800$
279	$[\frac{1}{2}(L(6):2)^2]2$	14400	$+$	$T^+_{279}/T^+_{297}:\ x_1x_3x_5^2x_9^2$ (60)	1	
280	$[S(3)^4]A(4)$ $=S(3)\wr A(4)$	15552	$-$	$T_{280}/T_{289}:\ x_1x_2x_3^2x_5$ (324)	1	$x^{12}-4x^{11}+6x^{10}-2x^9$ $-5x^8+6x^7-4x^5$ $+2x^4+2$
281	$[3^4:2^3]S(4)$	15552	$-$	$T_{281}/T_{289}:\ x_3x_5x_6^2x_8x_9^2x_{10}x_{11}^2x_{12}^2$ (648)	1	$x^{12}-5x^{11}+6x^{10}-4x^9$ $+x^8-6x^7+7x^6-9x^5$ $+10x^3+19x^2+6x+1$

Nr	Notation	Ord.	P	Relativ invariantes Polynom	#Kl.	Polynom
282	$\frac{1}{2}[S(3)^4]S(4)$	15552	$+$	$T^+_{282}/T^+_{300} : x_1x_5$ (12)	1	$x^{12}-99x^8+132x^7-530x^6+972x^5-567x^4-72x^3+216x^2-96x+16$
283	$[\frac{1}{4}S(4)^3]S(3)$	20736	$-$	$T_{283}/T_{294} : x_1^5x_3^5x_4x_6^4x_7^4x_9^3$ (1728)	1	$x^{12}-256x^3+576x^2-432x+108$
284	$[\frac{1}{2}S(4)^3]3$	20736	$+$	$T^+_{284}/T^+_{290} : x_1x_2^2$ (48)	1	$x^{12}+12x^9-9x^8-192x^3+432x^2-324x+81$
285	$[2^5]S(6)$	23040	$+$	$T^+_{285}/T^+_{300} : x_1x_{12}$ (6)	1	$x^{12}+2x^6+3x^4+4x^2+1$
286	$[2^6]A(6) = 2 \wr A(6)$	23040	$-$	$T_{286}/T_{293} : x_3^3x_5x_6^2x_7^2x_{10}^4x_{12}^2$ (5760)	1	$x^{12}+3x^{10}+5x^8+6x^6+3x^4-5x^2-1$
287	$\frac{1}{2}[2^6]S(6)$	23040	$-$	$T_{287}/T_{293} : x_2^2x_4x_5^3x_6^2x_7^4x_8^3x_{11}^5x_{12}^4$ (23040)	1	$x^{12}-3x^{10}-3x^8+2x^4+2x^2+2$
288	$[(L(6):2)^2]2 = L(9):2 \wr 2$	28800	$-$	$T_{288}/T_{299} : x_1x_3x_5^2x_9^2$ (60)	1	$x^{12}-4x^{11}+4x^{10}-50x^4+120x^3-112x^2+48x-8$
289	$[S(3)^4]S(4) = S(3) \wr S(4)$	31104	$-$	$T_{289}/T_{301} : x_1x_5$ (12)	1	$x^{12}-27x^8+36x^7+15x^6-54x^5-45x^4+208x^3-216x^2+96x-16$
290	$[\frac{1}{2}S(4)^3]S(3)$	41472	$+$	$T^+_{290}/T^+_{300} : x_1x_4$ (18)	1	$x^{12}-12x^9+9x^8-32x^6+48x^5-18x^4+64x^3-144x^2+108x-27$
291	$\frac{1}{2}[S(4)^3]S(3)$	41472	$-$	$T_{291}/T_{294} : x_1^4x_3^2x_4^2x_5^4x_6x_8^3x_{10}x_{11}^2x_{12}^3$ (41472)	1	$x^{12}+12x^9-9x^8+64x^3-144x^2+108x-27$
292	$[S(4)^3]3 = S(4) \wr 3$	41472	$-$	$T_{292}/T_{294} : x_1x_2^2$ (48)	1	$x^{12}-3x^{11}+5x^9-3x^7-x^6-3x^4+3x^3+3x^2-1$
293	$[2^6]S(6) = 2 \wr S(6)$	46080	$-$	$T_{293}/T_{301} : x_1x_{12}$ (6)	1	$x^{12}+x^{10}-1$
294	$[S(4)^3]S(3) = S(4) \wr S(3)$	82944	$-$	$T_{294}/T_{301} : x_1x_4$ (18)	1	$x^{12}+5x^{10}-8x^9+9x^8-18x^7+11x^6+7x^4+12x^3+3x^2+2x+1$
295	$M(12)$	95040	$+$	$T^+_{295}/T^+_{300} : x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ (132)	2	$x^{12}+75x^8+750x^6-5625x^4-23250x^2-30000x+50625$
296	$[A(6)^2]2 = A(6) \wr 2$	259200	$+$	$T^+_{296}/T^+_{297} : x_2^6x_4^2x_8x_{10}^5x_{12}^3$ (720)	2	$x^{12}-12x^{11}+36x^{10}+6251x^6-37506x^5+9768751$
297	$[\frac{1}{2}S(6)^2]2$	518400	$+$	$T^+_{297}/T^+_{300} : x_1x_3$ (30)	1	
298	$\frac{1}{2}[S(6)^2]2$	518400	$-$	$T_{298}/T_{299} : x_1x_2^2x_3^4x_4^3x_5^3x_6^6x_7^2x_8^4x_9^6x_{10}^5$ (518400)	1	
299	$[S(6)^2]2 = S(6) \wr 2$	1036800	$-$	$T_{299}/T_{301} : x_1x_3$ (30)	1	$x^{12}+4x^7+4x^2+2$
300	A_{12}	$\frac{1}{2}12!$	$+$	d(f)	$-$	$x^{12}+12x^{11}+132x^{10}+1320x^9+11880x^8+95040x^7+665280x^6+3991680x^5+19958400x^4+79833600x^3+239500800x^2+479001600x+479001600$
301	S_{12}	$12!$	$-$		$-$	$x^{12}+x^{11}+1$

Inklusion bis auf Konjugation:

$T_3^+/T_{10}^+ : (2,3,12,10,11,8,6,7,4)$
$T_3^+/T_{18}^+ : (3,8,11,4)(5,9)(7,12)$
$T_3^+/T_{21}^+ : (3,8,5,9,11,6,4)(7,10,12)$
$T_9^+/T_{24}^+ : (3,5,9,11)(4,12,10,6)$
$T_2^+/T_{26}^+ : (5,11)(6,9)(7,10)$
$T_4^+/T_{32}^+ : (3,9,12)(5,11,8)$
$T_{17}/T_{35} : (5,9)(8,12)$
$T_{16}^+/T_{37}^+ : (5,9)(8,12)$
$T_{17}/T_{41} : (3,8,11,12,7,4)$
$T_8/T_{44} : (2,9,10,12,8,4,6,7,3)(5,11)$
$T_{21}^+/T_{48}^+ : (3,5)(4,6,10,12)(9,11)$
$T_{27}/T_{49} : (3,12,11,7,9,5,10,8,4,6)$
$T_{29}/T_{54} : (2,6,11,5,4)(3,8,7,12,10)$
$T_7^+/T_{56}^+ : (3,8,11,12,7,4)(5,9)(6,10)$
$T_7^+/T_{60}^+ : (3,8)(4,10,11,5)(7,12)$
$T_{31}^+/T_{63}^+ : (3,4,6,11,9,5,8)(7,12,10)$
$T_{31}^+/T_{65}^+ : (3,4,6,11,9,5,8)(7,12,10)$
$T_9^+/T_{68}^+ : (2,4,12,8,11,5,10,7,6,3)$
$T_9^+/T_{69}^+ : (2,10,3,4)(5,8,11,9)(6,7,12)$
$T_{18}^+/T_{70}^+ : (2,3,6,7)(8,12)(10,11)$
$T_1/T_{73} : (6,10)(8,12)$
$T_9^+/T_{74}^+ : (2,4,12)(5,11,7,9)(6,10)$
$T_6^+/T_{76}^+ : (2,6,5,10,9,4,8,11,7,12)$
$T_{34}^+/T_{77}^+ : (2,8,11,10,4,3)(5,9)(6,12,7)$
$T_{35}/T_{78} : (3,4)(7,8)(11,12)$
$T_{39}/T_{80} : (3,4,7,12,11,8)(5,9)(6,10)$
$T_{26}^+/T_{85}^+ : (3,6,9,12)(7,10)(8,11)$
$T_{25}^+/T_{87}^+ : (3,8)(4,10,11)(7,12)$
$T_{55}^+/T_{89}^+ : (2,4)(3,8,5,7,12,10)(6,11)$
$T_{25}^+/T_{90}^+ : (2,8,11,6,4,3)(5,9)(7,10,12)$
$T_{25}^+/T_{91}^+ : (2,4,8,5,11,10,9,7,12)(3,6)$
$T_{63}^+/T_{95}^+ : (3,8,5,9,11,6,4)(7,10,12)$
$T_{21}^+/T_{97}^+ : (2,8,9,7,12,4,3,6,5,10)$
$T_{65}^+/T_{97}^+ : (2,4,11,9,6)(3,5,10,8,7)$
$T_{22}/T_{100}: (2,10,9,12,6)(3,4,8)(7,11)$
$T_{23}^+/T_{101}^+: (2,8,11,9,5,6,4,12,7,10,3)$
$T_{27}/T_{102}: (2,9,7,12,5,10,3,4)(8,11)$
$T_{21}^+/T_{103}^+: (5,8)(7,10)(9,12)$
$T_{56}^+/T_{103}^+: (5,8)(7,10)(9,12)$
$T_{29}/T_{104}: (2,8,9,7,12,4)(3,6,5,11,10)$
$T_{21}^+/T_{106}^+: (3,9,8)(4,10,11,5)(7,12)$
$T_{24}^+/T_{108}^+: (3,8)(4,10,11)(6,7,12)$
$T_{23}^+/T_{109}^+: (3,8)(4,10,11)(6,7,12)$
$T_{24}^+/T_{112}^+: (3,9,8)(4,10,11)(6,7,12)$
$T_3^+/T_{16}^+ : (3,11,7)(4,12)(5,9)$
$T_5/T_{19} : (4,12)(6,10)$
$T_9^+/T_{23}^+ : (3,5)(4,6,10,12)(9,11)$
$T_2^+/T_{25}^+ : (3,4,7,6,10,12,5)(8,9,11)$
$T_5/T_{27} : (3,5)(4,9,8,11,12)(6,10)$
$T_4^+/T_{33}^+ : (2,5,11,4,8,10,9,7,12)$
$T_{17}/T_{36} : (3,4)(5,9)(6,10)(7,8)(11,12)$
$T_{13}/T_{38} : (4,12)(6,10)$
$T_{15}/T_{42} : (4,12)(6,10)$
$T_{10}^+/T_{48}^+ : (3,4,7,6,10,12,5)(8,9,11)$
$T_{13}/T_{49} : (4,8,7,9,5,10,6,12,11)$
$T_{12}/T_{54} : (2,6,11,5,4)(3,8,7,12,10)$
$T_6^+/T_{56}^+ : (3,9,12)(5,11,8)$
$T_7^+/T_{58}^+ : (3,8)(4,10,11)(6,7,12)$
$T_{31}^+/T_{60}^+ : (3,4,6,11,9,5,8)(7,12,10)$
$T_9^+/T_{65}^+ : (3,4,6,11,9,5,8)(7,12,10)$
$T_8/T_{66} : (3,10,8,6,7)(4,9,12,5,11)$
$T_{32}^+/T_{68}^+ : (3,4,12,10,7,6,5,8,9,11)$
$T_{16}^+/T_{70}^+ : (6,10)(8,12)$
$T_5/T_{72} : (6,10)(8,12)$
$T_{17}/T_{73} : (6,10)(8,12)$
$T_7^+/T_{75}^+ : (6,8)(7,9)$
$T_{33}^+/T_{76}^+ : (4,7)(5,6)(10,11)$
$T_{40}^+/T_{77}^+ : (3,8,11,4)(5,9)(7,12)$
$T_{41}/T_{79} : (3,8,11,4)(5,9)(7,12)$
$T_{20}^+/T_{85}^+ : (2,8,5)(3,12,9)$
$T_{54}/T_{86} : (2,4,3,10)(5,9,11,8)(6,12,7)$
$T_{25}^+/T_{89}^+ : (2,4,8,5,10,9,7,12)(3,6)$
$T_{60}^+/T_{89}^+ : (2,4,8,7,3,5,9,6)$
$T_{26}^+/T_{90}^+ : (3,6,12)(4,10,7)$
$T_{57}^+/T_{91}^+ : (4,8)(5,9)(6,10)(7,11)$
$T_{64}/T_{96} : (2,4,8,7,3,5,9,6)$
$T_{55}^+/T_{97}^+ : (2,8,9,7,12,4,3,6,5,10)$
$T_{29}/T_{99} : (2,8,9,7,12,4)(3,6,5,10)$
$T_{66}/T_{100}: (2,4,8,6)(3,5,9,7)$
$T_{68}^+/T_{101}^+: (3,5,12,10,9,11,6,4)$
$T_{30}/T_{102}: (2,8,9,7,12,4)(3,6,5,10)$
$T_{24}^+/T_{103}^+: (3,5,12,10,6,7,4)(8,11,9)$
$T_{68}^+/T_{103}^+: (3,5,12,10,9,11,6,4)$
$T_{29}/T_{105}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{30}/T_{107}: (3,4,6,11,9,5,8)(7,12,10)$
$T_{69}^+/T_{108}^+: (10,11)$
$T_{66}/T_{110}: (4,10)(5,11)$
$T_{60}^+/T_{112}^+: (6,7)(8,9)(10,11)$

$T^+_{23}/T^+_{113} : (3,9,8)(5,10)(6,7,12)$
$T_{64}/T_{115} : (4,10,5,11)$
$T_{35}/T_{116} : (6,10)(7,11)$
$T_{12}/T_{118} : (6,10)(8,12)$
$T_{11}/T_{119} : (6,10)(8,12)$
$T_{13}/T_{120} : (6,10)(8,12)$
$T_{14}/T_{121} : (6,10)(8,12)$
$T^+_{10}/T^+_{123} : (2,11,8,10,5,9,7,12)(3,6)$
$T^+_{74}/T^+_{123} : (3,9,11,7,5)(6,10,8)$
$T_{80}/T_{125} : (3,8,11,4)(5,9)(7,12)$
$T^+_{58}/T^+_{126} : (2,12,7)(3,6,8,5,9,11,10,4)$
$T_{44}/T_{127} : (3,12)(4,10)(5,8)$
$T_{66}/T_{127} : (2,12,10,8,6,4)$
$T^+_{70}/T^+_{130} : (3,8,11,4)(6,10)(7,12)$
$T_{51}/T_{134} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{48}/T^+_{136} : (3,8)(4,11)(6,7,12)$
$T^+_{48}/T^+_{138} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{112}/T^+_{138} : (2,4,8,7,3,5,9,6)$
$T^+_{48}/T^+_{139} : (3,11,9,5)(4,6,10,12)$
$T_{92}/T_{141} : (3,8,5,9,11,6,4)(7,10,12)$
$T_{99}/T_{142} : (2,10,3,4,5,11,9,12,7)(6,8)$
$T_{104}/T_{143} : (2,6,10)(3,7,11)$
$T^+_{56}/T^+_{144} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{52}/T_{145} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{102}/T_{146} : (2,6,8,4)(3,7,9,5)$
$T_{98}/T_{147} : (2,8,9,7,12,4,3,6,5,10)$
$T_{100}/T_{148} : (2,10,3,4,5,11,9,12,7)(6,8)$
$T_{50}/T_{149} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{54}/T_{151} : (2,10,3,4,5,11,9,6,8,12,7)$
$T_{53}/T_{153} : (2,8,9,7,12,4)(3,6,5,10)$
$T_{53}/T_{155} : (2,10,3,4)(5,8,11,9)(6,7,12)$
$T_{28}/T_{156} : (6,10)(8,12)$
$T^+_{18}/T^+_{158} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{126}/T^+_{158} : (3,4,6,11,9,5,8)(7,12,10)$
$T_{105}/T_{159} : (6,10)(7,11)$
$T^+_{16}/T^+_{161} : (5,9)(8,12)$
$T^+_{126}/T^+_{163} : (3,4,6,10,7,12,11,9,5,8)$
$T_{121}/T_{167} : (6,10)(8,12)$
$T^+_{40}/T^+_{171} : (2,3,8,10,11,12,6,7,4)$
$T^+_{46}/T^+_{173} : (2,3,4,10,11,8)(6,7,12)$
$T^+_{3}/T^+_{179} : (4,6)(5,8,7,9)(11,12)$
$T^+_{47}/T^+_{181} : (2,4,8,6,10,12)$
$T^+_{23}/T^+_{183} : (2,4,6,12)(3,9,5,11,7)$
$T^+_{74}/T^+_{183} : (3,9,7,5)(8,10)$
$T^+_{101}/T^+_{184} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$

$T^+_{62}/T^+_{113} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{15}/T_{116} : (6,10)(8,12)$
$T^+_{37}/T^+_{117} : (4,12)(5,9)$
$T_{36}/T_{118} : (3,12)(4,7,8,11)(5,9)$
$T_{41}/T_{119} : (3,12)(4,7,8,11)(5,9)$
$T_{36}/T_{120} : (3,12)(4,7)(5,9)(6,10)(8,11)$
$T_{35}/T_{121} : (5,9)(6,10)$
$T^+_{24}/T^+_{123} : (6,8)(7,9)$
$T_{78}/T_{125} : (3,8,11,4)(5,9)(7,12)$
$T_{82}/T_{125} : (3,8,11,4)(5,9)(7,12)$
$T^+_{69}/T^+_{126} : (2,12,7)(3,6,8)(4,5,11,10)$
$T_{49}/T_{127} : (2,12,11,5,8,10,9,4,6,7,3)$
$T_{59}/T_{129} : (2,12,4)(3,9)(5,11)(6,10,8)$
$T_{73}/T_{131} : (6,10)(8,12)$
$T_{50}/T_{135} : (2,6,11,5,4)(3,8,7,12,10)$
$T_{100}/T_{137} : (2,6,8,4)(3,7,9,5)$
$T^+_{95}/T^+_{138} : (2,8,9,7,12,4,3,6,5,10)$
$T^+_{113}/T^+_{138} : (2,4,11,9,6)(3,5,10,8,7)$
$T_{96}/T_{140} : (2,6,9,5,3,7,8,4)$
$T_{88}/T_{142} : (3,8,11)(4,12,7)(5,6,10,9)$
$T_{51}/T_{143} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{55}/T^+_{144} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{57}/T^+_{144} : (2,6,11,9,3,7,10,8)$
$T_{50}/T_{146} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{52}/T_{147} : (2,8,9,7,12,4,3,6,5,10)$
$T_{49}/T_{148} : (2,6,4,9,7,12,5,8,10,3)$
$T_{102}/T_{148} : (2,10,3,4,5,11,9,12,7)(6,8)$
$T_{98}/T_{149} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{96}/T_{151} : (2,10,3,4,5,11,9,6,8,12,7)$
$T_{105}/T_{154} : (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T_{105}/T_{155} : (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T_{78}/T_{156} : (3,12)(4,7,8,11)(5,9)$
$T^+_{106}/T^+_{158} : (6,10)(7,11)$
$T_{19}/T_{159} : (2,11,9,5,8,10,7,12)(3,4,6)$
$T_{17}/T_{160} : (5,9,11)(6,12,8)$
$T^+_{108}/T^+_{161} : (3,8)(4,11,12,7,10,6)$
$T_{110}/T_{165} : (3,8,11)(4,12,7)(5,6,10,9)$
$T_{118}/T_{169} : (6,10)(8,12)$
$T^+_{34}/T^+_{172} : (2,8,11,10,12,7,6,4,3)$
$T_{8}/T_{177} : (2,3,11,8,7,10,9)(4,12,6)$
$T^+_{33}/T^+_{179} : (3,12,8,7)(4,5,6,9,10)$
$T^+_{46}/T^+_{182} : (2,3)(4,6,7)(8,12,10,9,11)$
$T^+_{34}/T^+_{183} : (2,3)(6,7)(10,11)$
$T^+_{95}/T^+_{184} : (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{140}/T_{185} : (3,8,5,9,11,6,4)(7,10,12)$

$T_{147}/T_{185}: (2,10,3,4,5,11,9,6,8,12,7)$
$T_{137}/T_{186}: (3,8,11)(4,12,7)(5,6,10,9)$
$T_{152}/T_{186}: (2,10,3,4,5,11,9,12,7)(6,8)$
$T^+_{89}/T^+_{187}: (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T^+_{91}/T^+_{187}: (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T_{104}/T_{189}: (2,4)(3,10,6,11,12,7,5,8)$
$T_{96}/T_{190}: (2,6)(3,7)(4,8,11)(5,9,10)$
$T^+_{97}/T^+_{191}: (2,6)(3,7)(4,8,11)(5,9,10)$
$T_{98}/T_{192}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{86}/T_{193}: (2,10,7,12)(3,8,11,4,6)$
$T_{155}/T_{193}: (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T^+_{161}/T^+_{195}: (3,4,6,10,7,12,11,9,5,8)$
$T_{154}/T_{196}: (6,10)(7,11)$
$T_{160}/T_{198}: (3,4,6,10,7,12,11,9,5,8)$
$T_{160}/T_{201}: (2,11,4,6,3,9,8,10,7,12)$
$T^+_{162}/T^+_{203}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{134}/T_{208}: (2,12,7)(3,6,8,5,9,11,4)$
$T_{159}/T_{208}: (2,12,7)(3,6,8)(4,5,11)$
$T_{82}/T_{209}: (3,4)(7,12)(8,11)$
$T^+_{84}/T^+_{212}: (2,4,11)(3,6,8,7,10,12)$
$T^+_{174}/T^+_{212}: (8,12)$
$T^+_{172}/T^+_{214}: (3,4)(7,8,11,12)$
$T^+_{173}/T^+_{216}: (3,4,7,8)(11,12)$
$T_{12}/T_{218}: (4,7,12,8,11,5,10,9)$
$T^+_{84}/T^+_{220}: (2,3)(4,6,7)(8,12,10,9,11)$
$T_{155}/T_{221}: (2,4,5,11,9,12,7)(3,10)(6,8)$
$T_{134}/T_{222}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{188}/T_{222}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{147}/T_{223}: (2,4,5,11,9,12,7)(3,10)(6,8)$
$T_{192}/T_{223}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{154}/T_{225}: (2,4,5,11,9,12,7)(3,10)(6,8)$
$T^+_{138}/T^+_{226}: (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T^+_{76}/T^+_{230}: (4,5)(6,11,8)(7,10,9)$
$T^+_{122}/T^+_{232}: (3,4,7,8)(11,12)$
$T_{200}/T_{235}: (3,4,6,10,7,12,11,9,5,8)$
$T^+_{203}/T^+_{236}: (3,4,6,10,7,12,11,9,5,8)$
$T_{81}/T_{240}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{212}/T^+_{243}: (2,4,3)(6,8,7)(10,12,11)$
$T^+_{216}/T^+_{243}: (3,4)(7,8,11,12)$
$T_{224}/T_{250}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{204}/T_{251}: (6,12,9)$
$T_{188}/T_{255}: (6,10)(7,11)$
$T_{155}/T_{256}: (6,10)(7,11)$
$T^+_{136}/T^+_{257}: (6,8,11)(7,9,10)$
$T^+_{157}/T^+_{259}: (3,4)(7,8,11,12)$

$T_{149}/T_{185}: (3,8,5,9,11,6,4)(7,10,12)$
$T_{146}/T_{186}: (3,8,11)(4,12,7)(5,6,10,9)$
$T_{153}/T_{186}: (2,10,3,4,5,11,9,12,7)(6,8)$
$T^+_{90}/T^+_{187}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{99}/T_{189}: (2,4,5,11,9,12,7)(3,10)(6,8)$
$T_{105}/T_{189}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{100}/T_{190}: (2,6)(3,7)(4,8,11)(5,9,10)$
$T^+_{103}/T^+_{191}: (2,11,5,10,12)(4,6,8)$
$T_{102}/T_{192}: (2,6)(3,7)(4,8,11)(5,9,10)$
$T_{154}/T_{193}: (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T^+_{37}/T^+_{195}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{38}/T_{196}: (2,11,9,4,6,3,5,8,10,7,12)$
$T_{39}/T_{197}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{36}/T_{201}: (10,11)$
$T^+_{162}/T^+_{202}: (10,11)$
$T^+_{163}/T^+_{203}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{135}/T_{208}: (2,12,7)(3,6,8)(4,5,11)$
$T_{80}/T_{209}: (3,8,7,12,11,4)$
$T^+_{171}/T^+_{210}: (2,3,12,10,11,8,6,7,4)$
$T^+_{173}/T^+_{212}: (3,4)(7,12,11,8)$
$T^+_{171}/T^+_{214}: (2,4,3)(6,8,7)(10,12,11)$
$T^+_{172}/T^+_{216}: (8,12)$
$T_{8}/T_{218}: (4,11,10)(5,7,6,9)(8,12)$
$T^+_{77}/T^+_{219}: (2,11,8,10,5,9,7,12)(3,6)$
$T_{153}/T_{221}: (2,4,5,11,9,12,7)(3,10)(6,8)$
$T_{192}/T_{221}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{143}/T_{222}: (2,3,9,12,7,10,5,8,6,4)$
$T_{145}/T_{223}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{190}/T_{223}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{152}/T_{225}: (2,4,5,11,9,12,7)(3,10)(6,8)$
$T_{190}/T_{225}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T^+_{139}/T^+_{226}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T^+_{144}/T^+_{230}: (6,10)(7,11)$
$T_{169}/T_{233}: (6,10)(8,12)$
$T^+_{77}/T^+_{236}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{79}/T_{237}: (2,11,4,6,3,8,10,7,12)$
$T_{208}/T_{240}: (3,4,6,10,7,12,11,9,5,8)$
$T^+_{214}/T^+_{243}: (8,12)$
$T_{193}/T_{250}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{227}/T_{250}: (3,8,5,6,10)(4,12,7)(9,11)$
$T_{207}/T_{254}: (2,3,5,6,8,12)(9,11)$
$T_{124}/T_{256}: (4,6)(5,7)(8,9)(10,11)$
$T_{192}/T_{256}: (6,8)(7,9)$
$T^+_{191}/T^+_{257}: (6,8)(7,9)$
$T^+_{212}/T^+_{259}: (8,12)$

$T_{235}/T_{260}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{238}/T_{260}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{241}/T_{260}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{246}/T_{263}: (2,3,12,6,7,4,10,11,8)$
$T^{+}_{74}/T^{+}_{269}: (7,11,9)(10,12)$
$T_{193}/T_{270}: (6,8,11)(7,9,10)$
$T^{+}_{84}/T^{+}_{272}: (4,11,12,6,10,5,8)$
$T_{79}/T_{278}: (7,9,11)(8,12)$
$T^{+}_{77}/T^{+}_{279}: (7,9,11)(8,12)$
$T^{+}_{187}/T^{+}_{284}: (2,12,4)(3,6,10,5,8)$
$T_{125}/T_{288}: (7,9,11)(8,12)$
$T^{+}_{226}/T^{+}_{290}: (2,12,4)(3,6,10,5,8)$
$T_{260}/T_{293}: (2,11,9,5,8,10,7,12)(3,4,6)$
$T^{+}_{112}/T^{+}_{295}: (7,8,12,11,9,10)$
$T^{+}_{157}/T^{+}_{295}: (6,9)(7,10)(11,12)$
$T^{+}_{220}/T^{+}_{295}: (6,11,7,10,12)$
$T^{+}_{181}/T^{+}_{296}: (10,12)$
$T^{+}_{236}/T^{+}_{297}: (2,12,7,4,3)(6,8,11)$

$T_{237}/T_{260}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{240}/T_{260}: (2,10,12,7)(3,4,11,6,8)$
$T_{246}/T_{262}: (2,3,12,6,7,4,10,11,8)$
$T_{251}/T_{268}: (6,9,12)$
$T^{+}_{126}/T^{+}_{269}: (6,8,10,12)(7,11)$
$T_{224}/T_{270}: (6,8)(7,9)$
$T^{+}_{181}/T^{+}_{272}: (4,12,8,9)(5,10)(6,11)$
$T_{160}/T_{278}: (7,9)(8,10,12)$
$T^{+}_{161}/T^{+}_{279}: (7,9)(8,10,12)$
$T_{221}/T_{287}: (2,11,9,5,8,10,7,12)(3,4,6)$
$T_{200}/T_{288}: (7,9)(8,10,12)$
$T_{250}/T_{293}: (2,11,9,5,8,10,7,12)(3,4,6)$
$T^{+}_{43}/T^{+}_{295}: (6,8,10,9,12,11,7)$
$T^{+}_{123}/T^{+}_{295}: (6,10,11,7)$
$T^{+}_{179}/T^{+}_{295}: (6,7)(8,9,11,12,10)$
$T^{+}_{272}/T^{+}_{295}: (6,7,9,10)(8,11,12)$
$T^{+}_{183}/T^{+}_{296}: (10,12)$
$T_{237}/T_{298}: (2,12,7,4,3)(6,8,11)$

Nicht triviale Konjugationsklassen:

$T'^{+}_{3}/T^{+}_{10}: (2,3)(5,9)(6,11)(7,10)(8,12)$
$T'^{+}_{3}/T^{+}_{16}: (2,3,4,10,11,12,6,7,8)$
$T^{+}_{9}/T^{+}_{21}: (4,10)(5,11)(6,12)$
$T^{+}_{7}/T^{+}_{25}: (3,9)(5,11)(6,12)$
$T^{+}_{6}/T^{+}_{26}: (2,3,11,9)(4,7)(5,12,8,6)$
$T^{+}_{10}/T^{+}_{37}: (2,6,10)(4,8,12)$
$T^{+}_{18}/T^{+}_{37}: (4,12)(6,10)$
$T_{19}/T_{39}: (4,12)(6,10)$
$T'_{8}/T_{44}: (3,12,9,6)(4,10)(5,11)$
$T^{+}_{24}/T^{+}_{48}: (3,9)(5,11)(6,12)$
$T'^{+}_{7}/T^{+}_{56}: (2,3,8,9)(4,10)(5,6,11,12)$
$T'^{+}_{9}/T^{+}_{68}: (2,4)(3,11)(5,9)(6,12)(8,10)$
$T'^{+}_{9}/T^{+}_{69}: (2,6,10)(3,7,11)$
$T^{+}_{16}/T^{+}_{71}: (3,4,11,12,7,8)$
$T'^{+}_{34}/T^{+}_{77}: (2,4,6,8,10,12)$
$T_{36}/T_{78}: (6,10)(7,11)$
$T_{38}/T_{81}: (4,12)(6,10)$
$T'^{+}_{20}/T^{+}_{85}: (2,8,5)(3,9,6)$
$T^{+}_{58}/T^{+}_{87}: (10,11)$
$T'^{+}_{60}/T^{+}_{89}: (8,10,9,11)$
$T'^{+}_{25}/T^{+}_{90}: (2,5,8)(4,7,10)(6,9,12)$
$T^{+}_{56}/T^{+}_{90}: (5,8)(7,10)(9,12)$
$T_{61}/T_{92}: (4,10,5,11)$
$T'^{+}_{65}/T^{+}_{97}: (8,10,9,11)$
$T'_{66}/T_{100}: (8,10)(9,11)$

$T'^{+}_{3}/T^{+}_{10}: (2,8,11)(3,6,12)(4,7,10)$
$T^{+}_{4}/T^{+}_{20}: (3,6,9,12)(4,10)(5,11)$
$T_{8}/T_{22}: (2,3,10,12)(4,11,7,5)(6,8)$
$T^{+}_{6}/T^{+}_{26}: (2,3)(5,9)(6,11)(7,10)(8,12)$
$T'^{+}_{4}/T^{+}_{32}: (3,12,6,9)(5,8)(7,10)$
$T'^{+}_{16}/T^{+}_{37}: (3,11)(5,9)$
$T_{11}/T_{39}: (2,6,10)(4,8,12)$
$T'_{17}/T_{41}: (4,8)(5,9)$
$T^{+}_{23}/T^{+}_{48}: (3,9)(5,11)(6,12)$
$T'^{+}_{6}/T^{+}_{56}: (2,3,8,9)(5,12,11,6)$
$T'_{8}/T_{66}: (2,3)(6,7)(10,11)$
$T'^{+}_{9}/T^{+}_{69}: (2,10,6)(3,11,7)$
$T'^{+}_{18}/T^{+}_{70}: (2,8,3)(4,11,10,12,7,6)(5,9)$
$T^{+}_{16}/T^{+}_{71}: (2,7,6,11,10,3)$
$T'_{35}/T_{78}: (4,8)(5,9)$
$T_{28}/T_{81}: (2,4)(3,11)(5,9)(6,12)(8,10)$
$T_{42}/T_{81}: (4,12)(6,10)$
$T'^{+}_{26}/T^{+}_{85}: (4,7)(6,9)(8,11)$
$T_{59}/T_{88}: (4,10)(5,11)$
$T'^{+}_{25}/T^{+}_{90}: (2,3)(5,9)(6,11)(7,10)(8,12)$
$T'^{+}_{26}/T^{+}_{90}: (3,12)(4,7)(8,11)$
$T^{+}_{56}/T^{+}_{90}: (4,7)(6,9)(8,11)$
$T'_{64}/T_{96}: (8,10,9,11)$
$T'_{22}/T_{100}: (4,8)(5,9)(6,10)(7,11)$
$T'^{+}_{23}/T^{+}_{101}: (2,5,8,11)(3,6,9,12)(4,10)$

T'_{27}/T_{102} : $(4,8)(5,9)(6,10)(7,11)$
T'^{+}_{68}/T^{+}_{103} : $(4,7)(6,9)(8,11)$
T'^{+}_{21}/T^{+}_{106} : $(4,8)(5,9)(6,10)(7,11)$
T'_{30}/T_{107} : $(2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
T'^{+}_{37}/T^{+}_{117} : $(3,4)(7,8)(11,12)$
T^{+}_{70}/T^{+}_{117} : $(3,4)(7,8)(11,12)$
T'_{44}/T_{127} : $(2,5,8)(3,6,9)$
T'^{+}_{70}/T^{+}_{130} : $(3,4,11,12,7,8)$
T'_{50}/T_{135} : $(2,10,6)(3,11,7)$
T^{+}_{108}/T^{+}_{136} : $(8,9)$
T_{110}/T_{137} : $(4,10)(5,11)$
T'^{+}_{112}/T^{+}_{138} : $(8,10,9,11)$
T'^{+}_{48}/T^{+}_{139} : $(2,3)(4,7,10)(5,6,8,12,11,9)$
T^{+}_{101}/T^{+}_{139} : $(5,8)(7,10)(9,12)$
T^{+}_{103}/T^{+}_{139} : $(5,8)(7,10)(9,12)$
T_{114}/T_{140} : $(4,10,5,11)$
T'^{+}_{57}/T^{+}_{144} : $(2,4)(3,5)(8,11,9,10)$
T'^{+}_{126}/T^{+}_{158} : $(10,11)$
T^{+}_{126}/T^{+}_{161} : $(4,6,10,12)$
T'^{+}_{126}/T^{+}_{163} : $(4,8)(5,9)$
T^{+}_{85}/T^{+}_{164} : $(3,12,6)(5,11,8)$
T^{+}_{90}/T^{+}_{164} : $(4,10,7)(6,9,12)$
T^{+}_{117}/T^{+}_{168} : $(4,12)(6,10)$
T^{+}_{130}/T^{+}_{168} : $(7,11)(8,12)$
T^{+}_{130}/T^{+}_{168} : $(6,10)(7,11)$
T_{131}/T_{170} : $(6,10)(8,12)$
T'^{+}_{34}/T^{+}_{172} : $(3,7)(4,8)$
T'^{+}_{34}/T^{+}_{172} : $(2,3,6,7)(10,11)$
T^{+}_{47}/T^{+}_{174} : $(3,8,11,4)(7,12)$
T^{+}_{47}/T^{+}_{174} : $(3,12,7,8)(4,11)$
T'^{+}_{91}/T^{+}_{187} : $(2,4)(3,5)(8,11,9,10)$
T'_{104}/T_{189} : $(2,3)(5,12,11,6)(8,9)$
T^{+}_{136}/T^{+}_{195} : $(2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
T'^{+}_{161}/T^{+}_{195} : $(10,11)$
T_{155}/T_{197} : $(2,6)(3,7)$
T'_{160}/T_{198} : $(10,11)$
T_{127}/T_{204} : $(3,6,12)(5,8,11)$
T_{148}/T_{204} : $(5,8)(7,10)(9,12)$
T^{+}_{77}/T^{+}_{210} : $(3,7)(4,12,8)(5,9)$
T_{79}/T_{211} : $(3,7)(4,12,8)(5,9)$
T'^{+}_{84}/T^{+}_{212} : $(2,6)(3,7)$
T^{+}_{173}/T^{+}_{215} : $(7,11)(8,12)$
T_{167}/T_{217} : $(6,10)(8,12)$
T'_{143}/T_{222} : $(2,3,5,6)(8,9,11,12)$
T^{+}_{166}/T^{+}_{228} : $(6,12,9)$

T'^{+}_{24}/T^{+}_{103} : $(3,6,12,9)(4,7)(8,11)$
T'^{+}_{21}/T^{+}_{106} : $(2,6,10)(3,7,11)$
T^{+}_{69}/T^{+}_{106} : $(10,11)$
T'_{30}/T_{107} : $(4,8)(5,9)(6,10)(7,11)$
T'^{+}_{37}/T^{+}_{117} : $(2,3)(6,7)(10,11)$
T^{+}_{70}/T^{+}_{117} : $(2,3)(6,7)(10,11)$
T'_{49}/T_{127} : $(4,7)(6,9)(8,11)$
T'^{+}_{70}/T^{+}_{130} : $(2,3,4,6,7,8,10,11,12)$
T'_{50}/T_{135} : $(2,6,10)(3,7,11)$
T^{+}_{109}/T^{+}_{136} : $(10,11)$
T_{111}/T_{137} : $(4,10)(5,11)$
T'^{+}_{113}/T^{+}_{138} : $(8,10,9,11)$
T'^{+}_{48}/T^{+}_{139} : $(3,9,12,6)(4,7)(8,11)$
T^{+}_{101}/T^{+}_{139} : $(4,7)(6,9)(8,11)$
T^{+}_{103}/T^{+}_{139} : $(4,10,7)(5,8,11)(6,12,9)$
T_{115}/T_{140} : $(4,10,5,11)$
T'_{49}/T_{148} : $(2,3,5,12)(6,8,9,11)$
T'^{+}_{108}/T^{+}_{161} : $(2,4)(5,11)(8,10)$
T^{+}_{109}/T^{+}_{163} : $(2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
T^{+}_{85}/T^{+}_{164} : $(3,6,12)(5,8,11)$
T^{+}_{90}/T^{+}_{164} : $(4,7,10)(6,12,9)$
T^{+}_{117}/T^{+}_{168} : $(4,12)(7,11)$
T^{+}_{117}/T^{+}_{168} : $(4,12,8)(6,10)(7,11)$
T^{+}_{130}/T^{+}_{168} : $(6,10)(8,12)$
T_{119}/T_{170} : $(4,12)(6,10)$
T'^{+}_{40}/T^{+}_{171} : $(2,6)(4,8)$
T'^{+}_{34}/T^{+}_{172} : $(2,3)(4,8)(6,7)(10,11)$
T'^{+}_{46}/T^{+}_{173} : $(3,7,11)(4,12)(6,10)$
T^{+}_{47}/T^{+}_{174} : $(3,11,7)(4,8,12)$
T'^{+}_{33}/T^{+}_{179} : $(3,10,6,12)(5,7,8,9)$
T_{93}/T_{188} : $(2,4,8,10,3,5,9,11)$
T^{+}_{132}/T^{+}_{194} : $(5,9)(6,10)(7,11)(8,12)$
T^{+}_{158}/T^{+}_{195} : $(6,10)(7,11)$
T^{+}_{163}/T^{+}_{195} : $(10,11)$
T_{159}/T_{197} : $(6,10)(7,11)$
T^{+}_{162}/T^{+}_{199} : $(10,11)$
T_{127}/T_{204} : $(3,12,6)(5,11,8)$
T_{148}/T_{204} : $(4,7)(5,11)(9,12)$
T^{+}_{172}/T^{+}_{210} : $(2,4)(6,8)(10,12)$
T_{170}/T_{211} : $(7,11)(8,12)$
T'^{+}_{171}/T^{+}_{214} : $(2,3,4)(6,7,8,10,11,12)$
T_{156}/T_{217} : $(4,12)(6,10)$
T_{169}/T_{217} : $(6,10)(8,12)$
T^{+}_{166}/T^{+}_{228} : $(6,9,12)$
T^{+}_{164}/T^{+}_{229} : $(6,9,12)$

$T^{+}_{164}/T^{+}_{229} : (6,12,9)$
$T'^{+}_{76}/T^{+}_{230} : (6,7)$
$T'_{200}/T_{235} : (10,11)$
$T^{+}_{202}/T^{+}_{236} : (10,11)$
$T_{193}/T_{240} : (2,6)(3,7)(4,8)(5,9)$
$T'_{208}/T_{240} : (4,8)(5,9)$
$T^{+}_{210}/T^{+}_{242} : (3,4)(7,8)(11,12)$
$T^{+}_{210}/T^{+}_{242} : (2,3)(6,7)(10,11)$
$T^{+}_{214}/T^{+}_{242} : (8,12)$
$T^{+}_{214}/T^{+}_{242} : (3,4)(7,8,11,12)$
$T^{+}_{214}/T^{+}_{242} : (2,3)(6,7)(8,12)(10,11)$
$T'^{+}_{216}/T^{+}_{243} : (2,4)(6,8,10,12)$
$T_{211}/T_{245} : (8,12)$
$T_{209}/T_{248} : (7,11)(8,12)$
$T^{+}_{206}/T^{+}_{252} : (6,9,12)$
$T'_{124}/T_{256} : (4,5)$
$T_{246}/T_{261} : (2,3)(6,7)(10,11)$
$T^{+}_{228}/T^{+}_{265} : (7,10)(8,11)(9,12)$
$T^{+}_{249}/T^{+}_{266} : (8,12)$
$T_{248}/T_{267} : (8,12)$
$T^{+}_{234}/T^{+}_{271} : (8,12)$
$T^{+}_{180}/T^{+}_{277} : (10,11)$
$T^{+}_{269}/T^{+}_{279} : (6,8,12,10)$
$T^{+}_{259}/T^{+}_{282} : (8,12)$
$T^{+}_{219}/T^{+}_{297} : (9,11)$
$T^{+}_{296}/T^{+}_{297} : (10,12)$

$T^{+}_{75}/T^{+}_{230} : (2,3)(6,7)(8,9)(10,11)$
$T_{177}/T_{233} : (3,4)(7,8)(11,12)$
$T_{201}/T_{235} : (10,11)$
$T'^{+}_{203}/T^{+}_{236} : (10,11)$
$T_{196}/T_{240} : (6,10)(7,11)$
$T^{+}_{210}/T^{+}_{242} : (8,12)$
$T^{+}_{210}/T^{+}_{242} : (3,4)(7,8,11,12)$
$T^{+}_{210}/T^{+}_{242} : (2,3)(6,7)(8,12)(10,11)$
$T^{+}_{214}/T^{+}_{242} : (3,4)(7,8)(11,12)$
$T^{+}_{214}/T^{+}_{242} : (2,3)(6,7)(10,11)$
$T'^{+}_{212}/T^{+}_{243} : (2,4)(6,8,10,12)$
$T^{+}_{215}/T^{+}_{244} : (8,12)$
$T_{125}/T_{248} : (3,7)(4,8)(5,9)(6,10)$
$T_{217}/T_{248} : (7,11)(8,12)$
$T^{+}_{206}/T^{+}_{252} : (6,12,9)$
$T^{+}_{123}/T^{+}_{257} : (2,3)(6,7)(8,9)(10,11)$
$T_{246}/T_{261} : (2,3,4)(6,7,8)(10,11,12)$
$T^{+}_{243}/T^{+}_{266} : (8,12)$
$T_{247}/T_{267} : (8,12)$
$T^{+}_{232}/T^{+}_{271} : (8,12)$
$T_{254}/T_{276} : (2,3)(5,6)(8,12)(9,11)$
$T^{+}_{123}/T^{+}_{279} : (2,4,6,8,12)(3,11,7,5)$
$T_{258}/T_{281} : (8,12)$
$T^{+}_{219}/T^{+}_{285} : (10,11)$
$T^{+}_{220}/T^{+}_{297} : (8,10)$
$T^{+}_{295}/T^{+}_{300} : (1,2)$