Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Themenbereich dieser Diplomarbeit wird in der Regel mit **Hilberts 12-tem Problem** in Zusammenhang gebracht. Eine Spezialfall dieses Problems ist die Frage nach Klassen von analytischen Funktionen zu einem gegebenen algebraischen Zahlkörper, deren Werte es ermöglichen, alle endlichen abelschen Erweiterungen über jenem Grundkörper zu konstruieren. Die Möglichkeiten, die durch eine solche analytische Funktion bei der Untersuchung und Konstruktion von algebraischen Erweiterungen gegeben sind, erläutere ich zunächst an einem Beispiel:

Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Nimmt man das Polynom $P(x) := x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (welches über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist), so kann man damit abstrakt eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ konstruieren:
$K := \mathbb{Q}[x]/(P(x))$, d.h. der Ring der Polynome $\mathbb{Q}[x]$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ wird faktorisiert nach dem von $P(x)$ erzeugten Hauptideal.
Nimmt man eine der Wurzeln ω von $P(x)$ in $\mathbb{C}$, so könnte man ebenfalls folgendermaßen eine Körpererweiterung $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$ gewinnen:

$$\mathcal{K} := \mathbb{Q}(\omega) \subset \mathbb{C}.$$

Die Wurzeln von $P(x)$ in $\mathbb{C}$ lassen sich durch eine besondere analytische Funktion beschreiben, die Exponentialfunktion $\mathbf{exp} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

$$P(x)(x-1) = x^5 - 1 \Rightarrow \omega^5 = 1.$$

Die Funktion **exp** ist eine periodische Funktion:

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z).$$

$2\pi i$ ist bereits ihre kleinste Periode, mit anderen Worten: Alle Werte der Form $\omega_n := \exp(2\pi i \frac{n}{5})$ sind für $0 \leq n < 5$ paarweise verschieden. Es gilt:

$$(\omega_n)^5 = \exp(2\pi i 5 \frac{n}{5}) = \exp(2\pi i) = \exp(0) = 1.$$

Also lösen die 5 verschiedenen Werte ω_n die Gleichung $x^5 - 1 = 0$, und das Polynom faktorisiert zu

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_4) \Rightarrow P(x) = (x-\omega_1)\cdots(x-\omega_4)$$

Man hat nun bereits mehrfach von den analytischen Eigenschaften der Funktion **exp** Gebrauch gemacht, um z.B. die Wurzeln in $\mathbb{C}$ von $P(x)$ zu bestimmen.
Man kann mit ihrer Hilfe aber noch weitere Eigenschaften der Körpererweiterung $\mathcal{K}$ ableiten:

Jede der komplexen Wurzeln von $P(x)$ ist in $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\omega_n)$, und zwar unabhängig von der gewählten Wurzel ω_n, $n \not\equiv 0 \mod 5$. Denn

$$(\omega_n)^k = \exp(2\pi i \frac{nk}{5}) \stackrel{!}{=} \exp(2\pi \frac{1}{5}) = \omega_1$$

wird gelöst durch diejenige Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die gilt:

$$kn \equiv 1 \mod 5.$$

Die Lösbarkeit der zweiten Gleichung ist ein Ergebnis der elementaren Zahlentheorie, aber die Umwandlung des ersten Problems in das zweite ist wieder wegen der analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion möglich.

Man hat jetzt also die Funktion **exp** dazu benutzt zu zeigen, daß der Körper $\mathcal{K}$ normal über $\mathbb{Q}$ ist. Man kann mit ihr nun sogar zeigen, daß die Galoisgruppe $\mathcal{G}(\mathcal{K}/\mathbb{Q})$ zyklisch, insbesondere also abelsch ist: Jeder Automorphismus aus $\mathcal{G}$ ist durch seine Wirkung auf die Nullstellen von $P(x)$ gegeben. Man definiert:

$$\tau_k : \omega_1 \longrightarrow (\omega_1)^k \text{ mit } k \in \{1 \ldots 4\}$$

Da sich jede Zahl in $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$ eindeutig als $\sum_{j=0}^{4} r_j^{(t)} (\omega_t)^j$ schreiben läßt (mit $r_j^{(t)} \in \mathbb{Q}$ und $1 \leq t \leq 4$), hat man eine wohldefinierte bijektive Fortsetzung von τ_k auf ganz $\mathcal{K}$:

$$\tau_k : \sum_{j=0}^{4} r_j^{(1)} (\omega_1)^j \longrightarrow \sum_{j=0}^{4} r_j^{(1)} (\omega_k)^j$$

Indem man schreibt $(\omega_1)^k = \omega_k$, hat man wieder Eigenschaften der analytischen Funktion **exp** benutzt. Diese Abbildung τ_k ist dann ein Automorphismus aus $\mathcal{G}$. Man hat so 4 verschiedene Automorphismen τ_k, d.h. bereits die ganze Gruppe

$\mathcal{G}(K/\mathbb{Q})$. Die schon verwendeten Eigenschaften der Funktion **exp** lassen sich nun ausnutzen, um zu zeigen, daß $\mathcal{G}(\mathcal{K}/\mathbb{Q})$ isomorph zur multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$, folglich zyklisch ist.

Man kann sich nun fragen, ob man algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, die galoissch mit einer abelschen Galoisgruppe sind, allgemein durch solche analytische Funktionen beschreiben und untersuchen kann.
Ein klassisches Resultat in dieser Richtung ist der Satz von **Kronecker-Weber**. [16, S.340] Er besagt, daß jede abelsche Erweiterung $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$ in einem Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{n}))$ mit $n \in \mathbb{N}$ enthalten ist.

Angenommen man weiß nun, daß der Körper $\mathcal{K}$ durch die komplexe Zahl $\exp(\frac{2\pi i}{5})$ gegeben ist: $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{5})$. Die Eigenschaften der Funktion **exp** erlauben es zu sagen, daß die verschiedenen Konjugierten von $\exp(\frac{2\pi i}{5})$ genau $\exp(\frac{2\pi i}{5}), \ldots \exp(\frac{2\pi i 4}{5})$ sind. Man möchte nun den Körper $\mathcal{K}$ abstrakt, d.h. durch ein erzeugendes Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}(x)$ bestimmen. Bekannt ist auch, daß die Zahl $\exp(\frac{2\pi i}{5})$ eine ganze algebraische Zahl ist. Nun kann man folgendermaßen vorgehen:

Man berechnet die Zahlen $\widetilde{\omega}_n \approx \exp(\frac{2\pi i n}{5})$ näherungsweise numerisch in $\mathbb{C}$. Das Polynom $P(x)$ hat die Gestalt:

$$P(x) = (x - \omega_1) \cdots (x - \omega_4)$$

Beim Ausmultiplizieren erhält man als Koeffizienten des Polynoms
$P(x) = x^4 + \ldots + a_0$ ganze algebraische Zahlen aus $\mathcal{K}$, die invariant unter den Automorphismen von $\mathcal{G}(\mathcal{K}/\mathbb{Q})$, also Zahlen aus $\mathbb{Z}$ sind.
Also hat man die Koeffizienten

$$a_3 \approx -(\widetilde{\omega}_1 + \ldots \widetilde{\omega}_4), a_2 \approx \sum_{0<k<j<5} \widetilde{\omega}_k \widetilde{\omega}_j, \ldots , a_0 \approx \prod_{k=1}^{4} \widetilde{\omega}_k$$

als die diesen komplexen Approximationen nächstgelegene Zahl aus $\mathbb{Z}$, wenn nur das Verfahren zur Berechnung von **exp** gut genug ist.

Für beliebige **algebraische Zahlkörper** k als Grundkörper stellt man sich wieder die Frage, ob es analytische Funktionen gibt, die dasselbe leisten, wie die Exponentialfunktion für $\mathbb{Q}$: Ist es möglich, die endlichen abelschen Erweiterungen eines algebraischen Zahlkörpers k mit Funktionswerten einer analytischen Funktion zu erzeugen, d.h. theoretisch deren Eigenschaften mit Hilfe jener Funktion zu untersuchen und auch ein erzeugendes Polynom mit Koeffizienten in k zu berechnen?

Für spezielle Klassen von Grundkörpern ist dieses Problem bereits gelöst, so z.B. für die imaginärquadratischen Grundkörper durch die Theorie der Modulfunktionen. Dies wird aber in dieser Arbeit nicht besprochen.

Einen völlig neuer Zugang zu diesem alten Problem ist die **Hypothese** von Harold M. **Stark** über die Werte der Ableitungen der **Heckeschen L-Funktionen** an der Stelle $s = 0$, bzw. über die Ableitungen der partiellen Zetafunktionen: $\zeta'_S(0, \mathfrak{a})$. [21] ($\mathfrak{a}$ ist ein Ideal aus k).

Die Hypothese von Stark besagt für total reelle algebraische Zahlkörper k, daß

$$\varepsilon := \exp(-2\zeta'_S(0, \mathfrak{a}))$$

eine algebraische Zahl (sogar eine Einheit: die **Starkeinheit**) ist, welche eine abelsche Erweiterung von k erzeugt.
Hatte man vorher beim Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\exp(\frac{2\pi i}{5}))$ eine Menge von Repräsentanten n der Gruppe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ durchlaufen, um so alle Konjugierten von $\exp(\frac{2\pi i}{5})$ als $\exp(\frac{2\pi i n}{5})$ zu erhalten, so durchläuft $\mathfrak{a}$ nun eine Menge von Repräsentanten einer endlichen Faktorgruppe $I^{(\mathfrak{m})}/U^{\mathfrak{m}}$ und man erhält so alle Konjugierten von ε über k. ($\mathfrak{m}$ heißt Erklärungsmodul: S. 19)
Dabei ist $I^{(\mathfrak{m})}$ die Gruppe derjenigen gebrochenen Ideale von k, welche zu $\mathfrak{m}$ prim sind. $U^{\mathfrak{m}}$ ist eine Untergruppe dieser Gruppe, deren gezielte Bestimmung es ermöglicht, sehr präzise für gewünschte Körpererweiterungen ein primitives Element aus jener Starkeinheit ε zu errechnen.

Die Theorie der Heckeschen L-Funktionen ist naturgemäß schwieriger als die der Exponentialfunktion. Der größere Teil dieser Arbeit beschäftigt sich damit. Zwar ist es möglich die Werte der betreffenden Funktionen effektiv zu berechnen, aber die Entwicklung ihrer Theorie ist noch nicht soweit entwickelt, als daß man auch nur die Starksche Hypothese allgemein hätte beweisen können. Insbesondere basieren alle durch sie nun möglich gewordenen Berechnungen von endlichen abelschen Erweiterungen total reeller algebraischer Zahlkörper auf einer bisher noch unbewiesenen Hypothese. Dies macht aber gerade jede Berechnung in dieser Richtung interessant, da sie wenigsten eine Verifikation für diese Fälle ermöglicht, wo die Theorie noch nicht hinreicht.

Ich werde in dieser Arbeit einen Weg beschreiben, der es ermöglicht, den **Hilbertschen Klassenkörper** eines total reellen algebraischen Zahlkörpers zu bestimmen um dann das Ergebnis mit anderen Methoden zu überprüfen [22, S.98]. Die Konstruktion eines Hilbertschen Klassenkörpers wurde bereits von Stark benutzt, um numerisch seine Hypothese zu überprüfen [21]. Das Verfahren wurde

neuerdings von Roblot algorithmisch ausgearbeitet [20, 2].
Dummit, Sands und Tangedal haben ihrerseits **Starkeinheiten** über total reellen Zahlkörpern berechnet. Die hierfür entwickelten Methoden unterscheiden sich kaum von dem, was man in Bordeaux [24] benutzt [3]. Unter anderem geht auch ihr numerisches Verfahren zur Berechnung partieller ζ-Funktionen auf Friedman [6] zurück.

In den Kapiteln I bis III gebe ich grundlegende Definitionen und Sätze der algebraischen Zahlentheorie, der Klassenkörpertheorie und der analytischen Zahlentheorie wieder. In Kapitel III.3 wird die Starksche Hypothese über abelsche Artinsche L-Reihen erläutert. Insbesondere wird erläutert, warum sie sich nicht zur Berechnung von endlichen abelschen Erweiterungen eines Grundkörpers mit mehr als einer komplexen Stelle benutzen läßt (S. 31).

Kapitel IV beschäftigt sich mit der numerischen Berechnung von L-Reihen. Darin wird ein Verfahren, welches auf eine Formel von Friedman [6] zurückgeht, erläutert. Diesem von Tollis einerseits und Dummit, Sands und Tangedal andererseits benutzten Verfahren wird dabei eine neue Methode gegenübergestellt. Insbesondere wird dargestellt, wie man die in der Formel von Friedman benötigte Artinsche Wurzelzahl effekiver als in den bisher dazu veröffentlichten Arbeiten [2] berechnen kann. Man findet in diesem Kapitel einen neuen Beweis der Formel von Friedman, welcher im wesentlichen die Mellintransformation als Hilfsmittel benutzt.

Kapitel V erläutert dann, wie man die Starksche Hypothese nutzt, den Hilbertschen Klassenkörper eines total reellen algebraischen Zahlkörpers zu bestimmen, dessen Konstruktion bereits der von Stark [21] benutzte Zwischenschritt war, um seine Hypothese numerisch zu verifizieren.

KAPITEL I

Grundlegende Definitionen und Bezeichnungen

Die in diesem Kapitel vorgestellten Begriffe und Aussagen der Algebra und algebraischen Zahlentheorie findet man ausführlich in den Büchern von Meyberg, Marcus und Pohst [15, 14, 18].

Sei $\alpha \neq 0$ ein Element eines kommutativen Ringes mit Eins R. Dann bezeichnet $\boldsymbol{(\alpha)} := \alpha R$ das von α erzeugte Hauptideal.
In dieser Arbeit wird das Nullideal grundsätzlich aus den Betrachtungen herausgenommen; Ideale sind hier also immer ungleich dem Nullideal.
Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt algebraische Zahl, wenn es ein Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gibt ($\mathbb{Q}[x]$ ist der Ring der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$), so daß gilt: $P(\alpha) = 0$. Dann läßt sich insbesondere eindeutig ein normiertes Polynom minimalen Grades mit dieser Eigenschaft bestimmen, das Minimalpolynom von α. O.B.d.A. sei von nun an $P(x)$ bereits dieses Minimalpolynom.
$P(x)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$. Insbesondere ist $P(x)$ dann auch separabel: Wenn n der Grad von P ist, so gibt es genau n verschiedene Nullstellen α_j, $1 \leq j \leq n$. Diese heißen die konjugierten Nullstellen von α.
Da $P(x)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ ist, ist der Quotientenring $k := \mathbb{Q}[x]/(P(x))$ ein Körper: ein algebraischer Zahlkörper.
Dieser abstrakt definierte Körper ist kanonisch isomorph zu seinen Bildern $k_j := \mathbb{Q}(\alpha_j)$: Die Isomorphismen $\nu_j : k \longrightarrow k_j$ mit $\nu_j(f + (P(x))) := f(\alpha_j)$ ($f \in \mathbb{Q}[x]$) heißen die reellen bzw. komplexen Einbettungen von k nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Eine Einbettung ν_j ist also genau dann reell, wenn die Zahl α_j reell ist. Andernfalls ist sie komplex.
Da der Körper $\mathbb{Q}$ reell ist, besitzt das Polynom $P(x)$ immer paarweise komplex konjugierte Nullstellen $\alpha_{j'} = \bar{\alpha}_j$. Die diesen Nullstellen entsprechenden Einbettungen $\nu_{j'}$ und ν_j sind dann ebenfalls komplex konjugiert: Es gilt $\nu_{j'}(y) = \overline{\nu_j(y)}$

für alle $y \in k$. Besitzt $P(x)$ überhaupt keine komplexen Nullstellen, so heißt k total reell.
α ist genau dann eine ganze algebraische Zahl, wenn $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ist. Die Menge derjenigen ganzen algebraischen Zahlen, die in k_j enthalten sind, bilden einen Ring. Die isomorphen Bilder dieser Menge in k_j bzw. das isomorphe Bild dieses Ringes in k heißt der Ring der ganzen algebraischen Zahlen von k, und wird mit $\boldsymbol{\mathcal{O}_k}$ bezeichnet.
$\mathcal{O}_k$ ist ein Dedekindring, d.h. jedes Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_k$ besitzt eine eindeutige Faktorisierung in Primideale $\mathfrak{p}_m \subset \mathcal{O}_k$ bezüglich der üblichen Multiplikation von Idealen [15, S.115]. Die Menge der Primideale von $\mathcal{O}_k$ sei mit $\mathbb{P}_k$ bezeichnet. Ideale werden grundsätzlich als vom Nullideal verschieden angesehen.
Erweitert man die Menge aller Ideale durch gebrochene Ideale $\mathcal{J}$ der Form $\frac{1}{\alpha}\mathcal{I}$ $(\alpha \neq 0, \alpha \in \mathcal{O}_k)$, so erhält man die Gruppe der gebrochenen Ideale von $\mathcal{O}_k$.

Unter einer Stelle ν von k verstehe man die Äquivalenzklasse der Einbettungen γ von k in einen lokal kompakten Körper $\mathcal{K}$. Dabei wird vorrausgesetzt, daß $\gamma(k)$ topologisch dicht in $\mathcal{K}$ liegt. Äquivalent sind zwei Einbettungen $\gamma_1 : k \longrightarrow \mathcal{K}$ und $\gamma_2 : k \longrightarrow \mathcal{K}$ genau dann, wenn es einen topologischen Isomorphismus $\tau : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ gibt, so daß $\tau \circ \gamma_1 = \gamma_2$ gilt. [25, S.44] Zwei als lokal kompakte Körper isomorphe Körper $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ werden dabei als gleich aufgefaßt.
Wendet man dies auf die lokal kompakten Körper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ an, so ergibt sich, daß die reellen Stellen bzw. komplexen Stellen aus genau einem bzw. zwei Elementen bestehen. Die komplexen und reellen Stellen heißen die unendlichen Stellen.
Alle anderen Stellen, d.h. die endlichen Stellen eines algebraischen Zahlkörpers k, sind bijektiv der Menge $\mathbb{P}_k$ zugeordnet, sie lassen sich also eindeutig mit Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_k$ identifizieren.

Eine Zahl $\eta \in \mathcal{O}_k$ heißt Einheit in $\mathcal{O}_k$, wenn auch $\eta^{-1} \in \mathcal{O}_k$ ist. Die Einheiten von $\mathcal{O}_k$ bilden eine (multiplikative) abelsche Gruppe $U(k)$, welche sich schreiben läßt als direktes Produkt einer endlichen Gruppe von Einheitswurzeln und einer freien abelschen Gruppe vom endlichen Rang r. Dabei ist $r+1$ die Anzahl der unendlichen Stellen des Körpers k.
Sei S eine endliche Menge von Primidealen. Eine S-Einheit ist eine algebraische Zahl $\alpha \neq 0$ aus k mit einer Faktorisierung $(\alpha) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{a_\mathfrak{p}}$. $(a_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z})$
Der Regulator $\boldsymbol{R_k}$ von k ist definiert als der Betrag der Determinanten der Matrix $(\log(|\nu_j(u_l)|^{e_j})_{j,l}$. Hierbei durchläuft ν_j ein System von Repräsentanten aller unendlichen Stellen von k bis auf eine frei wählbare Ausnahme-Stelle.
$\{u_l \mid 1 \leq l \leq r\}$ ist irgendein System von Fundamentaleinheiten von $U(k)$, e_j ist die Anzahl der Repräsentanten der betreffenden unendlichen Stelle.

Man identifiziert $\mathcal{O}_k$ auf folgendem Wege mit einem Gitter im $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha \in \mathcal{O}_k \longrightarrow \nu_j(\alpha)$$

für die reellen Einbettungen. Für genau eine der paarweise komplex konjugierten Einbettungen ν_j definiert man:

$$\alpha \in \mathcal{O}_k \longrightarrow \sqrt{2}\ \mathrm{Re}(\nu_j(\alpha))$$

und

$$\alpha \in \mathcal{O}_k \longrightarrow \sqrt{2}\ \mathrm{Im}(\nu_j(\alpha))$$

Dadurch erhält man n verschiedene Koordinatenabbildungen, also einen Vektor im $\mathbb{R}^n$. Das kanonische euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ ergibt dann für die Bilder der algebraischen Zahl α und β: $\sum_{j=1}^{n} \nu_j(\alpha)\overline{\nu_j(\beta))}$.
Damit ist die kanonische euklidische quadratische Norm des Bildes von $\alpha \in k$ gerade die T_2-Norm: $T_2(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} |\nu_j(\alpha)|^2$.

Durch das Hinzufügen einer algebraischen Zahl $\beta_i \in \mathbb{C}$ zu einem der konjugierten Körper $k_j \subset \mathbb{C}$ erhält man eine endliche algebraische Erweiterung $K := k_j(\beta_i)$ des Körpers k_j. β_i ist Nullstelle eines Minimalpolynoms $m_{j,\beta}$ mit Koeffizienten aus k_j.
K/k_j ist insbesondere eine <u>normale Erweiterung</u>, wenn alle (paarweise verschiedenen) Nullstellen von $m_{j,\beta}$ in K enthalten sind. Bezeichnet man diese Nullstellen mit $\beta_1, \ldots, \beta_s$, wobei s der Grad des Polynoms $m_{j,\beta}$ ist, so erhält man durch die Fortsetzung der s verschiedenen Abbildungen $\beta_1 \longrightarrow \beta_j$ $(1 \leq j \leq s)$ auf ganz K s verschiedene Automorphismen von K, die k_j punktweise festhalten. Diese sind dann alle Automorphismen von K/k_j, die k_j punktweise festhalten. Sie bilden eine Gruppe.
Dieselbe Konstruktion läßt sich abstrakt wiederholen: $m_{j,\beta}$ ist ein Polynom mit Koeffizienten im Körper k_j, also entspricht ihm ein Polynom mit Koeffizienten in k. Dieses ist als Bild eines Minimalpolynoms unter dem Isomorphismus $\nu_j^{-1} : k_j \longrightarrow k$ irreduzibel. Dieses Polynom sei mit $m(t)$ bezeichnet. Faktorisiert man dann den Polynomring $k[t]$ nach dem Ideal $(m(t))$, so entsteht also wieder ein Körper, welcher dem Körper K isomorph ist.
Der Körper K, bzw. seine isomorphen Bilder sind wieder algebraische Zahlkörper. Alle bisher dargestellten Begriffe sind also anwendbar. Die Gruppe der Automorphismen von K/k heißt die Galoisgruppe von K/k und wird bezeichnet mit $\mathcal{G}(K/k)$.

Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$ lassen sich zu einem Ideal von $\mathcal{O}_K$ erweitern und dann in $\mathcal{O}_K$ eindeutig in Primideale $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$ faktorisieren:
$\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \prod_{j=1}^{s} \mathfrak{P}_j^{e_j}$.
Dann ist $e(\mathfrak{P}_j/\mathfrak{p}) := e_j$ der Verzweigungsindex des Ideals $\mathfrak{P}_j$ über $\mathfrak{p}$.
Der Trägheitsindex ist $f(\mathfrak{P}_j/\mathfrak{p}) := [\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}_j : \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}]$, d.h. die Dimension des Körpers $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}_j$ als Vektorraum mit dem Skalarkörper $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$.

Eine endliche Stelle von K heißt dann verzweigt über k, wenn für das sie repräsentierende Primideal gilt: $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_k) > 1$. Dabei ist $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_k$ offensichtlich ein Primideal aus $\mathcal{O}_k$.
Eine endliche Stelle von k, eindeutig repräsentiert durch ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$, verzweigt genau dann in K, wenn für eines der Ideale $\mathfrak{P}_j$ (und wenn K/k normal, für alle) gilt: $e(\mathfrak{P}_j/\mathfrak{p}) > 1$.

Eine unendliche Stelle aus k verzweigt genau dann in K, wenn sie durch eine reelle Einbettung repräsentiert wird, wovon eine Fortsetzung auf K (und wenn K/k normal ist, dann alle) eine komplexe Einbettung ist.

Eine endliche Stelle von k ist voll zerlegt in K, wenn das sie repräsentierende Ideal voll zerlegt ist: $f(\mathfrak{P}_j/\mathfrak{p}) = 1$ und $e(\mathfrak{P}_j/\mathfrak{p}) = 1$, d.h. $\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{P}_j$ mit $n = [K : k]$ verschiedenen Primidealen $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$.

Eine unendliche Stelle von k heißt voll zerlegt in K, wenn die sie repräsentierende Einbettung nicht verzweigt, d.h. wenn genau $[K : k]$ verschiedene Fortsetzungen in K existieren.

Sei $\alpha \in \mathcal{O}_k$. Die Spur von α ist: $\mathrm{T}r(\alpha) := \sum_{j=1}^{n} \nu_j(\alpha)$.
Die Relativspur ist: $\mathrm{T}r_{K/k}(\alpha) := \sum_{w \in \mathcal{G}(K/k)} w(\alpha)$.
Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_k$ ein ganzes Ideal. Seine Norm ist: $N(\mathcal{I}) := \#\mathcal{O}_k/\mathcal{I}$.
Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_K$ ein ganzes Ideal, $\mathcal{I} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_K} \mathfrak{p}^{a_\mathfrak{p}}$.
Dann ist die Relativnorm: $N_{K/k}(\mathcal{I}) := \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_K} \mathfrak{q}^{f(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})a_\mathfrak{p}}$, wobei jeweils $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_k$.
Die Diskriminante D_k von k ist die Determinante der Matrix $(\mathrm{T}r(\omega_i\omega_j))_{i,j=1}^{n}$, wobei $\{\omega_j \mid 1 \le j \le n\}$ eine Ganzheitsbasis ($\mathbb{Z}$-Basis) von $\mathcal{O}_k$ ist.
Die Differente $\mathcal{D}_{K/k}$ ist: $\{x \in K \mid \mathrm{T}r_{K/k}(x\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_k\}^{-1}$. Die Invertierung bezieht sich auf $\{x \in K \mid \mathrm{T}r_{K/k}(x\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_k\}$ als gebrochenes Ideal von $\mathcal{O}_K$. $\mathcal{D}_{K/k} \subset \mathcal{O}_K$ ist dann wieder ein ganzes Ideal.

Die Relativdiskriminante ist: $D_{K/k} := N_{K/k}(\mathcal{D}_{K/k})$.

Ist w repräsentierende Einbettung einer unendlichen Stelle von k, so ist $|\alpha|_w := |w(\alpha)|^e$. e ist dabei 1 für reelle und 2 für komplexe Stellen. Bei paarweise komplex konjugierten Einbettungen ergibt sich so genau derselbe Wert, so daß $|\alpha|_w$ eine Zahl ist, welche nur von der Stelle abhängt.
Für eine endliche Stelle, repräsentiert durch das Ideal $\mathfrak{p}$, und $x \in k$ ist $|x|_{\mathfrak{p}} := N(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}((x))}$. Dabei ist $v_{\mathfrak{p}}((x)) \in \mathbb{Z}$ der Exponent in der Faktorisierung des Hauptideales $(x) = \prod\limits_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}((x))}$.
Ist K/k eine endliche algebraische Körpererweiterung, so soll $w'|w$ heißen, daß die Einbettung w' von K nach $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ die Einbettung w von k fortsetzt. Für Stellen sei dieselbe Bezeichnung dann definiert über die sie repräsentierenden Einbettungen.

KAPITEL II

Klassenkörpertheorie

Dieses Kapitel stellt die in dieser Arbeit benötigten Sätze und Begriffe der Klassenkörpertheorie in ihrer idealtheoretischen Fassung bereit. Dabei wird für die Beweise bzw. eine ausführliche Darstellung auf die Bücher von Hasse [8] oder Neukirch [16] verwiesen.

1. Die Frobeniusabbildung und die Artinabbildung

Sei K/k eine normale algebraische Körpererweiterung mit Galoisgruppe $\mathcal{G} := \mathcal{G}(K/k)$, k algebraischer Zahlkörper. $\mathcal{O}_K$ ist der Ring der ganzen algebraischen Zahlen von K, $\mathcal{O}_k$ der Ring der ganzen algebraischen Zahlen von k. [14]

Definition 1.
Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k und $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K, wobei $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ gilt.

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{D}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in \mathcal{G} \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\} \text{ heißt dann } \underline{\textit{Zerlegungsgruppe}} \text{ von } \mathfrak{P}.$$

$$\mathfrak{I} := \mathfrak{I}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) := \{\sigma \in \mathcal{G} \mid \forall \alpha \in \mathcal{O}_K : \sigma(\alpha) \equiv \alpha \mod \mathfrak{P}\} \text{ heißt } \underline{\textit{Trägheitsgruppe}} \text{ von } \mathfrak{P}$$

Es bezeichne $\overline{k}_\mathfrak{p}$ den Körper $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$ und $\overline{K}_\mathfrak{P}$ den Körper $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$. Dabei betrachte man den Körper $\overline{k}_\mathfrak{p}$ als kanonisch in den Körper $\overline{K}_\mathfrak{P}$ eingebettet. $\overline{\mathcal{G}} := \overline{\mathcal{G}}(\overline{K}_\mathfrak{P}/\overline{k}_\mathfrak{p})$ bezeichne die Galoisgruppe von $\overline{K}_\mathfrak{P}/\overline{k}_\mathfrak{p}$. $\overline{\sigma}$ bezeichne denjenigen Automorphismus aus $\overline{\mathcal{G}}$, der durch folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\overline{\sigma} : \alpha + \mathfrak{P} \longmapsto \sigma(\alpha) + \mathfrak{P}, \ \alpha \in \mathcal{O}_K, \sigma \in \mathfrak{D}$$

Satz 2.
Die Abbildung $\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von* $\mathfrak{D}$ *nach* $\overline{\mathcal{G}}$ *mit dem Kern* $\mathfrak{I}$. *Sie induziert also einen Isomorphismus von* $\mathfrak{D}/\mathfrak{I}$ *auf* $\overline{\mathcal{G}}$.

Falls also $\#\mathfrak{I} = 1$ gilt, d.h. genau dann wenn $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ unverzweigt ist, so ist $\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{D}$ nach $\overline{\mathcal{G}}$. Die Gruppe $\overline{\mathcal{G}}$ ist aber zyklisch und wird erzeugt von $\alpha + \mathfrak{P} \longmapsto \alpha^{N(\mathfrak{p})} + \mathfrak{P}$. Das Urbild dieses Automorphismus ist dann der Frobeniusautomorphimus zu $\mathfrak{P}$.

Definition 3. *(Frobeniusautomorphismus)*
Falls $\mathfrak{p}$ *in* K *nicht verzweigt, so heißt der durch*

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^{N(\mathfrak{p})} \ mod\ \mathfrak{P}, \ \alpha \in \mathcal{O}_K$$

eindeutig definierte Automorphismus $\sigma \in \mathfrak{D} \subset \mathcal{G}$ *der Frobeniusautomorphismus.*

Ist nun $\mathfrak{P}_1$ eine anderes Primideal, welches $\mathfrak{p}$ teilt, so existiert ein Automorphismus $\tau \in \mathcal{G}$, so daß $\tau(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_1$ gilt. Man erhält also für die dazugehörige Zerlegungsgruppe: $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{p}) = \tau\mathfrak{D}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})\tau^{-1}$.

Ist $\mathcal{G}$ abelsch, dann gilt sogar: $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{p}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Der Frobeniusautomorphismus hängt dann nur von $\mathfrak{p}$ ab: Es existiert eine Abbildung $\mathfrak{p} \longmapsto \sigma_{\mathfrak{p}}$, wobei $\mathfrak{p}$ aus der Menge aller Primideale von $\mathcal{O}_k$ ist, welche in K unverzweigt sind, und $\sigma_{\mathfrak{p}}$ aus $\mathcal{G}$ ist. Diese Abbildung läßt sich auf alle Ideale fortsetzen, welche zur Relativdiskriminante von K/k teilerfremd sind.

Definition 4. *(Artinabbildung)*
Sei $\mathcal{I}$ *ein Ideal von* $\mathcal{O}_k$. *Es gelte* $\operatorname{ggT}(\mathcal{I}, D_{K/k}) = \mathcal{O}_k$. $\mathcal{G}$ *sei abelsch.* $D_{K/k}$ *ist die Relativdiskriminante von* K/k *und* $\nu_{\mathfrak{q}}(\mathcal{I})$ *der Exponent von* $\mathfrak{q}$ *in der Faktorisierung von* $\mathcal{I}$ *in* $\mathcal{O}_k$: $\mathcal{I} = \prod_{\mathfrak{q}\in\mathbb{P}_k} \mathfrak{q}^{\nu_{\mathfrak{q}}(I)}$.
Dann ist die Artinabbildung gegeben durch

$$\mathcal{I} \longmapsto \sigma_{\mathcal{I}} := \prod_{\mathfrak{q}\in\mathbb{P}_k} {\sigma_{\mathfrak{q}}}^{\nu_{\mathfrak{q}}(\mathcal{I})}.$$

Die traditionelle Bezeichnung für das Bild dieser Abbildung ist:

$$(K/k, \mathcal{I}),$$

d.h.: $(K/k, \mathcal{I}) := \sigma_{\mathcal{I}}$. *In dieser Schreibweise werden die Körper benannt, auf die man sich bezieht.*

Direkt aus der Definition ergibt sich, daß die Artinabbildung ein Homomorphismus von der Gruppe der zu $D_{K/k}$ primen Ideale nach $\mathcal{G}$ ist.

2. Idealgruppen

Die nachfolgenden Definitionen und Sätze findet man ausführlich in Hasses "Vorlesungen über Klassenkörpertheorie". [8]
Bekanntlich ist die Untergruppe der gebrochenen Hauptideale eines algebraischen Zahlkörpers von endlichem Index in der Gruppe der Ideale. Dieser Index heißt die Klassenzahl: $h_k := \#I/H < \infty$. H bezeichnet die Gruppe der gebrochenen Hauptideale, I die Gruppe der gebrochenen Ideale von k.

Für die Zwecke der Klassenkörpertheorie (und auch dieser Arbeit, obwohl nur der Hilbertsche Klassenkörper berechnet werden soll) ist die Klasseneinteilung, welche durch H in der Untergruppe der gebrochenen Ideale vermittelt wird, nicht fein genug. Die Verfeinerung wird folgendermaßen erreicht:

Definition 5. *(Multiplikative Kongruenz)*

- $\alpha \in k^* := k \setminus \{0\}$ *heißt positiv bei* ν_i, *falls* $\nu_i(\alpha) > 0$ *gilt.* ν_i *bezeichnet dabei eine der reellen Einbettungen des algebraischen Zahlkörpers* k *nach* $\mathbb{R}$.
$$\alpha \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{p}_\infty^{(\nu_i)}$$
ist dann nur eine andere Schreibweise für diesen Sachverhalt.
$$\alpha \equiv \beta \mod {}^*\mathfrak{p}_\infty^{(\nu_i)} \text{ bedeutet } \frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{p}_\infty^{(\nu_i)},$$
d.h. $\nu_i(\alpha)$ *und* $\nu_i(\beta)$ *haben beide die gleichen Vorzeichen in* $\mathbb{R}$ $(\alpha, \beta \in k^*)$.
- $\mathfrak{m}_0$ *sei ein ganzes Ideal. Es gelte:* (α) *und* (β) *sind teilerfremd zu* $\mathfrak{m}_0$. $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_k \setminus \{0\}$.
Dann sei $\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{m}_0$ *bzw.* $\alpha \equiv \beta \mod {}^*\mathfrak{m}_0$ *durch* $\alpha - \beta \in \mathfrak{m}_0$ *erklärt.*
Für $\delta \in k^*$ *gilt genau dann* $\delta \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{m}_0$, *wenn* $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$, *wobei* α *und* β *obigen Anforderungen genügen.*
Ebenso gilt für $\alpha, \beta \in k^*$ *dann* $\alpha \equiv \beta \mod {}^*\mathfrak{m}_0$, *wenn für* $\delta := \frac{\alpha}{\beta}$
$\delta \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{m}_0$ *gilt.*
- *Ist* $\nu_1 \ldots \nu_m$ *eine Menge reeller Einbettungen,* $\mathfrak{m}_\infty$ *ein formales Produkt der Form*
$$\mathfrak{m}_\infty := \prod_{i=1}^{m} \nu_i,$$
$\mathfrak{m}_0$ *ein ganzes Ideal in* $\mathcal{O}_k$, *formal* $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_\infty$ *und* $\alpha, \beta \in k^*$, *sowie* $(\alpha), (\beta)$ *teilerfremd zu* $\mathfrak{m}_0$,

so bedeutet

$$\alpha \equiv \beta \mod {}^*\mathfrak{m} : \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{p}_\infty^{(\nu_i)} & \textit{für } i = 1 \dots m \\ \alpha \equiv \beta \mod {}^*\mathfrak{m}_0 \end{cases}$$

Betrachtet man nun die Menge aller algebraischen Zahlen $\gamma \in k$, so lassen sich diese immer darstellen als Brüche der Form $\frac{\alpha}{\beta}$ mit $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_k$. Die Menge derjenigen algebraischen Zahlen, die sich als Brüche von zwei zu $\mathfrak{m}_0$ teilerfremden Zahlen darstellen lassen, ist eine multiplikative Teilgruppe von k^*, welche durch die Forderung $\gamma \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{m}$ weiter verfeinert wird.

Definition 6. *(Strahl)*
Sei $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_\infty$ *mit einem ganzen Ideal* $\mathfrak{m}_0$ *von* k *und* $\mathfrak{m}_\infty := \prod_{i=1}^{m} \nu_i$. *Die Gruppe der Hauptideale* (α) *mit* $\alpha \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{m}$*,* (α) *teilerfremd zu* $\mathfrak{m}_0$*, heißt der Strahl* $H_\mathfrak{m}$ *modulo* $\mathfrak{m}$.
Es seien $\mathcal{I}$ *und* $\mathcal{J}$ *Ideale. Für diese gelte:* $\mathrm{ggT}(\mathcal{I}, \mathfrak{m}_0) = \mathrm{ggT}(\mathcal{J}, \mathfrak{m}_0) = \mathcal{O}_k$.

$$\mathcal{I} \equiv \mathcal{J} \mod \mathfrak{m} \textit{ oder } \mathcal{I} \equiv \mathcal{J} \mod H_\mathfrak{m}$$

heißt dann, daß $\mathcal{I}\mathcal{J}^{-1} \in H_\mathfrak{m}$.

Es bezeichne $I_k^{(\mathfrak{m})}$ die Gruppe der zu $\mathfrak{m}_0$ teilerfremden gebrochenen Ideale von k. Dann gilt der

Satz 7.
Es ist $\# I^{(\mathfrak{m})}/H_\mathfrak{m} < \infty$*, d.h. die durch den Strahl* $H_\mathfrak{m}$ *gelieferte Klasseneinteilung verfeinert die Klasseneinteilung von* I *durch* H *(welche der Klasseneinteilung von* $I^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ *entspricht:* $I^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} \cong I/H$. $H^{(\mathfrak{m})}$ *bezeichne die Gruppe der zu* $\mathfrak{m}_0$ *teilerfremden gebrochenen Hauptideale aus* k.*)*

Man betrachtet nun Untergruppen $U^\mathfrak{m}$ von $I_k^{(\mathfrak{m})}$, welche ihrerseits den Strahl $H_\mathfrak{m}$ enthalten:

$$I_k^{(\mathfrak{m})} \geq U^\mathfrak{m} \geq H_\mathfrak{m}$$

$I_k^{(\mathfrak{m})}/U^\mathfrak{m}$ liefert eine Klasseneinteilung der zu $\mathfrak{m}_0$ primen Ideale, welche offensichtlich gröber ist, als die durch den Strahl $H_\mathfrak{m}$ verursachte Einteilung. Insbesondere ist die Gruppe $I_k^{(\mathfrak{m})}/U^\mathfrak{m}$ endlich.

Für die Zwecke der Klassenkörpertheorie bedarf man nun eines weiteren Äquivalenzbegriffes, damit eine bijektive Zuordnung zwischen Klassen von Idealgruppen des Grundkörpers k und seinen abelschen, endlichen Körpererweiterungen K möglich ist.

Definition 8. *(Idealgruppe, Kongruenzidealgruppe, Erklärungsmodul)*
Seien $I_k^{(\mathfrak{m}_1)} \geq U^{\mathfrak{m}_1} \geq H_{\mathfrak{m}_1}$ *und* $I_k^{(\mathfrak{m}_2)} \geq U^{\mathfrak{m}_2} \geq H_{\mathfrak{m}_2}$ *gegeben mit den Idealmoduln* $\mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{m}_2$. *Dann heißen* $U^{\mathfrak{m}_1}$ *und* $U^{\mathfrak{m}_2}$ *im wesentlichen gleich, bezeichnet als:*

$$U^{\mathfrak{m}_1} \overset{w}{\equiv} U^{\mathfrak{m}_2},$$

wenn es ein Idealmodul $\mathfrak{f}$ *existiert, so daß* $U^{\mathfrak{m}_1} \cap I_k^{(\mathfrak{f})} = U^{\mathfrak{m}_2} \cap I_k^{(\mathfrak{f})}$ *gilt. Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation definiert. Die betreffende Klasse heißt nun: die Kongruenzidealgruppe* U, $\mathfrak{m}_1$ *bzw.* $\mathfrak{m}_2$ *Erklärungsmoduln dieser Idealgruppe, und* $U^{\mathfrak{m}_1}$ *bzw.* $U^{\mathfrak{m}_2}$ *sind Repräsentanten von* U *bezüglich der Erklärungsmoduln* $\mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{m}_2$.

Satz 9. *Wenn eine Kongruenzidealgruppe durch zwei Module* $\mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{m}_2$ *erklärbar ist, so ist sie auch durch den* $\mathrm{ggT}(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2)$ *erklärbar.*

Hieraus folgt unmittelbar, daß es zu jeder Kongruenzidealgruppe U ein kleinstes solches Erklärungsmodul geben muß.

Definition 10. *(Führer) Das kleinste Erklärungsmodul* $\mathfrak{f}$ *einer Kongruenzidealgruppe* U *heißt ihr Führer.*

Jedes Erklärungsmodul von U ist dann ein Vielfaches von $\mathfrak{f}$.

Satz 11. *Seien* $\mathfrak{m}_1$ *und* $\mathfrak{m}_2$ *Erklärungsmoduln von* U. *Dann sind* $I_k^{(\mathfrak{m}_1)}/U^{\mathfrak{m}_1}$ *und* $I_k^{(\mathfrak{m}_2)}/U^{\mathfrak{m}_2}$ *kanonisch isomorph.*

3. Klassenkörpertheorie und der Artinisomorphismus

Sei K eine endliche, abelsche Körpererweiterung von k und $\mathfrak{m}$ ein gegebener Idealmodul in k.

Definition 12. *(Zugeordnete Idealgruppe)*
Man betrachte die Gruppe $I_K^{(\mathfrak{m})}$ *der Ideale* $\mathcal{I}$ *aus* K, *welche zu* $\mathfrak{m}$ *teilerfremd sind, oder äquivalent ausgedrückt:* $N_{K/k}(\mathcal{I})$ *ist zu* $\mathfrak{m}$ *teilerfremd. Dabei ist* $N_{K/k}$ *die Relativnorm;*
Dann heißt $N_{K/k}(I_K^{(\mathfrak{m})}) * H^{\mathfrak{m}} \subset I_k^{(\mathfrak{m})}$ *die* $K \mod \mathfrak{m}$ *zugeordnete Idealgruppe und wird mit* $U^{\mathfrak{m}} = U^{\mathfrak{m}}(K/k)$ *bezeichnet.*

Die betreffende Idealgruppe ist von endlichem Index über $H^{\mathfrak{m}}$ (siehe Satz (7)). Allgemein gilt, wenn $h(U)$ dieser Index ist, daß $h(U) \leq [K : k]$.

Satz 13. *(Existenzsatz)*
Zu jedem endlichen, abelschen Körper K über k existiert eine Kongruenzidealgruppe $U := U(K/k)$, so daß für die Erklärungsmodule $\mathfrak{m}$ von U gilt $h(U) = [K : k]$. Dabei ist $U^{\mathfrak{m}} = N_{K/k}(I_K^{(\mathfrak{m})}) * H^{\mathfrak{m}}$.
Anders ausgedrückt: Es existiert ein kleinstes Erklärungsmodul $\mathfrak{f}(K/k)$, so daß für alle Vielfachen $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{f}(K/k)$ $\#I_k^{(\mathfrak{m})}/(N_{K/k}(I_K^{(\mathfrak{m})}) * H^{\mathfrak{m}}) = [K : k]$ gilt. Diese Zuordnung ist eindeutig, d.h. es gibt dann genau eine solche Kongruenzklasse U von Idealgruppen $U^{\mathfrak{m}}$.
Diese Zuordnung zwischen endlichen abelschen Körpererweiterungen eines algebraischen Zahlkörpers k und seinen Kongruenzidealgruppen ist eine Bijektion.

Definition 14. *(Klassenkörper)*
Ein algebraischer Körper K über k heißt Klassenkörper zur Kongruenzidealgruppe U, wenn für einen geeigneten Idealmodul $\mathfrak{m}$ $U^{\mathfrak{m}} = N_{K/k}(I_K^{(\mathfrak{m})}) * H^{\mathfrak{m}}$ und $\#I^{(\mathfrak{m})}/U_k^{\mathfrak{m}} = [K : k]$ gilt.

Definition 15. *(Der Hilbertsche Klassenkörper)*
Diejenige (eindeutig bestimmte) abelsche Erweiterung H_k eines algebraischen Zahlkörpers k, welche als zugeordnete Idealgruppe die Gruppe der Hauptideale H von k hat, heißt Hilbertscher Klassenkörper: $H \in U(H_k/k)$.

Satz 16. *(Artinsches Reziprozitätsgesetz)*
Es sei gegeben der Körper k, eine Idealgruppe $U^{\mathfrak{m}}$ mit einem beliebigen Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ und die dazugehörige eindeutig bestimmte abelsche Körpererweiterung K/k.
Dann ist durch die Artinabbildung

$$\mathcal{I} \longmapsto \sigma_{\mathcal{I}}$$

ein surjektiver Homomorphismus von $I_k^{(\mathfrak{m})}$ auf die Galoisgruppe $\mathcal{G}(K/k)$ mit Kern $U^{\mathfrak{m}}$ gegeben. Durch den Übergang zur Faktorgruppe $I_k^{(\mathfrak{m})}/U^{\mathfrak{m}}$ induziert die Artinabbildung also einen Isomorphismus auf $\mathcal{G}$: Den Artinisomorphismus.

Satz 17. *(Führer-Verzweigungs-Satz)*
Genau die Primideale aus k, die den Führer $\mathfrak{f}(K/k)$ teilen, sind in K verzweigt.

Bemerkung 1.
Der Hilbertsche Klassenkörper H_k hat den Führer $\mathcal{O}_k$. Er ist die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung des Körpers k und der Artinisomorphismus vermittelt einen Isomorphismus zwischen der Klassengruppe I/H und der Galoisgruppe $\mathcal{G}(H_k/k)$.

Satz 18. *(Primzerlegungsgesetz)*
Sei K/k abelsche Erweiterung mit $[K : k] = n$ endlich und $\mathfrak{p}$ ein unverzweigtes Primideal. Sei $\mathfrak{m}$ ein Erklärungsmodul für K/k, welcher nicht von $\mathfrak{p}$ geteilt wird, $U^{\mathfrak{m}}$ die zugehörige Idealgruppe.
Ist dann f die Ordnung von $\mathfrak{p}U^{\mathfrak{m}}$ in der Gruppe $I_k^{(\mathfrak{m})}/U^{\mathfrak{m}}$, so gilt

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_k = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$$

mit $r = n/f$ verschiedenen Primidealen vom Grad f über $\mathfrak{p}$.

[16, S. 428]

Satz 19. *Es seien drei algebraische Zahlkörper gegeben: $K \supset L \supset k$. K sei abelsch über k.*
$\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_k$, $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_L$, welches $\mathfrak{p}$ teilt und $f := f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ der Trägheitgrad.
Dann gilt für die Artinabbildung:

$$(K/L, \mathfrak{q}) = (K/k, \mathfrak{p})^f$$

[8, S.62]

Satz 20. *Es seien K_1/k und K_2/k abelsche Erweiterungen mit Kongruenzidealgruppen U_1 und U_2. Ein beiden gemeinsames Erklärungsmodul sei $\mathfrak{m}$. Dann ist K_1K_2/k eine abelsche Erweiterung, hat also eine eindeutig zugeordnete Kongruenzidealgruppe U. Diese enthält einen Repräsentanten $U^{\mathfrak{m}}$ zum Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ und für diesen gilt: $U^{\mathfrak{m}} = U_1^{\mathfrak{m}} \cap U_2^{\mathfrak{m}}$.*

[13, S.208]

4. Charaktere

Definition 21. *Sei $\mathcal{G}$ eine endliche abelsche Gruppe, $\chi : \mathcal{G} \longmapsto \mathbb{C}^*$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann heißt χ ein Charakter der Gruppe $\mathcal{G}$. (e bezeichne das Neutralelement von $\mathcal{G}$)*

Satz 22. (1) *Auf der Menge der Charaktere von $\mathcal{G}$ wird durch die übliche punktweise Definition der Multiplikation von Abbildungen nach $\mathbb{C}$ eine Verknüpfung definiert, welche diese Menge zu einer Gruppe macht. Sie sei mit $\mathcal{G}^*$ bezeichnet.*
$\mathcal{G}^*$ ist isomorph zu $\mathcal{G}$

(2) *Für jeden Charakter* $\chi \in \mathcal{G}^*$ *gilt* $\sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \chi \not\equiv 1 \\ \#\mathcal{G} & \text{falls } \chi \equiv 1 \end{cases}$

(3) *Für* $g \in \mathcal{G}$ *gilt* $\sum_{\chi \in \mathcal{G}^*} \chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g \neq e \\ \#\mathcal{G} & \text{falls } g = e \end{cases}$

(4) *(Orthogonalitätsrelationen)*

$$\sum_{\chi \in \mathcal{G}^*} \chi(g g_1^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } g \neq g_1 \\ \#\mathcal{G} & \text{falls } g = g_1 \end{cases}$$

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \chi(g)\chi_1^{-1}(g) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \chi \neq \chi_1 \\ \#\mathcal{G} & \text{falls } \chi = \chi_1 \end{cases}$$

Bei den oben definierten Gruppen $I_k^{(\mathfrak{m})}/U^{\mathfrak{m}}$ handelt es sich um endliche abelsche Gruppen. Man hat also in der definierten Weise auf dieser Faktorgruppe die duale Gruppe ihrer Charaktere gegeben. Man kann dann für einen gegebenen Charakter χ und ein Ideal $\mathcal{I}$, welches zu $\mathfrak{m}$ prim ist, $\chi(\mathcal{I})$ durch $\chi(\mathcal{I}) := \chi(\mathcal{I}U^{\mathfrak{m}})$ definieren. Dadurch ist dann ein Homomorphismus von $I_k^{(\mathfrak{m})}$ nach $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ definiert.

Der Artinisomorphismus erlaubt es, einen Charakter einer Klassengruppe $I_k^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$ mit Führer $\mathfrak{f}$ und Strahl $H_{\mathfrak{f}}$ zu einer gegebenen Körpererweiterung K/k auch als Charakter der abelschen Gruppe $\mathcal{G}(K/k)$ zu interpretieren:

$$\chi(\sigma_{\mathcal{I}}) := \chi(\mathcal{I})$$

Durch dieselbe Gleichung wird umgekehrt aus einem Charakter der Gruppe $\mathcal{G}(K/k)$ ein Charakter der Gruppe $I_k^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$.

Definition 23. *(Führer eines Charakters) Sei* χ *ein Charakter der Gruppe* $I_k^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$ *bzw. der Gruppe* $\mathcal{G}(K/k)$ *mit obiger Identifizierung. Dann ist der Führer* f_χ *definiert als der Führer der Körpererweiterung* K_χ/k*, wobei* K_χ *der Fixkörper der Untergruppe Kern(*χ*)* $\subset \mathcal{G}(K/k)$ *ist.*

Hieraus ergibt sich, daß der Führer eines Charakters genau der Führer der Idealgruppe $\{\mathcal{I} \in I^{(\mathfrak{f})} \mid \chi(\mathcal{I}) = 1\}$ ist.

Beweis: Die nach Satz (13) zur Erweiterung K_χ/k existierende Idealgruppe ist nach Satz (16) der Kern der Artinabbildung: $(K_\chi/k, \mathcal{I}) = id_{K_\chi}$. Genau die Erweiterungen dieses Automorphismuses aus $\mathcal{G}(K_\chi/k)$ zu Automorphismen aus $\mathcal{G}(K/k)$ halten also den Körper K_χ in K punktweise fest. Es gilt aber, daß die Restriktion von $(K/k, \mathfrak{a})$ auf K_χ genau $(K_\chi/k, \mathfrak{a})$ ist. [13, S.198] Diejenigen Ideale also, für die die Restriktion des Automorphismuses $(K/k, \mathcal{I})$ auf K_χ die Identität ergeben, d.h. die K_χ punktweise festhalten, d.h. nach Definition von K_χ diejenigen Elemente $\sigma_{\mathcal{I}} \in \mathcal{G}(K/k)$ mit $\chi(\sigma_{\mathcal{I}}) = 1$, bilden demnach die der Erweiterung K_χ/k zugeordnete Idealgruppe. $\square$

Hat man nun einen Charakter χ der Idealgruppe $I_k^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$ gegeben und seinen Führer $\mathfrak{f}_\chi$ sowie seinen Kern$(\chi) =: U_{\mathfrak{f}_\chi}^{(\mathfrak{f})} \supset U^{\mathfrak{f}}$ bestimmt, so kann es in der Idealgruppe $I^{(\mathfrak{f}_\chi)}$ zum Erklärungsmodul $\mathfrak{f}_\chi$ Ideale $\mathfrak{a}$ geben, welche nicht zum Führer $\mathfrak{f}$ prim sind: Dann aber ist $\chi(\mathfrak{a})$ zunächst nicht erklärt. Daher definiert man den Wert von $\mathfrak{a}$ über den Wert des Charakters auf der Klasse von $\mathfrak{a}$ in $I^{(\mathfrak{f})}/U_{\mathfrak{f}_\chi}^{(\mathfrak{f})}$.

Man hat dann den Charakter χ auf der Gruppe $I_k^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$ zu einem Charakter von $I_k^{(\mathfrak{f}_\chi)}/U_{\mathfrak{f}_\chi}^{(\mathfrak{f}_\chi)}$ bzw. $I_k^{(\mathfrak{f}_\chi)}/H_{\mathfrak{f}_\chi}$ "geliftet": Das Resultat ist dann ein primitiver Charakter.

Satz 24. $\mathfrak{f}$ *sei der Führer der Kongruenzidealgruppe* U *von* K/k. *Dann gilt:*

$$\mathfrak{f} = kgV\{f_\chi \mid \chi \text{ ist Charakter von } I^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}\}.$$

Dabei bedeutet kgV*: Das kleinste gemeinsame Vielfache.*

[8, S.136]

KAPITEL III

L-Funktionen und ihre Funktionalgleichung

In diesem Kapitel werden Heckesche L-Reihen, abelsche Artinsche L-Reihen sowie die Starksche Hypothese dargestellt. Ausführlicheres findet man in den Büchern von Neukirch und Tate [16, 22].

1. Dedekindsche ζ-Funktion

$N(\mathcal{I})$ bezeichnet die Norm des Ideals $\mathcal{I}$.
Die Dedekindsche ζ-Funktion

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathcal{I} \text{ganzes Ideal}} N(\mathcal{I})^{-s}$$

eines algebraischen Zahlkörpers k ist zunächst definiert für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dort konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig; ihr Grenzwert ist also eine analytische Funktion in der Variablen s. Sie besitzt im gleichen Bereich eine Produktdarstellung:

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

$\mathbb{P}_k$ ist die Menge der Primideale von $\mathcal{O}_k$.
Die ζ-Funktion läßt sich analytisch zu einer auf der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen. Sie besitzt einen einzigen Pol bei $s = 1$, welcher einfach ist. Das Residuum ist

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_k(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_k R_k}{w_k\sqrt{|D_k|}}.$$

Dabei sind

- r_1 die Anzahl der reellen Stellen von k
- r_2 die Anzahl der komplexen Stellen von k
- h_k die Klassenzahl
- R_k der Regulator
- D_k die Diskriminante
- w_k die Anzahl der Einheitswurzeln in k

Die vollständige ζ_k-Funktion wird definiert durch

$$\xi_k(s) := \sqrt{|D_k|}^{\,s} \sqrt{\pi^n 4^{r_2}}^{\,-s} \Gamma(s)^{r_2} \Gamma(\frac{s}{2})^{r_1} \zeta_k(s)$$

n ist der Grad des Körpers k über $\mathbb{Q}$. Für diese Funktion gilt folgende Funktionalgleichung:

$$\xi_k(s) = \xi_k(1-s).$$

Unmittelbar aus dieser Funktionalgleichung und dem Wert des Residuums der ζ-Funktion ergibt sich für die Potenzreihenentwicklung der ζ-Funktion bei $s = 0$:

$$\zeta_k(s) = -\frac{h_k R_k}{w_k} s^{r_1+r_2-1} + O(s^{r_1+r_2})$$

(O ist das Landausymbol).

2. Heckesche L-Reihen

U sei eine Kongruenzidealgruppe mit Führer $\mathfrak{f}$. Dann ist $I_k^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$ eine endliche abelsche Gruppe. Sei χ eine Charakter dieser Gruppe, der in der auf Seite 22 angegebenen Weise als Charakter von $I_k^{(\mathfrak{f})}$ definiert wird (Der Wert eines Ideals entspricht dem Wert seiner Klasse).
Dann ist die Heckesche L-Reihe zu χ ist definiert durch

$$L(\chi, s) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \text{ ganzes Ideal} \\ (\mathcal{I}, \mathfrak{f}_\chi)=1}} \frac{\chi(\mathcal{I})}{N(\mathcal{I})^s}$$

Die Definition von $\mathfrak{f}_\chi$ findet man auf Seite 22. Der Definitionsbereich des Charakters χ wird in der dort angegebenen Weise auf die Idealgruppe $I^{(\mathfrak{f}_\chi)}$ der zu $\mathfrak{f}_\chi$ teilerfremden Ideale ausgeweitet.
Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ihr Grenzwert ist also eine analytische Funktion. Diese läßt sich meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen.

Falls χ nicht der triviale Charakter ist, so ist die betreffende L-Funktion sogar holomorph in ganz $\mathbb{C}$.
Sie besitzt für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ eine Produktdarstellung:

$$L(\chi, s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k, \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_\chi} \frac{1}{1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}}$$

Die vollständige Heckesche L-Funktion

$$\Lambda(\chi, s) = \sqrt{\frac{|D_k| N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n 4^{r_2}}}^{\,s} \prod_{i=1}^{r_1} \Gamma(\frac{s + s_i}{2}) \Gamma(s)^{r_2} L(\chi, s)$$

hat die Funktionalgleichung

$$\Lambda(\chi, s) = \mathcal{W}(\chi) \Lambda(\overline{\chi}, 1 - s).$$

Dabei sind

- $\mathcal{W}(\chi)$ die Artinsche Wurzelzahl (S.65),
- D_k die Diskriminante von k,
- r_1 (r_2) die Anzahl der reellen (komplexen) Stellen von k,
- $s_i = 1$ genau dann, wenn die betreffende reelle Stelle ν_i den Führer $\mathfrak{f}_\chi$ teilt,
- $n = [k : \mathbb{Q}]$,
- $\mathfrak{f}_\chi$ der Führer von χ.

Definition 25. *(abelsche Artinsche L-Reihen)*
Der Artin-Isomorphismus vermittelt einen Gruppenhomomorphismus von $I^{(\mathfrak{f})}$ nach $\mathcal{G}(K/k)$

$$\begin{array}{c} I^{(\mathfrak{f})} \longmapsto \mathcal{G} \\ \mathcal{I} \longmapsto \sigma_{\mathcal{I}} \end{array}$$

Man kann also definieren

$$L(K/k, \chi, s) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \text{ ganzes Ideal in } \mathcal{O}_k \\ (\mathcal{I}, \mathfrak{f}_\chi) = 1}} \frac{\chi(\sigma_{\mathcal{I}})}{N(\mathcal{I})^s}$$

Diese Reihen heißen die (abelschen) Artinschen L-Reihen.

Dabei ist dann χ ein Charakter der Galoisgruppe $\mathcal{G}(K/k)$, welche nach Voraussetzung abelsch ist. Ganz offensichtlich gelten genau die selben Aussagen über die

Konvergenz, analytische Fortsetzbarkeit bzw. Funktionalgleichung dieser Reihe, welche für die Heckeschen L-Reihen gelten. Man hat also zunächst nichts wesentlich neues definiert.

Für die Formulierung der Starkschen Hypothese definiert man:

Definition 26.
Sei S eine Menge von endlichen und unendlichen Stellen, die auf jeden Fall die in K verzweigenden Primideale enthält. Man definiert:

$$L_S(K/k,\chi,s) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \text{ ganzes Ideal} \\ \mathcal{I} \text{ prim zu } S}} \frac{\chi(\sigma_{\mathcal{I}})}{N(\mathcal{I})^s}$$

und analog die partiellen Zetafunktionen zu jedem $\alpha \in \mathcal{G}$:

$$\zeta_S(s,\alpha) = \sum_{\substack{\sigma_{\mathcal{I}}=\alpha \\ \mathcal{I} \text{prim zu } S}} \frac{1}{N(\mathcal{I})^s}$$

Es gilt:

$$L_S(K/k,\chi,s) = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}(K/k)} \zeta_S(s,\alpha)\chi(\alpha) \tag{1}$$

und

$$\zeta_S(s,\alpha) = \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{\chi\in\mathcal{G}^*} L_S(K/k,\chi,s)\chi(\alpha^{-1}) \tag{2}$$

Die zweite Formel ist eine Konsequenz der Orthogonalitätsrelationen für Charaktere (S.22 (4)). Aus dieser ergibt sich auch die meromorphe Fortsetzbarkeit von $\zeta_S(s,\alpha)$ auf ganz $\mathbb{C}$ mit einem einfachen Pol in $s=1$.
Man möchte nun die Vielfachheit der Nullstelle bei $s=0$ der Funktion $L(K/k,\chi,s)$ bestimmen. Dazu genügt es erstens feststellen, daß

$$L(K/k,\chi,1) \neq 0 \tag{3}$$

ist, was eine Konsequenz von

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) \prod_{\chi\neq 1} L(K/k,\chi,s)$$

ist [7, S.165]; denn ζ -Funktionen haben bei $s = 1$ einen einfachen Pol. Man nützt also auch hier geeignet die Funktionalgleichung aus.

LEMMA 1. *Es gilt:*

$$L(K/k, \chi, s) = c(\chi)s^{r(\chi)} + O(s^{r(\chi)+1})$$

mit $c(\chi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *und*

$$r(\chi) := \#\{\nu_i \mid \chi(\sigma_{w_i}) = 1,\ w_i \textit{ Fortsetzung der Einbettung } \nu_i \textit{ von } k\}$$

Die Automorphismen $\sigma_{w_i} \in \mathcal{G}(K/k)$ *sind folgendermaßen definiert:*
Für reelles ν_i *entspricht* σ_{w_i} *der komplexen Konjugation:*

$$w_i \circ \sigma_{w_i} \circ w_i^{-1} : x \in w_i(K) \longmapsto \bar{x} \in w_i(K)$$

Für komplexes ν_i *ist* $\sigma_{w_i} := id_K$.

Beweis:

Die Einbettung w_i ist nicht eindeutig bestimmt. Aber jede andere Einbettung, die ν_i fortsetzt, ist von der Form $w_i \circ \sigma$ mit $\sigma \in \mathcal{G}(K/k)$. Also ist σ_{w_i} eindeutig durch obige Forderung bestimmt, da $\mathcal{G}(K/k)$ abelsch ist.
Es gilt für reelle ν_i (S.20 (17)):

$$\nu_i/\mathfrak{f}_\chi \Leftrightarrow w_i \text{ ist komplex}$$

Ist dann $\chi(\sigma_{w_i}) = 1$, so gilt $\sigma_{w_i} \in$ Kern$(\chi) \Rightarrow \sigma_{w_i} \in \mathcal{G}(K/K_\chi) \Rightarrow \sigma_{w_i}(x) = x$ für alle $x \in K_\chi$. Das heißt dann aber, daß die komplexe Konjugation als die Identität auf $w_i(K_\chi)$ wirkt und somit w_i eingeschränkt auf K_χ reell sein muß, also teilt ν_i nicht $\mathfrak{f}_\chi$.
Teilt umgekehrt ν_i nicht $\mathfrak{f}_\chi$, so ist w_i eingeschränkt auf K_χ reell, also: $\sigma_{w_i} = id_{K_\chi} \Rightarrow \sigma_{w_i} \in \mathcal{G}(K/K_\chi) \Rightarrow \chi(\sigma_{w_i}) = 1$
Für komplexe ν_i ist $\sigma_{w_i} = id_K$, d.h. $\chi(\sigma_{w_i}) = 1$.
Man hat also:

$$\nu_i/\mathfrak{f}_\chi \Leftrightarrow \chi(\sigma_{w_i}) \neq 1$$

Für die Γ-Faktoren der Funktion Λ folgt:

$$s_i = 1 \Leftrightarrow \chi(\sigma_{w_i}) \neq 1$$

Aus $\Lambda(s, \chi) = \mathcal{W}(\chi)\Lambda(1 - s, \bar{\chi})$ folgt dann wegen (3), daß $L(s, \chi)$ eine Nullstelle genau der Vielfachheit $r(\chi)$ haben muß, da sich die Pole der Funktionen $\Gamma(z)$ und die Pole der Funktionen $\Gamma(\frac{z}{2})$ gegen die Nullstellen von $L(s, \chi)$ aufheben müssen, damit (3) S.28 erfüllt ist. $\square$

3. Die Starksche Vermutung zu $L'_S(K/k, \chi, 0)$

Sei $n := [K : k]$.

VERMUTUNG 1. *(Die Starksche Vermutung zu $L'_S(K/k, \chi, 0)$)*

Sei K/k eine endliche abelsche Körpererweiterung. Die Menge S von (unendlichen und endlichen) Stellen erfülle folgende Bedingungen:

- *S enthält die unendlichen und die in K verzweigten Stellen von k.*
- *S enthält mindestens eine voll zerlegte Stelle von K/k*
- *$\#S \geq 2$.*

Dann gibt es eine S-Einheit $\boldsymbol{\varepsilon} \in K$, die folgende Bedingungen erfüllt:

- *$K(\sqrt[w_K]{\varepsilon})/k$ ist abelsch*
- *$\nu \in S$ sei <u>voll zerlegt</u>:* $\begin{cases} |\varepsilon|_{w'} = 1 & \textit{falls } w' \nmid \nu, \#S \geq 3 \\ |\varepsilon|_{\sigma w'} = |\varepsilon|_{w'} & \textit{falls } w' \nmid \nu, \#S = 2 \end{cases}$
  w' ist jeweils Fortsetzung einer Stelle $\nu' \in S$.

  Es gilt dann für alle $\sigma \in \mathcal{G}(K/k)$

$$\log |\sigma(\varepsilon)|_w = -w_K \zeta'_S(0, \sigma)$$

  wobei w eine Fortsetzung von ν in K ist,
  oder <u>äquivalent</u> dazu:

$$L'_S(K/k, \chi, 0) = -\frac{1}{w_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \chi(\sigma) \log |(\sigma(\varepsilon)|_w, \ \textit{für alle } \chi \in \mathcal{G}^*$$

w_K ist die Anzahl der Einheitswurzeln von K.

[22, S.89]
Die gerade behauptete Äquivalenz ergibt sich aus der Orthogonalitätsrelation für Charaktere bzw. S.28 (2).
Für den Fall einer unendlichen Stelle w (die sie repräsentierende Einbettung sei ebenfalls mit w bezeichnet), welche voll zerlegt ist, ergibt sich also im Fall $\#S > 2$ $|(\varepsilon)|_{w'} = 1$ für alle Stellen aus S, die ν nicht teilen.

Für w gilt:
$$\log\left(\prod_{\sigma\in\mathcal{G}(K/k)}|\sigma(\varepsilon)|_w\right) = -w_K \sum_{\sigma\in\mathcal{G}(K/k)}\zeta'_S(0,\sigma) = -w_K L'_S(K/k,\chi_0,0) = 0.$$
($\chi_0 \equiv 1$).
Daraus folgt: $|N(\varepsilon)| = 1$ sowie $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ wegen $|\varepsilon|_{w'} = 1$. Also ist ε eine Einheit in $\mathcal{O}_k$.

Ebenso gilt, falls $\#S = 2$ und S mindestens 2 unendlichen Stellen enthält:
S besteht nur aus unendlichen Stellen, und die S-Einheit ε ist eine Einheit in $\mathcal{O}_k$.

Die Vermutung ist bewiesen für imaginärquadratische Grundkörper und $\mathbb{Q}$ [21, 22].
Im Kontext dieser Arbeit ist es von Interesse, daß die Starksche Vermutung für den Fall, daß S mehr als eine voll zerlegte Stelle enthält, durch Einheiten aus dem Grundkörper k erfüllt wird. Damit legt $\log|\sigma(\varepsilon)|_w = -w_k\zeta'_S(0,\sigma)$ sowie $|\varepsilon|_{w'}$ für alle $w' \nmid \nu$ fest, daß jede andere Einheit, die die Vermutung erfüllt, sich von jener Einheit aus k nur um eine ganze algebraische Zahl unterscheidet, für welche alle Konjugierten vom Betrag 1 sind: Das ist dann aber eine Einheitswurzel. Die Verwendung der Hypothese zur Berechnung von Körpererweiterungen macht in diesem Fall keinen Sinn.

Satz 27.
Die Starksche Vermutung ist richtig, wenn es mindestens zwei voll zerlegte Stellen in S gibt. Die betreffende Starkeinheit ε kann dann aus dem Grundkörper k gewählt werden.

Für die Anwendungen interessiert nur der Fall, daß S zwei voll zerlegte unendliche Stellen enthält, d.h. komplexe Einbettungen von k, deren Fortsetzungen auf die abelsche Erweiterung K dann auch komplex sind, bzw. reelle Einbettungen, deren Fortsetzungen auf K reell sind. Nur das werde ich beweisen. (Für einen vollständigen Beweis: [22])

Beweis:

Sei $\#S \geq 3$.
Dann gilt $\zeta_k(s) = -\frac{h_k R_k}{w_k}s^{r_1+r_2-1} + O(s^{r_1+r_2})$. S enthält aber alle unendlichen Stellen. Sind also mindestens 3 unendliche Stellen vorhanden, so ergibt sich bereits $\zeta'_k(0) = 0$. Andernfalls gibt es endliche Stellen $\mathfrak{p} \in S$. Um also $L_S(\chi_0, s)$ für den Charakter $\chi_0 \equiv 1$ zu erhalten, muß man $\zeta_k(s)$ mit dem (oder den) Faktor(en) $1 - N(\mathfrak{p})^{-s}$ multiplizieren. Es gilt aber $1 - N(\mathfrak{p})^{-s} = \log(N(\mathfrak{p}))s + O(s^2)$ und das bedeutet, daß die Vielfachheit der Nullstelle bei $s = 0$ jeweils um 1 pro Faktor

erhöht wird, so daß sich ergibt:

$$L_S(\chi_0, s) \sim s^{\#S-1}$$

Somit hat man in diesem Fall $L'_S(\chi_0, 0) = 0$.
Ist aber $\chi \not\equiv 1$, so hat man $L(K/k, \chi, s) = c(\chi)s^{r(\chi)} + O(s^{r(\chi)+1})$ mit $r(\chi) := \#\{\nu_i \mid \chi(\sigma_{w_i}) = 1,\ w_i$ Fortsetzung von $\nu_i\}$. Da aber mindestens 2 Stellen voll zerlegt sind, ergibt sich für eine solche Stelle ν, falls sie unendlich ist, $\sigma_w = id_K$, also $r(\chi) \geq 2$. Die Potenzreihenentwicklung von $L_S(\chi, s)$ beginnt also mit mindestens s^2. Für $L'_S(\chi, s)$ bedeutet das $L'_S(\chi, s) \sim s^r$, wobei $r \geq 1$ gilt. Also gilt auch in diesem Fall

$$L'_S(\chi, 0) = 0.$$

Ganz offensichtlich werden dann für $\varepsilon = 1$ die Bedingungen der Starkschen Vermutung erfüllt sein: Es ist $K(\sqrt[w_K]{1})/k$ abelsch nach der Definition von w_K, womit die erste Bedingung klar ist. $|1|_{w'} = 1$ gilt trivialerweise, sowie $\log |1|_w = 0$.
Bleibt der Fall $\#S = 2$, d.h. $S = \{\nu, \nu'\}$, welches dann die beiden unendlichen Stellen sind. Es gilt

$$\zeta_k(s) = -\frac{h_k R_k}{w_k} s^{r_1+r_2-1} + O(s^{r_1+r_2})$$

Da ν, ν' unendliche Stellen sind, gilt $r_1 + r_2 = \#S = 2$. Also

$$\zeta'_k(0) = -\frac{h_k R_k}{w_k}$$

Die Gruppe der Einheiten von k hat den Rang 1. Sei μ Fundamentaleinheit mit o.B.d.A: $|\mu|_\nu > 1$.
Für den Regulator gilt $R_k = \log |\mu|_\nu$. μ wird potenziert mit einer geeigneten natürlichen Zahl m: $\varepsilon := \mu^m$. Dabei ist

$$m := \frac{w_K}{w_k} \frac{h_k}{[K : k]}$$

$\frac{w_K}{w_k}$ ist offensichtlich eine ganze Zahl, da die Einheitswurzeln von k auch solche von K sind. $\frac{h_k}{[K:k]}$ ist eine natürliche Zahl, da K/k abelsch und unverzweigt ist: (S besteht aus voll zerlegten Stellen!) Dann ist $\mathfrak{f}(K/k) = \mathcal{O}_k$ (Führer-Verzweigungs-Satz: S. 20). Für die Idealgruppe der Körpererweiterung K/k zum Erklärungsmodul $\mathfrak{f} = \mathcal{O}_k$ gilt dann, daß sie die Hauptideale H enthält (S 19). Damit vermittelt der Artinisomorphismus des Hilbertschen Klassenkörpers H_k eine Inklusionsbeziehung für die entsprechenden Galoisgruppen, und es folgt eben: $K \subseteq H_k$, woraus folgt $h_k/[K : k] = [H_k : k]/[K : k] = [H_k : K]$ ist ganz.
ε ist also eine Einheit aus dem Grundkörper k, für die nun die Bedingungen der

Starkschen Vermutung nachgewiesen werden müssen.
Nach Wahl der Einheit gilt

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{G}(K/k)} \log|\sigma(\varepsilon)|_w = \sum_{\sigma\in\mathcal{G}(K/k)} m\log|\mu|_\nu = (\sum_{\sigma\in\mathcal{G}(K/k)} \frac{w_K}{w_k}\frac{h_k}{[K:k]})\log|\mu|_\nu$$

$$= [K:k]\frac{w_K}{w_k}\frac{h_k}{[K:k]}\log|\mu|_\nu = w_K\frac{h_k\log|\mu|_\nu}{w_k} = -w_K\zeta'(0) = -w_K L'_S(K/k,\chi_0,0).$$

Für einen Charakter $\chi \not\equiv 1$ gilt:

$$L'(K/k,\chi,s) = r(\chi)c(\chi)s^{r(\chi)-1} + O(s^r(\chi)),$$

wobei $r(\chi)\geq 2$, da es mindestens zwei voll zerlegte Stellen gibt. Also hat man

$$L'_S(K/k,\chi,0) = L'(K/k,\chi,0) = 0$$

und

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{G}(k/k)} \chi(\sigma)\log|\sigma(\varepsilon)|_w = \log|\varepsilon|_\nu \sum_{\sigma\in\mathcal{G}(k/k)} \chi(\sigma) = \log|\varepsilon|_\nu 0 = 0.$$

Dabei wurde verwendet, daß $\varepsilon\in k$, also $\sigma(\varepsilon)=\varepsilon$ für $\sigma\in\mathcal{G}(K/k)$, sowie die Tatsache, daß $\chi\not\equiv 1$ (Satz auf S.22). Nun ist nachzuweisen, daß $|\varepsilon|_{\sigma w'} = |\varepsilon|_{w'}$ für eine Fortsetzung w' von ν' in K gilt. Das ergibt sich aber direkt daraus, daß $\varepsilon\in k$ und $\sigma\in\mathcal{G}(K/k)$.
Weiter ist zu zeigen, daß $K(\sqrt[w_K]{\varepsilon})/k$ abelsch ist. Dazu beachtet man, daß $K(\sqrt[w_K]{\varepsilon})\subseteq K(\sqrt[w_k]{\mu})$ gilt, denn man erhält die betreffenden Wurzeln $\sqrt[w_K]{\varepsilon}$ einfach durch Potenzieren mit m der Wurzeln $\sqrt[w_k]{\mu}$. Also hat man nur zu beweisen, daß $K(\sqrt[w_k]{\mu})/k$ abelsch ist. Das ist aber klar, da k genau w_k Einheitswurzeln enthält. $\square$

KAPITEL IV

Numerische Berechnung von Heckeschen L-Reihen

1. Friedmans Integralformel

In ihrer allgemeinen Form findet man die Integralformel in Friedmans Artikel: Heckes Integral Formula.Die dort bewiesene Aussage hat eine Allgemeinheit, welche ich hier nicht benötige; ich schränke mich also in der Formulierung bereits auf die von mir benötigten Fälle ein.

[6]

Proposition 1. *(Friedman)*

Sei $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *und* $L(s,\bar{\chi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n n^{-s}$ *für* $s \in \mathbb{C}$ *und* $Re(s) > 1$. *Weiter sei*

$$G(s) := \left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{s+s_k}{2}) \right) \Gamma(s)^{r_2},$$

wobei $s_k \in \{0,1\}$ *gilt. Sei* $C \in \mathbb{R}^{>0}$. $\Lambda(s,\chi) := C^s G(s) L(s,\chi)$, *analog* $\Lambda(s,\bar{\chi}) := C^s G(s) L(s,\bar{\chi})$. *Diese Funktionen seien holomorph auf ganz* $\mathbb{C}$ *fortsetzbar. Weiter wird vorausgesetzt (*$\mathcal{W}(\chi) \in \mathbb{C}^*$*):*

$$\Lambda(1-s,\chi) = \mathcal{W}(\chi)\Lambda(s,\bar{\chi})$$

Für δ *wird vorausgesetzt:* $\delta >$ $Max\{Re(s), 0\}$. *Die Funktion* $f : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist definiert durch*

$$f(x,s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-\infty i}^{\delta+\infty i} x^z G(z) \frac{dz}{z-s}.$$

Dann folgt:

$$\Lambda(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n f(\frac{C}{n}, s) + \mathcal{W}(\chi)\bar{a}_n f(\frac{C}{n}, 1-s))$$

Diese Reihe ist für $s \in \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergent.

$f(x,s)$ läßt sich für $\delta >$ Re$(s)+1$ folgendermaßen abschätzen:

$$|f(x,s)| \leq \frac{x^\delta}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{r_1}|\Gamma(\frac{\delta+it+s_k}{2})|\right)|\Gamma(\delta+it)|^{r_2}dt$$

Hat man also erst einmal die Konvergenz des betreffenden Integrals gezeigt (dazu später), so ergibt sich, wegen der freien Wahl von δ mit $|f(\frac{C}{n}, s)| \leq (\frac{1}{n})^\delta \mathrm{K}_0(\delta)$, daß $f(x,s)$ schneller als jede Potenz mit $\lim_{x\to 0}$ gegen Null konvergiert. (Die Konstante $\mathrm{K}_0(\delta)$ hängt dann nicht mehr von s ab.) Die Dirichletkoeffizienten $a_n(\chi)$ lassen sich für Heckeschen L-Reihen durch die Anzahl der Ideale der Norm n abschätzen. Hierfür findet man in [24]:

$$|a_n| \leq n^{\frac{\log(N)^3}{\log(2)}},$$

wobei N der Grad von K über $\mathbb{Q}$ ist.
Daraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\frac{C}{n}, s)$, wenn man etwa $\delta > \max\{$ Re$(s)+1, \frac{\log(N)^3}{\log(2)}\}+1$ wählt.

Aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in obiger Proposition folgt, daß man die Ableitungen $\Lambda'(s,\chi)$ erhält, indem man $f(x,s)$ durch $\frac{d}{ds}f(x,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-\infty i}^{\delta+\infty i} x^z G(z)\frac{dz}{(z-s)^2}$ ersetzt. Zur Berechnung von $L'(0,\chi)$ benötigt man das aber nicht.

Beweis: (Proposition von Friedman)

Sei $\Lambda(s,\chi) = \sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{4^{r_2}\pi^n}}^s \prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{s+s_k}{2})\Gamma(s)^{r_2}L(s,\chi)$. Weiter sei:

$$\Psi(s,\chi) := \sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n}}^s \sum_{\mathfrak{a} \text{ ganzes Ideal}} \chi(\mathfrak{a})\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a})\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \tag{4}$$

$\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a})$ ist folgendermaßen erklärt:

$$\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a}) := \int\limits_{\prod_{k=1}^{n} z_k \geq c_{\mathfrak{a}}, z_k>0} \cdots \int \exp(-\sum_{k=1}^{n} z_k) \prod_{k=1}^{n} z_k^{\frac{s+s_k}{2}} \frac{dz_r \cdots dz_1}{z_r \cdots z_1} \tag{5}$$

Dabei ist $n := [k:\mathbb{Q}]$, $r := r_1 + r_2$, $c_{\mathfrak{a}} := \frac{N(\mathfrak{a})^2 \pi^n}{|D_k| N(\mathfrak{f}_\chi)}$. ($r_1$ ist die Anzahl der rellen Stellen, r_2 die Anzahl der komplexen Stellen.)
Dann gilt:

$$\Lambda(s,\chi) = -\frac{2^{r_1} R_k h_k}{w_k} \frac{E(\chi)}{s(1-s)} + \Psi(s,\chi) + \mathcal{W}(\chi)\Psi(1-s,\bar{\chi}) \tag{6}$$

Hier ist $E(\chi) = 1$ für den Fall der Dedekindschen ζ-Funktion. In allen anderen Fällen aber ist $E(\chi) = 0$. R_k ist der Regulator, h_k die Klassenzahl und w_k die Anzahl der Einheitswurzeln von k. Beweise hierfür findet man bei Tatuzawa [23]. Die Tatsache, daß obige Reihendarstellung der Funktion $\Lambda(s,\chi)$ lokal gleichmäßig für alle $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, ergibt sich am leichtesten nach der nun folgenden Umformung der Funktion $\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a})$ und wurde in der dann vorliegenden Form schon gezeigt.
Heckes Integralformel ist zu finden in [13, S.260]. Die Formel (4) ist im Falle der Dedekindschen ζ-Funktion damit identisch.

Der nun folgende Beweis der Proposition von Friedman beschränkt sich auf Heckesche L-Reihen und gilt auch für die (nicht holomorphe) Dedekindsche ζ-Funktion. Einen analogen Beweis findet man in der Darstellung von Friedman [6]. Dieser behandelt aber nur die Dedekindsche ζ-Funktion und benutzt statt der Mellintransformation Fouriertransformationen. Seien

$$M(f)(x) := \int_0^\infty t^x f(t) \frac{dt}{t} \tag{7}$$

$$M^{-1}(f)(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} x^{-z} f(z) dz \tag{8}$$

die Mellintransformation und die inverse Mellintransformation.
Die Konvergenz von $M(f)$ ist gewährleistet, wenn für ein offenes Intervall (m_1, m_2) und $\mathrm{Re}(x) \in (m_1, m_2)$ gilt $f(t) = O(t^{-m_1})$ für $t \in \mathbb{R}^{>0}$ nahe bei 0 und $f(t) = O(^{-m_2})$ für große $t \in \mathbb{R}^{>0}$. (Es ist wieder O das Landausymbol.) Gibt es eine Konstante $C_0 \in \mathbb{R}^{>0}$, so daß für $m_1 < \delta < m_2$ gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |M(\delta + it)| dt < C_0$ dann folgt:

$$M^{-1}(M(f))(x) = f(x). \tag{9}$$

Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g bezüglich der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{R}^{>0}$ und ihres Haarschen Maßes $\frac{dt}{t}$ ist definiert durch:

$$f * g(x) := \int_0^\infty f(x/t)g(t)\frac{dt}{t}. \tag{10}$$

Es gilt:

$$M(f * g) = M(f)M(g). \tag{11}$$

Die Faltung ist assoziativ:

$$f * (g * h) = (f * g) * h. \tag{12}$$

Eine kurze Darstellung der Mellintransformation findet man in [4, S.209].
Man setze

$$f_k(t) := \exp(-t)t^{\frac{s+s_k}{2}} \text{ für reelle Stellen } \nu_k,$$
$$f_k(t) := \exp(-2t)t^s \text{ für komplexe Stellen } \nu_k.$$

Dann ergibt (5):

$$\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a}) = \int\limits_{\prod_{k=1}^{n} z_k \geq c_{\mathfrak{a}}, z_k > 0} \cdots \int \prod_{k=1}^{r_1} f_k(z_k) \prod_{k=r_1+1}^{r} f_k(z_k) \frac{dz_r \cdots dz_1}{z_r \cdots z_1}.$$

Also hat man, indem man $v := \prod_{k=1}^{n} z_k$ setzt:

$$\int_{c_{\mathfrak{a}}=v}^{\infty} \int_{0=z_r}^{\infty} \dots \int_{0=z_2}^{\infty} \prod_{k=2}^{r_1} f_1\Big(\frac{v}{\prod_{k=3}^{n} z_k}/z_2\Big) \prod_{k=2}^{r_1} f_k(z_k) \prod_{k=r_1+1}^{r} f_k(z_k) \frac{dz_2 \cdots dz_r}{z_2 \cdots z_r} \frac{dv}{v}$$

$$= \int_{c_{\mathfrak{a}}=v}^{\infty} \int_{0=z_r}^{\infty} \dots \int_{0=z_3}^{\infty} \int_{0=z_2}^{\infty} f_1\Big(\frac{v}{\prod_{k=3}^{n} z_k}/z_2\Big) f_2(z_2) \frac{dz_2}{z_2} \prod_{k=3}^{r_1} f_k(z_k) \prod_{k=r_1+1}^{r} f_k(z_k) \frac{dz_3 \cdots dz_r}{z_3 \cdots z_r} \frac{dv}{v}$$

$$= \int_{c_{\mathfrak{a}}=v}^{\infty} \int_{0=z_r}^{\infty} \dots \int_{0=z_3}^{\infty} f_1 * f_2\Big(\frac{v}{\prod_{k=4}^{n} z_k}/z_3\Big) f_3(z_3) \frac{dz_3}{z_3} \prod_{k=4}^{r_1} f_k(z_k) \prod_{k=r_1+1}^{r} f_k(z_k) \frac{dz_4 \cdots dz_r}{z_4 \cdots z_r} \frac{dv}{v}$$

$$= \int_{c_{\mathfrak{a}}=v}^{\infty} \int_{0=z_r}^{\infty} \dots \int_{0=z_{r_1+1}}^{\infty} f_1 * f_2 * \dots * f_{r_1}\Big(\frac{v}{\prod_{k=r_1+1}^{n} z_k}\Big) \prod_{k=r_1+1}^{r} f_k(z_k) \frac{dz_{r_1+1} \cdots dz_r}{z_{r_1+1} \cdots z_r} \frac{dv}{v}$$

Ab nun hat man $\prod_{k=r_1+1}^{n} z_k = \prod_{k=r_1+1}^{r} z_k^2$.
Man setzt also:

$$F(t) := f_1 * \dots * f_{r_1}(t^2).$$

Daraus folgt:

$$M(F)(x) = \int_0^{\infty} t^x F(t) \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} t^x f_1 * \dots * f_{r_1}(t^2) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{x}{2}} f_1 * \dots * f_{r_1}(t) \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2} M(f_1 * \dots * f_{r_1})\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{r_1} M(f_k)\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Somit hat man, wenn man beachtet, daß zur Anwendbarkeit von
$M^{-1}(M(F * f_{r_1+1} * \ldots f_r))(x) = F * f_{r_1+1} * \ldots f_r(x)$
$\delta > 0$ gefordert werden muß:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a}) &= \int\limits_{v=c_\mathfrak{a}}^{\infty} \int\limits_{0=z_r}^{\infty} \ldots \int\limits_{0=z_{r_1+1}}^{\infty} F\Big(\frac{\sqrt{v}}{\prod\limits_{k=r_1+2}^{r} z_k} / z_{r_1+1}\Big) f_{r_1+1}(z_{r_1+1}) \frac{dz_{r_1+1}}{z_{r_1+1}} \frac{dz_{r_1+2}\cdots dz_r}{z_{r_1+2}\cdots z_r}\frac{dv}{v} \\
&= \int\limits_{v=c_\mathfrak{a}}^{\infty} F * f_{r_1+1} * \ldots * f_r(\sqrt{v})\frac{dv}{v} = 2\int\limits_{v=\sqrt{c_\mathfrak{a}}}^{\infty} F * f_{r_1+1} * \ldots * f_r(v)\frac{dv}{v} \\
&= 2\int\limits_{v=\sqrt{c_\mathfrak{a}}}^{\infty} M^{-1}(M(F * f_{r_1+1} * \ldots * f_r))(v)\frac{dv}{v} \\
&= 2\int\limits_{v=\sqrt{c_\mathfrak{a}}}^{\infty} M^{-1}(M(F)M(f_{r_1+1})\cdots M(f_r))(v)\frac{dv}{v} \\
&= 2\int\limits_{v=\sqrt{c_\mathfrak{a}}}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} v^{-z}\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{r_1} M(f_k)(\frac{z}{2})M(f_{r_1+1})(z)\cdots M(f_r)(z))dz\frac{dv}{v} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\int\limits_{v=\sqrt{c_\mathfrak{a}}}^{\infty} v^{-z}\frac{dv}{v}\prod_{k=1}^{r_1} M(f_k)(\frac{z}{2})\prod_{k=r_1+1}^{r} M(f_k)(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{\sqrt{c_\mathfrak{a}}^{-z}}{z}\prod_{k=1}^{r_1} M(f_k)(\frac{z}{2})\prod_{k=r_1+1}^{r} M(f_r)(z)dz
\end{aligned}
$$

Dabei gilt:

$$
\begin{aligned}
M(f_k)(\frac{z}{2}) &= \int\limits_0^\infty t^{\frac{z}{2}} f_k(t)\frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty t^{\frac{z}{2}+\frac{s+s_k}{2}}\exp(-t)\frac{dt}{t} = \Gamma(\frac{z+s+s_k}{2}) \text{ für } k \le r_1, \\
M(f_k)(z) &= \int\limits_0^\infty t^{z} f_k(t)\frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty t^{z+s}\exp(-2t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2^{z+s}}\Gamma(z+s).
\end{aligned}
$$

Das ergibt (ab hier $\delta >$ Re(s)):

$$\Gamma(s,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sqrt{c_{\mathfrak{a}}}^{\,-z} \prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s+s_k}{2}) \prod_{k=r_1+1}^{r} \frac{1}{2^{z+s}}\Gamma(z+s)\frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta+s-i\infty}^{\delta+s+i\infty} \sqrt{c_{\mathfrak{a}}}^{\,-z+s} \prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2}) \prod_{k=r_1+1}^{r} \frac{1}{2^{z}}\Gamma(z)\frac{dz}{z-s}$$

$$= \sqrt{c_{\mathfrak{a}}}^{\,s}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sqrt{c_{\mathfrak{a}}4^{r_2}}^{\,-z} \prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2})\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}$$

$$= \sqrt{c_{\mathfrak{a}}}^{\,s} f(\sqrt{c_{\mathfrak{a}}4^{r_2}}^{\,-1}, s).$$

Hier war in den Integrationsgrenzen der Wechsel von $\delta + s$ zu δ nur möglich, weil zusätzlich $\delta >$ Re(s) gefordert wurde (Beweise dazu im Abschnitt über die Funktion $f(x,s)$). $f(x,s)$ war definiert als $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} x^z \prod\limits_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\Gamma(z)^{r_2}dz$.

Ist dann $N(\mathfrak{a}) = n \in \mathbb{N}$, so hat man $\sqrt{c_{\mathfrak{a}}4^{r_2}}^{\,-1} = \sqrt{\frac{D_k N(\mathfrak{f}_\chi)}{N(\mathfrak{a})^2 4^{r_2}\pi^n}} = \left(\frac{\sqrt{\frac{D_k N(\mathfrak{f}_\chi)}{4^{r_2}\pi^n}}}{n}\right)$.

Aus der Gleichung (6) S.37 folgt dann unmittelbar die Proposition von Friedman:

$$\Psi(s,\chi) = \sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n}}^{\,s} \sum_{\mathfrak{a}\text{ ganzes Ideal}} \chi(\mathfrak{a})\sqrt{\frac{N(\mathfrak{a})^2\pi^n}{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}}^{\,s} f\left(\frac{\sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n 4^{r_2}}}}{n}, s\right)\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N(\mathfrak{a})=n} \chi(\mathfrak{a}) n^s f\left(\frac{\sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n 4^{r_2}}}}{n}, s\right)\frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\chi) f\left(\frac{\sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n 4^{r_2}}}}{n}, s\right)$$

wobei $a_n(\chi) := \sum\limits_{N(\mathfrak{a})=n}\chi(\mathfrak{a})$ offensichlich die Dirichletkoeffizienten der L-Reihe $L(s,\chi)$ sind. $\square$

2. Berechnung der Dirichlet-Koeffizienten

Die Berechnung der Dirichlet-Koeffizienten $a_n(\chi)$ einer Heckeschen L-Reihe für einen gegebenen Strahlklassencharakter $\chi : I^{(\mathfrak{f}_\chi)}/H_{\mathfrak{f}_\chi} \to \mathbb{C}^*$ beruht auf dem Eulerprodukt $L(s,\chi) = \prod\limits_{\mathfrak{p}\in S} \frac{1}{1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}}$. Dabei ist $S := \mathbb{P}_k \setminus \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } \mathfrak{f}_\chi\}$.

Man beachtet nun $\frac{1}{1-\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{k=0}^\infty (\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s})^k$ und wendet auf diese Faktoren sukzessive das Cauchyprodukt an:
Die Primideale $\mathfrak{p} \in S$ seien so durchnumeriert, daß die Numerierung die Größe der Idealnormen beachtet. Sei

$$\prod_{k=1}^{n_0} \frac{1}{1-\frac{\chi(\mathfrak{p}_k)}{N(\mathfrak{p}_k)^s}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(n_0)} \frac{1}{n^s}.$$

. Dies ergibt mit $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_{n_0+1}$ und $\mathbf{q} := N(\mathfrak{p})$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n_0+1} \frac{1}{1-\frac{\chi(\mathfrak{p}_k)}{N(\mathfrak{p}_k)^s}} &= (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(n_0)} \frac{1}{n^s}) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbf{q}^s}\right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathbf{q}^k m = n} a_m^{(n_0)} \chi(\mathfrak{p})^k \right) \frac{1}{n^s}.\end{aligned}$$

Also hat man:

$$a_n^{(n_0+1)} = \sum_{k=0}^{k_0} \chi(\mathfrak{p})^k a_{n/\mathbf{q}^k}^{(n_0)}, \tag{13}$$

wobei k_0 die größte natürliche Zahl ist, so daß $\mathbf{q}^{k_0}/n$ gilt. Bei der Berechnung von $a_1 \ldots a_n$ ist es also maximal notwendig, die rationalen Primzahlen von der Größe $\leq n$ zu faktorisieren. Für die resultierenden Primteiler $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ muß dann die Klasse mit dem in [17] beschriebenen Verfahren berechnet werden. Daraus läßt sich der Wert $\chi(\mathfrak{p}_n)$ bestimmen.

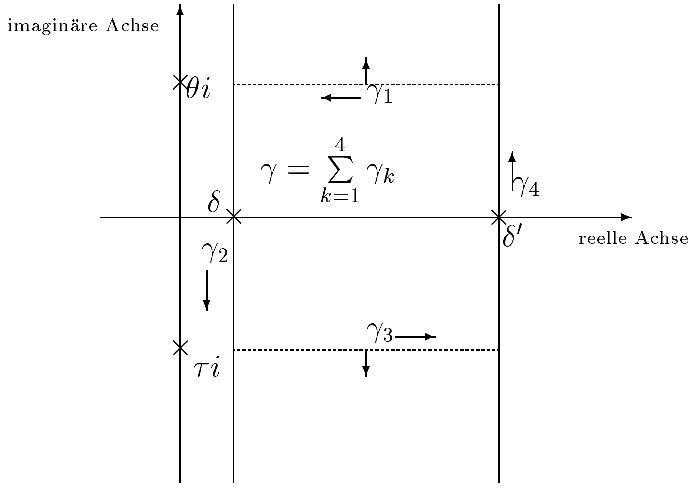
Es sei noch angemerkt, daß man zur Berechnung von Starkeinheiten für alle Charaktere $\chi \in \mathcal{G}(K/k)$ die Dirichletkoeffizienten $a_n(\chi)$ bestimmen muß. Hier ist $[K : H_k] = 2$ und H_k der Hilbertsche Klassenkörper von k. Die Anzahl halbiert sich bereits dadurch, daß man von der Hälfte der Charaktere weiß, daß $L'(0,\chi) = 0$ ist. Eine zweite Verringerung der Anzahl ergibt sich dadurch, daß für $\overline{\chi}$ folgt: $a_n(\overline{\chi}) = \overline{a_n(\chi)}$.

Ist die Klassengruppe von k eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung (C_p, $p \neq 2$), so muß man eigentlich immer nur für genau zwei Charaktere die Dirchlet-koeffizienten berechnen, wenn man bedenkt, daß die Dirchletkoeffizienten in einem Kreisteilungskörper liegen. Denn dann hat man:

$\mathcal{G}(K/k) \cong C_p \times C_2$. Die duale Gruppe ist dieser isomorph, hat also die gleiche Struktur $C_p \times C_2$. Es wird im Kapitel V gezeigt, daß nur diejenigen Charakter, deren Wert auf dem C_2-Anteil von $G(K/k)$ gleich -1 ist, überhaupt einen Beitrag zur Berechnung der Starkeinheit liefern. Der Wert der Charaktere auf dem C_p-Anteil von $G(K/k)$ ist aber entweder gleich 1 oder eine p-te Einheitswurzel. Man muß also für diesen ersten Charakter und dann für irgendeinen der anderen Charaktere die Dirichletkoeffizienten berechnen, denn alle anderen relevanten Dirchletkoeffizienten sind das Bild der Körperautomorphismen von $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})/\mathbb{Q}$.

3. Berechnung von $f(x,s)$

3.1. Theorie von $f(x,s)$



Durchläuft man den rechteckigen Integrationsweg γ und wählt $\delta \leq \delta'$ so, daß die Pole von $x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right) \Gamma(z)^{r_2} \frac{1}{z-s}$, (welche offensichtlich entweder bei $z = s$ oder $\in \mathbb{Z}^{\leq 0}$ sind), sich außerhalb des durch γ berandeten Rechteckes befinden, so ergibt der Cauchysche Integralsatz

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right) \Gamma(z)^{r_2} \frac{dz}{z-s} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right) \Gamma(z)^{r_2} \frac{dz}{z-s}.$$

Die Stirlingsche Formel besagt

$$\log \Gamma(z) = (z - 1/2)\log(z) - z + \log\sqrt{2\pi} + O(|z|^{-1}),$$

wobei für $\epsilon > 0$ und $-\pi + \epsilon \leq \arg(z) \leq \pi - \epsilon$ dann $|O(t)| \leq Konst.(\epsilon)|t|$ gilt.
Sei nun $\sigma :=$Re(z) und $t :=$Im(z).

Aus der Stirlingschen Formel leitet man her:

$$|\Gamma(\sigma+it)| = |t|^{\sigma-1/2}\exp(-(\pi/2)|t|)\sqrt{2\pi}(1+O(1/|t|))$$

für $\alpha \le \sigma \le \beta$ und $1 < |t|$, wobei eben die Konstante in $O(1/|t|)$ nur vom Intervall $[\alpha,\beta]$ abhängt [10, S.338-344].
Hieraus erhält man eine integrierbare Majorante für den Integranden

$$x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s},$$

wenn man beachtet $|t|^{\sigma-1/2}\exp(-(\pi/2)|t|) = \exp(-|t|(\frac{\log|t|}{|t|}(1/2-\sigma)+\pi/2))$. Daraus folgt: Für $|t| > c_1$ gilt $|t|^{\sigma-1/2}\exp(-(\pi/2)|t|) \le C_1\exp(-(\pi/4)|t|)$ mit von $[\alpha,\beta]$ abhängigen positiven reellen Konstanten c_1 und C_1.
Damit folgt mit geeigneten Konstanten $c_2 \le |t|$, C_2, die von s und $[\alpha,\beta]$ abhängen:

$$|x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}| \le C_2x^\sigma\exp(-(\pi/8)(2r_2+r_1)|t|).$$

Dies ist eine integrierbare Majorante, somit ist die Funktion $f(x,s)$ für festes δ definiert. Geht man auf dem Integrationsweg γ mit $\theta\to+\infty$ und $\tau\to-\infty$, so ergibt sich

$$|\int\limits_{\gamma_1(\theta)} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}| \le C_2\exp(-(\pi/8)(2r_2+r_1)|\theta|)|\int\limits_{\delta}^{\delta'} x^\sigma d\sigma|,$$

d.h.

$$\lim_{\theta\to\infty}\int\limits_{\gamma_1(\theta)} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s} = 0$$

und

$$\lim_{\tau\to-\infty}\int\limits_{\gamma_3(\tau)} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s} = 0.$$

Der Cauchysche Integralsatz ergibt also nach diesem Grenzübergang

$$\int\limits_{\gamma_4} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s} = \int\limits_{-\gamma_2} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s},$$

d.h.:

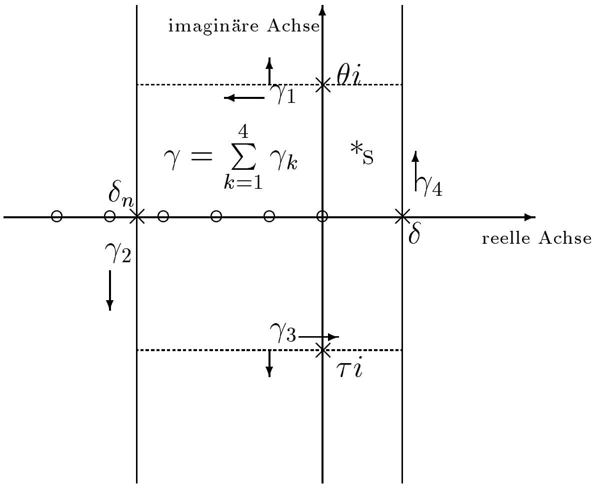
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-\infty i}^{\delta+\infty i} x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta'-\infty i}^{\delta'+\infty i} x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s},$$

womit bewiesen ist, daß

$$\begin{aligned} f(x,s) &:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-\infty i}^{\delta+\infty i} x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta'-\infty i}^{\delta'+\infty i} x^z \left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s} \end{aligned} \tag{14}$$

wohldefiniert ist für δ bzw. $\delta' > \mathrm{Max}\{\ \mathrm{Re}(s), 0\}$.

Nimmt man nun an, daß der Integrationsweg γ auch Pole der Funktion $x^z\left(\prod\limits_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}$ einschließt, so erhält man folgendes Bild:



Sei $\delta_n := -2n + 1/2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ergibt der Residuensatz:

$$\sum_{Re(z')>\delta_n} Res_{z=z'}\left(x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}$$
$$=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_n-i\infty}^{\delta_n+i\infty} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}$$

Das letzte Gleichheitszeichen entsteht durch einen völlig analogen Grenzübergang wie zuvor, indem man nämlich mit den beiden waagerechten Integrationswegen γ_1 bzw. γ_3 jeweils nach $+i\infty$ bzw. $-i\infty$ geht.
Als Konsequenz erhält man

$$f(x,s)=\sum_{Re(z')>\delta_n} Res_{z=z'}\left(x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_n-i\infty}^{\delta_n+i\infty} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}$$

Um also die Konvergenz der Reihe $\sum_{Re(z')>-\infty} Res_{z=z'}\left(x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}\right)$ beurteilen zu können, muß das Restglied abgeschätzt werden:

$$|\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_n-i\infty}^{\delta_n+i\infty} x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{dz}{z-s}|\leq \tag{15}$$

$$\frac{C_0x^{\delta_n}}{(n-1)^{(n-1)r_1}(2n-1))^{(2n-1)r_2}|Re(s)-\delta_n|}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{r_1}|\Gamma(\frac{\frac{1}{2}+it+s_k}{2})|\right)|\Gamma(\frac{1}{2}+it)|^{r_2}dt$$

Dabei ist C_0 eine Konstante; die Abschätzung wird gewonnen, indem man die Funktionalgleichung der Gammafunktion auf die einzelnen Γ-Faktoren mehrfach anwendet und die dabei entstehenden Fakultäten $m!$ durch die Stirlingsche Formel abschätzt.

Man sieht, daß die Abschätzung mit $x \to 0$ immer schlechter wird, wobei dieses auch der wesentliche Nachteil der Berechnung von $f(x,s)$ über die Summe der Residuen ist: Man muß mit wachsendem n in $f(\frac{C}{n},s)$ mehr Folgenglieder zur Reihe der Residuen dazu addieren. (vgl.: [24, S.39], Proposition 2.7.)
Das Verfahren wurde meines Wissens von Tollis [24] zum erstenmal zur Berechnung der Werte einer Dedekindschen Zetafunktion angewandt, liefert befriedigende Resultate und ist das derzeit effektivste Verfahren zur numerischen Berechnung von Heckeschen L-Reihen.

Im nächsten Abschnitt gebe ich die Methode von Tollis zur Berechnung von $f(x,s)$ an. Sie muß allerdings zu ihrer Anwendung auf Hecke L-Reihen verallgemeinert werden.

3.2. Praktische Berechnung

Wie die Theorie der Funktion $f(x,s)$ ergibt, so muß man die Residuen des Integranden $x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}$ berechnen. Dazu beachtet man folgendes:

$$\log\Gamma(z+1) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{k}(-z)^k \text{ für } |z|<1 \tag{16}$$

Dabei ist $\gamma := \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} - \log(k)\right)$ die Eulersche Konstante. [1]
Die Definition des Logarithmus der Γ-Funktion bereitet keine Schwierigkeiten, da $\Gamma(z)\neq 0$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^{\leq 0}$.
Mit der Verdopplungsformel

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}2^{-2z}\Gamma(2z) \tag{17}$$

folgt dann aus (16) für $|z|<1$:

$$\log\Gamma(\frac{z+1}{2}) = \log\sqrt{\pi} - (\frac{1}{2}\gamma + \log(2))z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\zeta(k)}{k}(1-\frac{1}{2^k})z^k \tag{18}$$

Bildet man das Produkt zweier meromorpher Funktionen $h(z)$, $g(z)$ mit $h(z) = \sum_{k=-n_0}^{-1} a_k(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$, so erhalte ich den meromorphen Anteil des Produktes $g(z)h(z) = \sum_{k=-n_0}^{-1} a_k(z-z_0)^{-k}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ als:

$$\sum_{k=-n_0}^{-1}(\sum_{j=-n_0}^{k} a_j b_{k-j})(z-z_0)^k \tag{19}$$

bzw.:

$$\sum_{k=-n_0-1}^{-1}\left(\sum_{j=-n_0}^{k+1} a_j b_{k-j}\right)(z-z_0)^k \text{ falls} \tag{20}$$

$$g(z)=\sum_{k=-1}^{\infty} b_k(z-z_0)^k. \tag{21}$$

d.h. die Funktion g an der Stelle $z=z_0$ einen einfachen Pol hat.

Aus der Funktionalgleichung $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ der Γ-Funktion folgt:

$$\Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(z-k)}, \text{ daraus folgt: } \Gamma(z)=\frac{\Gamma((z+n)+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}((z+n)-k)}. \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\text{Aus } \Gamma\left(\frac{z-2n}{2}\right)&=\frac{\Gamma(\frac{z}{2}+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{z}{2}-k)} \text{ folgt:}\\ \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)&=\frac{\Gamma(\frac{z+2n}{2}+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{z+2n}{2}-k)}=\frac{\Gamma(\frac{z+2n+1}{2}+\frac{1}{2})}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{z+2n+1}{2}-\frac{2k+1}{2})}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{z-(2n+1)}{2}\right)&=\frac{\Gamma(\frac{z}{2}-\frac{1}{2})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\frac{z-1}{2}-k)}, \text{ also folgt:}\\ \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)&=\frac{\Gamma(\frac{z+2n}{2}+\frac{1}{2})}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\frac{z+2n}{2}-\frac{2k+1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{z+2n+1}{2}+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{z+2n+1}{2}-k)}\end{aligned} \tag{24}$$

Daraus folgt für $0<|z+n|<1$:

$$\begin{aligned}&\log\Gamma(z)=\\ &-\gamma(z+n)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{k}(-(z+n))^k-\log(z+n)-\log((-1)^n n!)-\sum_{m=1}^{n}\log\left(1-\frac{z+n}{m}\right)\\ &=-\gamma(z+n)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{k}(-(z+n))^k-\log(z+n)-\log((-1)^n n!)+\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z+n}{m}\right)^k\end{aligned}$$

Also:

(25)
$$\Gamma(z) = \frac{1}{(-1)^n n!(z+n)} \exp\left[(-\gamma + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m})(z+n) + \sum_{k=2}^{\infty}((-1)^k \zeta(k) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^k})\frac{1}{k}(z+n)^k\right]$$

Für $0 < |z+2n| < 1$:

(26)
$$\Gamma(\frac{z}{2}) = \frac{2}{(-1)^n n!(z+2n)} \exp\left[(-\frac{\gamma}{2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m})(z+2n) + \sum_{k=2}^{\infty} \left((\frac{-1}{2})^k \zeta(k) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m)^k}\right) \frac{1}{k}(z+2n)^k\right]$$

(27)
$$\Gamma(\frac{z+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)^n 4^n n!}{(2n)!} \exp\left[\left(-(\frac{\gamma}{2} + \log(2)) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2m+1}\right)(z+2n) + \sum_{k=2}^{\infty} \left((-1)^k \zeta(k)(1 - \frac{1}{2^k}) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m+1)^k}\right) \frac{(z+2n)^k}{k}\right]$$

Für $0 < |z+2n+1| < 1$:

(28)
$$\Gamma(\frac{z}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n+1} 4^{n+1} (n+1)!}{(2(n+1))!} \exp\left[\left(-(\frac{\gamma}{2} + \log(2)) + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2m+1}\right)(z+2n+1) + \sum_{k=2}^{\infty} \left((-1)^k \zeta(k)(1 - \frac{1}{2^k}) + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(2m+1)^k}\right) \frac{(z+2n+1)^k}{k}\right]$$

(29)
$$\Gamma(\frac{z+1}{2}) = \frac{2}{(-1)^n n!(z+2n+1)} \exp\left[(-\frac{\gamma}{2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m})(z+2n+1) + \sum_{k=2}^{\infty}((\frac{-1}{2})^k \zeta(k) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m)^k})\frac{(z+2n+1)^k}{k}\right]$$

Diese Gleichungen ergeben mit $m_0 := \#\{s_k \mid s_k = 1, k = 1 \dots r_1\}$ an der Stelle $z_0 = -2n$ für $0 < |z - z_0| < 1$:

(30)
$$\left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right) \Gamma(z)^{r_2} = \exp\left(\sum_{k=1}^{m_0} \log\Gamma(\frac{z+1}{2}) + \sum_{k=1}^{r_1-m_0} \log\Gamma(\frac{z}{2}) + r_2 \log\Gamma(z)\right)$$
$$= \frac{(-1)^{(z_0 r_2 + n r_1)} 2^{r_1-m_0} \sqrt{\pi}^{m_0} 4^{n m_0} n!^{(2m_0-r_1)}}{((2n)!)^{m_0} (-z_0)!^{r_2} (z-z_0)^{(r_1+r_2-m_0)}} \exp(g(z)).$$

wobei
$$g(z) := \left(r_2 \sum_{m=1}^{-z_0} \frac{1}{m} + m_0 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2m+1} + (r_1 - m_0) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m}\right.$$
$$\left. -(\frac{r_1}{2} + r_2)\gamma - m_0 \log(2)\right)(z - z_0)$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left((-1)^k \zeta(k)(r_2 + m_0 + \frac{r_1 - 2m_0}{2^k}) + r_2 \sum_{m=1}^{-z_0} \frac{1}{m^k}\right.$$
$$\left. + m_0 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m+1)^k} + (r_1 - m_0) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m)^k}\right) \frac{(z-z_0)^k}{k}$$

Für $-z_0 = 2n + 1$ und $0 < |z - z_0| < 1$:

(31)
$$\left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right) \Gamma(z)^{r_2} =$$
$$\left(\frac{-2}{2n+1}\right)^{r_1-m_0} \frac{(-1)^{(z_0 r_2 + n r_1)} 2^{m_0} \sqrt{\pi}^{r_1-m_0} 4^{n(r_1-m_0)} n!^{(r_1-2m_0)}}{((2n)!)^{r_1-m_0} (-z_0)!^{r_2} (z-z_0)^{(r_2+m_0)}} \exp(g(z)).$$

wobei
$$g(z) := \left(r_2 \sum_{m=1}^{-z_0} \frac{1}{m} + (r_1 - m_0) \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2m+1} + m_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m}\right.$$
$$\left. -(\frac{r_1}{2} + r_2)\gamma - (r_1 - m_0)\log(2)\right)(z - z_0)$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \left((-1)^k \zeta(k)(r_2 + r_1 - m_0 + \frac{2m_0 - r_1}{2^k}) + r_2 \sum_{m=1}^{-z_0} \frac{1}{m^k}\right.$$

$$+(r_1-m_0)\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(2m+1)^k}+m_0\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(2m)^k}\Bigg)\frac{(z-z_0)^k}{k}$$

.

Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion läßt sich dann der meromorphe Anteil der Funktion $\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}$ bei z_0 berechnen, wobei man beachtet, daß man die Koeffizienten der Funktion $g(z)$ nur bis $k=r_1+r_2-m_0$ bzw. $k=r_2+m_0$ berechnen muß, wenn man noch das konstante Glied der Laurentreihe haben will.

Sei weiterhin $z_0\in\mathbb{Z}^{\leq 0}$. Ist dann

$$\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}=\sum_{k=0}^{m}A_{z_0,k}(z-z_0)^{-k}+h(z). \tag{32}$$

wobei $h(z)$ bei z_0 holomorph ist und $h(z_0)=0$ gilt, $m=r_1+r_2-m_0$ für z_0 gerade, $m=r_2+m_0$ für z_0 ungerade, so berechnet man daraus den meromorphen Anteil von $\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}=\sum_{k=0}^{m}A_{z_0,k}(s)(z-z_0)^{-k}+h_s(z)$ folgendermaßen ($h_s(z_0)=0$ und h_s holomorph bei z_0):

$$\text{Für } s\neq z_0: A_{z_0,k}(s)=\frac{A_{z_0,k+1}(s)-A_{z_0,k}}{s-z_0} \tag{33}$$

$$\text{und für } s=z_0: A_{z_0,k}(s)=A_{z_0,k-1}. \tag{34}$$

Anfangswerte für den Fall $s\neq z_0$ sind:

$$A_{z_0,m}(s)=\frac{-A_{z_0,m}}{s-z_0}.$$

[24]

Beweis: Für $z_0=s$ ergibt sich

$$\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}=\sum_{k=0}^{m}A_{z_0,k}(z-z_0)^{-(k+1)}+h_1(z).$$

wobei $h_1(z):=h(z)/(z-z_0)$ ist also bei z_0 holomorph ist, da $h(z_0)=0$ gilt. Damit ist der zweite Teil der Behauptung bewiesen.

Falls aber $s \neq z_0$ gilt, so hat man

$$\sum_{k=0}^{m} A_{z_0,k}(z-z_0)^{-k} + h(z) = (z-s)\left(\sum_{k=0}^{m} A_{z_0,k}(s)(z-z_0)^{-k} + h_s(z)\right)$$

$$= ((z-z_0)+(z_0-s))\left(\sum_{k=0}^{m} A_{z_0,k}(s)(z-z_0)^{-k} + h_s(z)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} A_{z_0,k}(s)(z-z_0)^{-k+1} + (z-z_0)h_s(z) + \sum_{k=0}^{m}(z_0-s)A_{z_0,k}(s)(z-z_0)^{-k} + (z_0-s)h_s(z).$$

Der Identitätssatz für Potenzenreihen ergibt dann:

$$A_{z_0,k} = A_{z_0,k+1}(s) + (z_0-s)A_{z_0,k}(s)$$

und speziell:

$$A_{z_0,m} = (z_0-s)A_{z_0,m}(s).$$

□

Daraus berechnet man dann den meromorphen Anteil bei $z = z_0$ von $x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}$ mit Hilfe von (19) und von $x^z = x^{z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log^k x}{k!}(z-z_0)^k$:

$$\sum_{k=-m}^{-1}\left(\sum_{j=-m}^{k} A_{z_0,-j}(s)x^{z_0}\frac{\log(x)^{k-j}}{(k-j)!}\right)(z-z_0)^k \tag{35}$$

Hiervon interessiert dann aber nur das Residuum:

$$Res_{z=z_0}\left(x^z\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}\right)\right) = x^{z_0}\sum_{j=1}^{m} A_{z_0,j}(s)\frac{\log(x)^{j-1}}{(j-1)!} \tag{36}$$

Ist $s \notin \mathbb{Z}^{\leq 0}$, so ergibt sich ein zusätzliches Residuum der Funktion $x^z\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\Gamma(z)^{r_2}\frac{1}{z-s}$ bei $z = s$ als:

$$x^s\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{s+s_k}{2})\right)\Gamma(s)^{r_2} \tag{37}$$

<u>Zusammenfassend</u>: Alle Residuen bei $z_0 \in \mathbb{Z}^{\leq 0}$ berechnet man also mit (36) und für $s \notin \mathbb{Z}^{\leq 0}$ das eine Residuum bei $z = s$ nach der Formel (37). Aufsummiert wird die Reihe dieser Residuen nach wachsendem $-z_0 \in \mathbb{N}_0$.

3.3. Eine andere Methode der Berechnung von $f(x,s)$

Die geschilderte Methode der Berechnung der Funktion $f(x,s)$ kann folgendermaßen effektiviert werden:
Für imaginärquadratische Körper ist

$$f(x,s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} x^z \Gamma(z) \frac{dz}{z-s}$$

Wegen der schon nachgewiesenen Konvergenzeigenschaften ergibt sich:

$$\begin{aligned} x\frac{d}{dx} f(x,s) &= x\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{d}{dx} x^z \Gamma(z) \frac{dz}{z-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} z x^z \Gamma(z) \frac{dz}{z-s} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} (z-s) x^z \Gamma(z) \frac{dz}{z-s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} s x^z \Gamma(z) \frac{dz}{z-s} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} (\frac{1}{x})^{-z} \Gamma(z) dz + s f(x,s) \end{aligned}$$

Man erhält also eine lineare Differentialgleichung. Dabei gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} (\frac{1}{x})^{-z} \Gamma(z) dz = \exp(\frac{-1}{x})$$

Dies folgt aus bekannten Tatsachen über die Mellintransformation.
Man kann nun die Differentialgleichung $x\frac{d}{dx} f(x,s) = \exp(-\frac{1}{x}) + s f(x,s)$ dazu verwenden, die Taylorkoeffizienten dieser Funktion rekursiv auszurechnen. Beschrieben wird dies bereits von Tollis [24]. Dieses Verfahren zur Berechnung der Funktion $f(x,s)$ wird in dem Artikel von Roblot und Cohen [2] auf reellquadratische Zahlkörper angewandt.

Allgemein läßt sich folgende Differentialgleichung für die Funktion $f(x,s)$ bestimmen:

$$x\frac{d}{dx} f(x,s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} (\frac{1}{x})^{-z} \left(\prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{z+s_k}{2}) \right) \Gamma(z)^{r_2} dz + s f(x,s)$$

Für die interessierenden Anwendungen der Berechnung von Stark-Einheiten beschränke ich mich nun auf den Fall, daß $\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}=\Gamma(\frac{z+1}{2})^r\Gamma(z)$ gilt. Mit der Verdopplungsformel (17) ergibt sich für den Fall $\left(\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{z+s_k}{2})\right)\Gamma(z)^{r_2}=\Gamma(\frac{z+1}{2})^{r+1}\Gamma(\frac{z}{2})$, daß $\Gamma(\frac{z+1}{2})^{r+1}\Gamma(\frac{z}{2})=\frac{2\sqrt{\pi}}{2^z}\Gamma(\frac{z+1}{2})^r\Gamma(z)$ gilt.

Zuerst werde ich eine Differentialgleichung für

$$F_r(x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}x^{-z}\Gamma(\frac{z+1}{2})^r\Gamma(z)dz$$

ableiten.
Sei r=1. Dann ergibt sich:

$$\frac{d^2}{dx^2}F_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}z(z+1)x^{-(z+2)}\Gamma(\frac{z+1}{2})\Gamma(z)dz,$$
$$x\frac{d^3}{dx^3}F_1(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}z(z+1)(z+2)x^{-(z+2)}\Gamma(\frac{z+1}{2})\Gamma(z)dz.$$

Für den Integranden $y_1(x,z):=x^{-z}\Gamma(\frac{z+1}{2})\Gamma(z)$ gilt:

$$\begin{aligned}x\frac{d^3}{dx^3}y_1(x,z)+\frac{d^2}{dx^2}y_1(x,z)&=-x^{-(z+2)}(z+1)^2z\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma(z)\\&=(-2)x^{-(z+2)}\Gamma\left(\frac{(z+2)+1}{2}\right)\Gamma(z+2)=(-2)y_1(x,z+2),\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$
\begin{aligned}
& x\frac{d^3}{dx^3}F_1(x) + \frac{d^2}{dx^2}F_1(x) \\
&= (-2)\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} x^{-(z+2)}\Gamma\left(\frac{(z+2)+1}{2}\right)\Gamma(z+2)dz \\
&= (-2)\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta+2-i\infty}^{\delta+2+i\infty} x^{-z}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma(z)dz \\
&= (-2)\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} x^{-z}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma(z)dz \\
&= (-2)F_1(x).
\end{aligned}
$$

Es gelte für ein gegebenes $r \geq 1$, $y_r(x,z) := x^{-z}\Gamma(\frac{z+1}{2})^r\Gamma(z)$:

$$\sum_{k=0}^{r} a_k(r)x^k\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}y_r(x,z) = (-2)^r y_r(x,z+2),$$

$$\text{also: } \sum_{k=0}^{r} a_k(r)x^k\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}F_r(x) = (-2)^r F_r(x) \tag{38}$$

mit: $a_r(r) = 1$ und $a_0(r) = 1$.
Beachtet man:

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}y_{r+1}(x,z) = (-1)^n z\cdots(z+(n+1))x^{-(z+n+2)}\Gamma(\frac{z+1}{2})^{r+1}\Gamma(z),$$

so folgt:

$$
\begin{aligned}
&x\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}y_{r+1}(x,z)+n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}y_{r+1}(x,z)\\
&=(-1)^n z\cdots(z+n)[(z+(n+1))-n)]x^{-(z+n+1)}\Gamma(\frac{z+1}{2})^{r+1}\Gamma(z)\\
&=(-1)^n z\cdots(z+n)x^{-(z+n+1)}\Gamma(\frac{z+1}{2})^{r}\Gamma(z)\Gamma(\frac{z+1}{2})2\frac{(z+1)}{2}\\
&=2(-1)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}y_r(x,z)\Gamma(\frac{z+1}{2})\frac{(z+1)}{2}\\
&=(-2)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}y_r(x,z)\Gamma\left(\frac{(z+2)+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich induktiv:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r}a_k(r)x^k&\left(x\frac{d^{k+3}}{dx^{k+3}}y_{r+1}(x,z)+(k+1)\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}y_{r+1}(x,z)\right)\\
&=(-2)^r(-2)y_r(x,z+2)\Gamma\left(\frac{(z+2)+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\sum_{k=0}^{r+1}a_k(r+1)x^k\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}y_{r+1}(x,z)=(-2)^{r+1}y_{r+1}(x,z+2)
$$

$$
\Rightarrow\sum_{k=0}^{r+1}a_k(r+1)x^k\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}F_{r+1}(x)=(-2)^{r+1}F_{r+1}(x),
$$

wobei:

$a_{r+1}(r+1)=1=a_0(r+1)$ und $a_k(r+1)=a_{k-1}(r)+(k+1)a_k(r)$ für $0<k\le r$

Die Differentialgleichung zu $g_s(x):=f(\frac{1}{x},s)$ ergibt sich als:

$$
x\frac{d}{dx}g_s(x)+F_r(x)+sg_s(x)=0
$$

Leitet man diese $k+2$-mal ab, so hat man:

$$
x\frac{d^{k+3}}{dx^{k+3}}g_s(x)+\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}F_r(x)+(s+(k+2))\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}g_s(x)=0
$$

Also folgt mit (38):

$$
\sum_{k=0}^{r}a_k(r)x^k\left(x\frac{d^{k+3}}{dx^{k+3}}g_s(x)+(s+(k+2))\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}g_s(x)\right)=(-2)^r\left(x\frac{d}{dx}g_s(x)+sg_s(x)\right).
$$

Damit hat man eine Differentialgleichung für $g_s(x) = f(\frac{1}{x}, s)$,

$$\sum_{k=0}^{r+1}\left[[a_{k-1}(r) + a_k(r)(s+(k+2))]x^k \frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}g_s(x)\right] + (-2)^{r+1}\left(x\frac{d}{dx}g_s(x) + sg_s(x)\right) = 0,$$

wenn man $a_{r+1}(r) := 0$ und $a_{-1}(r) := 0$ setzt. Nun interessieren genau die Werte $f(\frac{C}{n}, s)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wenn man also obige Differentialgleichung schreibt als

$$\sum_{k=0}^{r+1} b_k(s)x^k \frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}g_s(x) + (-2)^{r+1}\left(x\frac{d}{dx}g_s(x) + sg_s(x)\right) = 0,$$

so ergibt sich als Differentialgleichung für $G_s(x) := g_s(\frac{x}{C}) = f(\frac{C}{x}, s)$:

$$\sum_{k=0}^{r+1} b_k(s)x^k G_s^{(k+2)}(x) + \frac{(-2)^{r+1}}{C^2}\left(xG_s^{(1)}(x) + sG_s(x)\right) = 0.$$

Für $n \leq 2$ ist die Berechnung der Reihe der Residuen günstig, wie die Abschätzung (15) S.47 zeigt.
Für $n > 2$ hat man:

$$f(\frac{C}{n}, s) = G_s(n) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{G_s^{(l)}(n-1)}{l!}$$
$$\text{bzw.: } G_s^{(k)}(n) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{G_s^{(l+k)}(n-1)}{l!}$$

für $1 \leq k \leq r+2$.
Aus gegebenen Anfangswerten für $G_s^{(k)}(2)$ mit $0 \leq k \leq r+2$, lassen sich mit den obigen Taylorreihen und der Differentialgleichung rekursiv alle in der Formel von Friedman benötigten Werte $f(\frac{C}{n}, s)$ mit $n \geq 3$ berechnen.

Zur Berechnung der Anfangswerte $G_s^{(k)}(2)$ mit $1 \leq k \leq r+2$ beachtet man:

$$G_s^{(k)}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}(z\cdots(z+k-1))(-1/C)^k\left(\frac{x}{C}\right)^{-(z+k)}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)^r\Gamma(z)\frac{dz}{z-s}$$

Der Integrant $(z\cdots(z+k-1))(-1/C)^k\left(\frac{x}{C}\right)^{-(z+k)}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)^r\Gamma(z)\frac{1}{z-s}$ sei mit $F_{s,x}^{(k)}(z)$ bezeichnet. Von diesem berechnet man die Reihe der Residuen wie im letzten Abschnitt und erhält so den Wert $G_s^{(k)}(x)$:
Hat man (vgl.: S.53) $\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)^r\Gamma(z)\frac{1}{z-s} = \sum_{j=0}^{m}(A_{z_0,j}(s)(z-z_0)^{-j}) + A_{z_0,0}(s) + h_s(z)$

(mit h_z holomorph bei $z = z_0$ und $h_s(z_0) = 0$), und weiter den meromorphen Anteil der Funktion (vgl.: S.54 (35))

$$x^{-z}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)^r \Gamma(z)\frac{1}{z-s} = \sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}(z)$$

($h_{s,x}$ ist holomorph bei $z = z_0$) bestimmt, so beachtet man zunächst:

$$F_{s,x}^{(k+1)}(z) = -\frac{1}{x}(z+k)F_{s,x}^{(k)}(z)$$

und

$$F_{s,x}^{(0)}(z) = x^{-z}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)^r \Gamma(z)\frac{1}{z-s} = \sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}(z).$$

Sei

$$F_{s,x}^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}^{(k)}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}^{(k)}(z)$$

mit bei $z = z_0$ holomorphem $h_{s,x}^{(k)}$, so folgt also:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x}(z+k)F_{s,x}^{(k)}(z) =& -\frac{1}{x}(z+k)\left(\sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}^{(k)}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}^{(k)}(z)\right) \\
=&(z-z_0)\left(\frac{-1}{x}\sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}^{(k)}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}^{(k)}(z)\right) \\
&+ (z_0+k)\left(\frac{-1}{x}\sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}^{(k)}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}^{(k)}(z)\right) \\
=&\frac{-(z_0+k)}{x}B_{z_0,m}^{(k)}(s,x)(z-z_0)^{-m} \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1}\frac{-1}{x}\left(B_{z_0,j+1}^{(k)}(s,x) + (z_0+k)B_{z_0,j}^{(k)}(s,x)\right)(z-z_0)^{-j} + H(z).
\end{aligned}$$

$H(z)$ ist eine bei $z = z_0$ holomorphe Funktion.
Wegen

$$F_{s,x}^{(k+1)}(z) = \sum_{j=0}^{m} B_{z_0,j}^{(k+1)}(s,x)(z-z_0)^{-j} + h_{s,x}^{(k+1)}(z)$$

hat man dann:

(39)
$$B^{(k+1)}_{z_0,m}(s,x) = \frac{-(z_0+k)}{x} B^{(k)}_{z_0,m}(s,x) \text{ und}$$
$$B^{(k+1)}_{z_0,j}(s,x) = \frac{-1}{x}\left(B^{(k)}_{z_0,j+1}(s,x) + (z_0+k)B^{(k)}_{z_0,j}(s,x)\right) \text{ für } j < m.$$

Damit ergibt sich jeweils

$$Res_{z=z_0} F^{(k)}_{s,x}(z) = B^{(k)}_{z_0,1}(s,x)$$

und für $s \notin \mathbb{Z}^{\leq 0}$:

$$Res_{z=s} F^{(k)}_{s,x}(z) = (s \cdots (s+k-1))(-1/C)^k \left(\frac{x}{C}\right)^{-(s+k)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^r \Gamma(s).$$

Man hat dann:

$$G^{(k)}_s(2) = Res_{z=s} F^{(k)}_{s,2}(z) + \sum_{z_0=0}^{-\infty} B^{(k)}_{z_0,1}(s,2).$$

Nun soll die Konvergenz der Reihe $f(\frac{C}{n}, s) = G_s(n) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{G^{(l)}_s(n-1)}{l!}$ untersucht werden.

Eine Abschätzung des m-ten Restgliedes in dieser Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $n-1$ ergibt ($n-1 < \xi < n$) ($\delta >$ Re(s)):

$$|\frac{G^{(m+1)}_s(\xi)}{(m+1)!}| =$$
$$|\frac{(-1/C)^{m+1}}{2\pi i(m+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{m}(\delta+j+it)\right)\left(\frac{\xi}{C}\right)^{-(\delta+m+1+it)} \Gamma(\frac{\delta+it+1}{2})^r \Gamma(\delta+it)\frac{dt}{\delta+it-s}|$$
$$\leq \frac{C^\delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\Gamma(\delta+m+1+it)}{(m+1)!}| \left(\frac{1}{n-1}\right)^{(\delta+m+1)} |\Gamma(\frac{\delta+it+1}{2})|^r \frac{dt}{|\delta+it-s|}$$

Zur weiteren Abschätzung beachtet man die Produktdarstellung der Gammafunktion:

(40)
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\exp(\gamma z)\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})\exp(-\frac{z}{k}).$$

Dieses Produkt konvergiert lokal gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dann ist also für $z = \sigma + it$ mit $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(\sigma)}\right| = \frac{\sigma}{|z|} |\exp(-i\gamma t)| \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{k+\sigma}{k+z}\right| |\exp(\frac{\gamma it}{k})|.$$

Aber es gilt $\frac{\sigma}{|z|} \leq 1$ und $\left|\frac{k+\sigma}{k+z}\right| \leq 1$, also:

$$|\Gamma(\sigma + it)| \leq \Gamma(\sigma).$$

Damit folgt für $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} &|\frac{G_s^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}| \\ \leq &\frac{\Gamma(\delta+m+1)}{(m+1)!} \frac{C^\delta}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\frac{\delta+it+1}{2})| \frac{dt}{|\delta+it-s|} \right) \left(\frac{1}{n-1}\right)^{(\delta+m+1)} |\Gamma(\frac{\delta+1}{2})|^{r-1}. \end{aligned}$$

Die Schwarzsche Ungleichung für Integrale zeigt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\frac{\delta+it+1}{2})| \frac{1}{|\delta+it-s|} dt \leq \\ &\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\frac{\delta+it+1}{2})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\delta+it-s} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Beachtet man dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\frac{\delta+it+1}{2})|^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\frac{\delta+1}{2} + it)|^2 dt,$$

so genügt die Berechnung von ($a \in \mathbb{R}^{>0}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(a+it)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{\Gamma(a+it)}\Gamma(a+it)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(a-it)\Gamma(a+it)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}x^{a-it}\exp(-x)\frac{dx}{x}\Gamma(a+it)dt = \int\limits_{0}^{+\infty}\exp(-x)x^{2a}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^{-(a+it)}\Gamma(a+it)dt\frac{dx}{x}$$
$$= \int\limits_{0}^{\infty}\exp(-x)x^{2a}\exp(-x)\frac{dx}{x} = \int\limits_{0}^{\infty}x^{-2a}\exp(-2x)\frac{dx}{x} = \int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2a}\exp(-x)\frac{dx}{x}$$
$$= \frac{\Gamma(2a)}{2^{2a}}$$

Es ist für $s\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\delta+it-s}\right|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\delta-s)^2+t^2}dt = \frac{1}{|\delta-s|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{|\delta-s|}$$

Damit hat man

$$|\frac{G_s^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}| \leq \frac{\Gamma(\delta+m+1)}{(m+1)!}\frac{\sqrt{\Gamma(\delta+1)}}{2^{\frac{\delta}{2}}}\frac{C^\delta}{\sqrt{2|\delta-s|}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{(\delta+m+1)}|\Gamma(\frac{\delta+1}{2})|^{r-1}.$$

Die reelle Version der Stirlingschen Formel
$\Gamma(x+1) = (x/e)^x\sqrt{2\pi x}\exp(\frac{\theta}{12x})$ (mit $0<\theta<1$, $x\in\mathbb{R}^{>0}$) und $(1+\frac{y}{m})^m \leq \exp(y)$ (für $y\in\mathbb{R}^{>0}, m\in\mathbb{N}$) ergibt:

$$\frac{\Gamma(\delta+m+1)}{\Gamma((m+1)+1)} \leq \frac{((\delta+m)/e)^{(\delta+m)}\sqrt{2\pi(\delta+m)}}{((m+1)/e)^{m+1}\sqrt{2\pi(m+1)}}\exp(\frac{1}{12(\delta+m)})$$
$$\leq (\delta+m)^{(\delta-1)}\sqrt{\left(\frac{\delta-1}{m+1}+1\right)}$$

Damit hat man dann die Abschätzung des Restgliedes der Taylorreihe:

(41)
$$|\frac{G_s^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}| \le (\delta+m)^{(\delta-1)}\sqrt{\left(\frac{\delta-1}{m+1}+1\right)}\frac{C^\delta\sqrt{\Gamma(\delta+1)}}{2^{\frac{\delta+1}{2}}\sqrt{|\delta-s|}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{(\delta+m+1)}|\Gamma(\frac{\delta+1}{2})|^{r-1}.$$

$(\delta+m)^{(\delta-1)}$ wächst mit m polynomial an, dagegen fällt $\left(\frac{1}{n-1}\right)^{(\delta+m+1)}$ mit m exponentiell ab. Insbesondere fällt für wachsendes n der Betrag des Restgliedes in der Taylorentwicklung, und man muß also immer weniger Folgenglieder zur Reihe dazu addieren, je größer n wird. Damit ist dieses Verfahren ganz offensichtlich besser, als die Berechnung der Reihe der Residuen.

Für die Restglieder von $G_s^{(l)}(n)$ beachtet man $(1 \le l \le r+1)$:

$$\frac{G_s^{(l+m)}(\xi)}{m!} = \frac{G_s^{(l+m)}(\xi)}{(l+m)!}\prod_{j=1}^{l}(m+j)$$

und

$$\prod_{j=1}^{l}(m+j) \le \exp\left(\frac{1}{12(m+l-1)}\right)\sqrt{\left(\frac{l}{m-1}+1\right)}(m+l-1)^l.$$

Für die Berechnung von $\Lambda(1,\chi)$ benötigt man in der Formel von Friedman nur $f(\frac{C}{n},0)$ und $f(\frac{C}{n},1)$. Dafür erhält man:
Für $s=0$ und $\delta=1$:

$$|\frac{G_s^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}| \le \frac{C}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{m+2} \tag{42}$$

Für $s=1$ und $\delta=2$ hat man:

$$|\frac{G_s^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}| \le \frac{C^2}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{r-1}\sqrt{(\frac{1}{m+1}+1)(2+m)}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{m+3} \tag{43}$$

4. Berechnung der Artinschen Wurzelzahl

Sei $\mathcal{O}_k$ der Ring der ganzen Zahlen des algebraischen Zahlkörpers k. Sei $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_k$ ein ganzes Ideal. Ist $\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}$ der Restklassenring nach dem Ideal $\mathfrak{m}$, so bezeichne $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^*$ seine multiplikative Untergruppe. Die Bezeichnung $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{f}^{(0)})^*$ für den endlichen Anteil $\mathfrak{f}^{(0)}$ eines Führers $\mathfrak{f}$ ist dann in diesem Sinne zu verstehen.

In der Berechnung der Artinschen Wurzelzahl für primitive Charaktere beziehe ich mich auf Hasses "Zahlbericht". [9, S.35] Die dort angegebene Darstellung geht, ebenso wie die von Neukirch gegebene [16], auf den ursprünglichen Beweis der Funktionalgleichung durch Hecke zurück. Sie ist dennoch den moderneren Darstellungen (Tates Beweis in: [12]) vorzuziehen, da diese letztlich die Artinsche Wurzelzahl als Produkt lokaler Faktoren darstellen.

Satz 28 (Artinsche Wurzelzahl). *Die in der Funktionalgleichung $\Lambda(s,\chi) = \mathcal{W}(\chi)\Lambda(1-s,\bar{\chi})$ vorkommende Artinsche Wurzelzahl $\mathcal{W}(\chi)$ ist gegeben durch:*

$$\mathcal{W}(\chi) = \frac{(-i)^{\sum\limits_{k=1}^{r_1} a_k}}{\sqrt{N(\mathfrak{f}_\chi)}} \sum_{\mathfrak{a} \bmod \mathfrak{f}_\chi} \chi(\mathfrak{a}) \sum_{(\rho)} exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(\rho))$$

Dabei sind die Ideale $\mathfrak{a}$ irgendwelche Repräsentanten derjenigen Klassen der Strahlklassengruppe $I^{(\mathfrak{f}_\chi)}/H_{\mathfrak{f}_\chi}$, für die gilt $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{f}_\chi^{(0)}\mathcal{D} \mod \mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$, wobei $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{f}_\chi^{(0)}\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ eine Faktorisierung des Führers $\mathfrak{f}_\chi$ in seinen endlichen und seinen unendlichen Anteil darstellt. $\mathcal{D}$ ist die Differente.
Die Zahlen ρ hängen dann von $\mathfrak{a}$ ab: $\mathfrak{a}/(\mathfrak{f}_\chi^{(0)}\mathcal{D}) = (\rho)$.
ρ ist positiv bezüglich derjenigen Stellen, die $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ teilen, d.h.: $\rho \in H_{\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}}$ Man hat zu summieren über ein vollständiges Vertretersystem derjenigen Zahlen ρ mit $(\rho) = \mathfrak{a}/(\mathfrak{f}_\chi\mathcal{D})$, wobei zwei solche Zahlen ρ_1 und ρ_2 als gleich anzusehen sind, falls $(\rho_1 - \rho_2)\mathcal{D}$ ein ganzes Ideal ist.

Man sieht zunächst, daß $(\rho) = \mathfrak{a}/(\mathfrak{f}_\chi^{(0)}\mathcal{D}) = (\rho_1)$ zur Folge hat, daß $\rho_1 = \rho\epsilon$ mit einer Einheit ϵ. Diese muß bezüglich $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ positiv sein, da für ρ und ρ_1 dies gilt.
Hieraus folgt:
$(\rho - \rho\epsilon)\mathcal{D}$ ist ganzes Ideal genau dann, wenn $(1-\epsilon)(\rho)\mathcal{D}$ ganz ist. Dies ist äquivalent zu: $(1-\epsilon)(\mathfrak{a}/(\mathfrak{f}_\chi^{(0)}\mathcal{D}))\mathcal{D}$ ist ganz, welches wiederum dazu äquivalent ist, daß $(1-\epsilon)\mathfrak{a}/\mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ ein ganzes Ideal ist.
Da $\mathfrak{a} \in I^{(\mathfrak{f}_\chi)}$ gilt, sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ teilerfremd. Also teilt $\mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ das Hauptideal $(1-\epsilon)$.

Dies ist äquivalent dazu, daß $1 \equiv \epsilon \mod \mathfrak{f}_\chi^{(0)}$.
Ich interessiere mich also für diejenigen $\mod {}^*\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ positiven Einheiten, welche in verschiedenen Klassen $\mod \mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ liegen.
Habe ich genau eine Fundamentaleinheit (die Gruppe der $\mod {}^*\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ positiven Einheiten hat genau den selben Rang), so muß ich also den kleinsten Exponenten $n \in \mathbb{N}$ suchen, so daß $1 \equiv \epsilon^n \mod \mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ erfüllt ist. Dann entsprechen $1 \dots \epsilon^{n-1}$ den verschiedenen Klassen $\mod \mathfrak{f}_\chi^{(0)}$. Im allgemeinen würde man dann ein bzgl. $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ positives Fundamentalsystem von Einheiten bezüglich einer Basis der endlichen multiplikativen Gruppe $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{f}_\chi^{(0)})^*$ darstellen [17] und von der durch diese Einheiten erzeugten Untergruppe eine Basis ausrechnen. Man hätte damit jeweils alle paarweise $\mod \mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ inkongruenten bzgl. $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ positiven Einheiten.

Notation: Für eine multiplikative Gruppe mit Elementen $\{\nu_1 \dots \nu_m\}$, $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_m)$ und einen Vektor
$\underline{z} := \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(r)} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^m$ sei definiert: $\nu^{\underline{z}} := \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{z_j}$.

Algorithmus 1. *Artinsche Wurzelzahl*
input: Charakter χ, Ordnung $\mathcal{O}_k$.
output: Artinsche Wurzelzahl: $\mathcal{W}(\chi)$.

(1) *Berechne Fundamentaleinheiten von $\mathcal{O}_k$: $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r\}$.*
Dabei ist $r := r_1 + r_2 - 1$;
(2) *Berechne daraus die bzgl. $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)} = \nu_{s_1} \cdots \nu_{s_m}$ positive Einheitengruppe durch Angabe eines Fundamentalsystems. $\nu_{s_1}, \cdots, \nu_{s_m}$ sind die reellen Einbettungen, die f_χ teilen:*
Zunächst ersetze ϵ_i jeweils durch $-\epsilon_i$ genau dann, wenn $\nu_{s_1}(\epsilon_i) < 0$ gilt.
Für $i = 1 \cdots m$, $j = 1 \cdots r$:
setze $a_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \nu_{s_i}(\epsilon_j) > 0 \\ 1 & \text{falls } \nu_{s_i}(\epsilon_j) < 0 \end{cases}$ $A := (a_{i,j})$.
Sei $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^r$. *Bestimme die Lösungen von* $Ax = 0 \mod 2$ *durch*
Angabe einer Basis $\underline{b}_1 := \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_1^{(r)} \end{pmatrix} \cdots \underline{b}_r := \begin{pmatrix} b_r^{(1)} \\ \vdots \\ b_r^{(r)} \end{pmatrix}$. $\epsilon := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$.

Dann sind $\eta_1 := \epsilon^{\underline{b}_1}, \ldots, \eta_r := \epsilon^{\underline{b}_r}$ *ein bzgl.* $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ *positives Fundamentalsystem.*

(3) *Berechne Repräsentanten der Gruppe der positiven Einheiten in* $(O_k/\mathfrak{f}_\chi^{(0)})^*$*:*

- *Berechne für* η_i *mit* $i \in \{1 \ldots r\}$ *den Koordinatenvektor* $\underline{y_i} := \begin{pmatrix} y_{1,i} \\ \vdots \\ y_{m,i} \end{pmatrix}$ *bzgl. einer gegebenen Basis* $\{\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_m\}$ *von* $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{f}_\chi^{(0)})^*$. [17] $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$.
- *Die gegebenen Koordinatenvektoren* $\underline{y}_i$ *stellen ein Erzeugendensystem einer Untergruppe von* $\mathbb{Z}^m$ *dar. Berechne davon eine Basis:* $\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_k}$. *Berechne* $\mathfrak{a}^{\underline{x}_i}$, $1 \le i \le k$. *Bestimme die Ordnungen* $t_1, \ldots, t_k$ *von* $\mathfrak{a}^{\underline{x}_1}, \ldots, \mathfrak{a}^{\underline{x}_k}$ *in* $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{f}_\chi^{(0)})^*$. *Aus den dann gegebenen* $\mathbb{Z}^m$*-Vektoren bilde Einheiten, welche durch sie repräsentiert sind:* $\{\alpha_1 := \eta^{\underline{x_1}} \ldots \alpha_k := \eta^{\underline{x_k}}\}$, $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Ein vollständiges System von Repräsentanten paarweise $\bmod \mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ *inkongruenter und bzgl.* $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ *positiver Einheiten ist dann* $\mathcal{A} := \{\alpha^\tau \mid \tau := (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbb{Z}^k \text{ mit } 0 \le \tau_1 < t_1, \ldots 0 \le \tau_k < t_k\}$.

(4) *Berechne für eine Basis* $\{\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_{m_{\mathfrak{f}_\chi}}\}$ *von* $I^{(\mathfrak{f}_\chi)}/H_{\mathfrak{f}_\chi}$ *jeweils ihre Darstellung* $\underline{y_i} := \begin{pmatrix} y_{1,i} \\ \vdots \\ y_{m_{\mathfrak{f}_\infty},i} \end{pmatrix}$ *bzgl. einer Basis von* $I/H_{\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}}$. *Berechne die Darstellung* $\underline{d} := \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{m_{\mathfrak{f}_\infty}} \end{pmatrix}$ *von* $\mathcal{D}\mathfrak{f}_\chi^{(0)}$ *bzgl. der selben Basis von* $I/H_{\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}}$. *Löse* $\left(\underline{y}_1, \cdots \underline{y}_{m_{\mathfrak{f}_\chi}}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_{\mathfrak{f}_\chi}} \end{pmatrix} = \underline{d}$. *Für die durch* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_{\mathfrak{f}_\chi}} \end{pmatrix}$ *repräsentierten Element* $\mathfrak{r}$ *von* $I^{(\mathfrak{f}_\chi)}/H_{\mathfrak{f}_\chi}$ *bilde jeweils* $\mathfrak{r}(\mathcal{D}\mathfrak{f}_\chi^{(0)})^{-1}$ *und berechne ein repräsentierendes Element* $\rho \in k$ *mit* $(\rho) = \mathfrak{r}(\mathcal{D}\mathfrak{f}_\chi^{(0)})^{-1}$, *welches positiv bzgl.* $\mathfrak{f}_\chi^{(\infty)}$ *ist. Ergebnis: Paare der Form* $(\rho, \mathfrak{r})$.

(5) *Berechne jeweils* $\mathcal{B} := \rho\mathcal{A}$. *Bilde dann zu jedem* $b \in \mathcal{B}$ *die Zahl* $\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(b))$, *addiere und multipliziere die Summe mit* $\chi(\mathfrak{r})$. *Addiere dann die Resultate für jedes* $\mathfrak{r}$. *Multipliziere mit* $\frac{(-i)^{\sum_{k=1}^{r_1} a_k}}{\sqrt{N(\mathfrak{f}_\chi^{(0)})}}$.

5. Berechnung von $\zeta_S'(0,\sigma)$

r_1 ist wieder die Anzahl der reellen Stellen, bzw. r_2 die Anzahl der komplexen Stellen von k.

Sei $L(0,\chi) = 0$ für alle Charaktere χ, die auf der der abelschen Körpererweiterung K/k zugeordneten Idealgruppe $I^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}(K/k)$ definiert sind.
Dies ist sicherlich der Fall, wenn entweder $r_2 \geq 1$, d.h. eine unendliche Stelle komplex ist, oder eine der reellen Stellen den Führer $\mathfrak{f}_\chi$ von χ nicht teilt (vgl.: Lemma 1 S. 29). Das zweite ist gleichbedeutend damit, daß es in der Vollständigen Hecke L-Funktion (S.27) einen Γ-Faktor $\Gamma(\frac{s+s_{k'}}{2})$ mit $s_{k'} = 0$ und $1 \leq k' \leq r_1$ gibt.
Die Vollständige Hecke L-Funktion ist $\Lambda(s,\chi) = C^s \prod_{k=1}^{r_1} \Gamma(\frac{s+s_k}{2})\Gamma(s)^{r_2} L(s,\chi)$ mit $C := \sqrt{\frac{|D_k|N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n 4^{r_2}}}$.

Deren Funktionalgleichung ergibt:

$$\lim_{s\to 0} s\Gamma(s)C^s\frac{L(s,\chi)}{s} = \mathcal{W}(\chi)\lim_{s\to 0}\prod_{k=1}^{r_1}\Gamma(\frac{s+s_k}{2})^{-1}\Gamma(s)^{1-r_2}\Lambda(1-s,\bar{\chi}) \tag{44}$$

bzw.

(45)
$$\lim_{s\to 0} 2\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})C^s\frac{L(s,\chi)}{s} = \mathcal{W}(\chi)\lim_{s\to 0}\prod_{\substack{k=1\\k\neq k'}}^{r_1}\Gamma(\frac{s+s_k}{2})^{-1}\Gamma(s)^{-r_2}\Lambda(1-s,\bar{\chi}).$$

Aus (44) folgt:

$$L'(0,\chi) = \mathcal{W}(\chi)(\prod_{s_k=1}\frac{1}{\sqrt{\pi}})(\prod_{s_k=0} 0)0^{r_2-1}\Lambda(1,\bar{\chi})$$

bzw. aus (45)

$$2L'(0,\chi) = \mathcal{W}(\chi)(\prod_{s_k=1}\frac{1}{\sqrt{\pi}})(\prod_{\substack{s_k=0\\k\neq k'}} 0)0^{r_2}\Lambda(1,\bar{\chi}).$$

Die dabei interessierenden Fälle sind nur entweder $r_2 = 1$ und $s_k = 1$ für alle

$k \in \{1 \dots r_1\}$:

$$L'(0,\chi) = \frac{\mathcal{W}(\chi)\Lambda(1,\bar{\chi})}{\sqrt{\pi}^{r_1}} \tag{46}$$

bzw. $r_2 = 0$ und $s_k = 0$ für genau ein $k \in \{1 \dots r_1\}$:

$$L'(0,\chi) = \frac{\mathcal{W}(\chi)\Lambda(1,\bar{\chi})}{2\sqrt{\pi}^{r_1-1}} \tag{47}$$

Um $\zeta_S'(0,\sigma)$ zu berechnen, müssen die Funktionen $\Lambda(s,\chi)$ geeignet abgeändert werden. Sind aber speziell die Führer aller relevanten Charaktere gleich, bzw. sogar entweder $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ Führer von K/k) oder $L'(0,\chi) = 0$, so brauchen die Funktionen nicht verändert zu werden.
Im Falle des Hilbertschen Klassenkörpers (S.74) tritt diese Situation ein. Daher sei von jetzt an $S := S_\infty \cup \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_k \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } \mathfrak{f}\}$. Es ist S_∞ die Menge der unendlichen Stellen von k.
Aus (2) S.28 folgt dann:

$$\zeta_S'(0,\sigma_\mathfrak{a}) = \frac{1}{[K:k]} \sum_\chi L'(0,\chi)\overline{\chi(\mathfrak{a})},$$

d.h. wenn genau eine komplexe Stelle existiert und alle reellen Stellen in K_χ verzweigen:

$$\zeta_S'(0,\sigma_\mathfrak{a}) = \frac{1}{[K:k]\sqrt{\pi}^{r_1}} \sum_\chi \mathcal{W}(\chi)\Lambda(1,\bar{\chi})\overline{\chi(\mathfrak{a})} \tag{48}$$

bzw. für genau eine unverzeigte reelle Stelle und $r_2 = 0$:

$$\zeta_S'(0,\sigma_\mathfrak{a}) = \frac{1}{[K:k]2\sqrt{\pi}^{r_1-1}} \sum_\chi \mathcal{W}(\chi)\Lambda(1,\bar{\chi})\overline{\chi(\mathfrak{a})} \tag{49}$$

vgl.: [20].

n

KAPITEL V

Der Hilbertsche Klassenkörper

1. Körpererweiterungen und Stark-Einheiten

Sei k ein total reeller algebraischer Zahlkörper mit Einbettungen $\nu_1 \dots \nu_n$, $n := [k : \mathbb{Q}]$. Sei α ein primitives Element, dessen sämtliche Konjugierte $\alpha^{(i)} := \nu_i(\alpha)$ also verschieden sind und sich der Größe nach anordnen lassen, o.B.d.A.: $\alpha^{(1)} > 0 > \alpha^{(2)} > \dots > \alpha^{(n)}$. (Durch Umnumerierung und Addition einer geeigneten rationalen Zahl.)

Mit dieser Zahl α bildet man $k(\sqrt{\alpha})$. Ist dann H_k der Hilbertsche Klassenkörper von k, so setzt man $K := H_k(\sqrt{\alpha})$. Nach seiner Definition ist H_k unverzweigt: Insbesondere ist mit total reellem k auch H_k total reell. Es gilt: $\sqrt{\alpha^{(1)}} \in \mathbb{R}$ und für $i > 1$: $\mathrm{Im}(\sqrt{\alpha^{(i)}}) \neq 0$.
Damit sind die Einbettungen des Körpers K, welche auf k mit ν_1 übereinstimmen, sämtliche reell, während die Fortsetzungen von $\nu_2 \dots \nu_n$ auf K komplexe Einbettungen sind. Der Körper $K = H_k(\sqrt{\alpha}) = k(\sqrt{\alpha})H_k$ ist als Kompositum abelscher Erweiterungen wieder abelsch über k.

Diese Situation sei nun in allgemeinerer Form gegeben:

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ H_k \\ | \\ k \end{array}$$

Dabei sei K/k abelsch, $[K : H_k] = 2$. Die Fortsetzungen der Einbettung ν_1 von

k auf K seien reell, bzw. die Fortsetzungen der Einbettungen $\nu_2 \dots \nu_n$ seien echt komplex. Anders ausgedrückt: der Führer $\mathfrak{f}$ der abelschen Körpererweiterung K/k hat als unendlichen Anteil genau: $\mathfrak{f}^{(\infty)} = \nu_2 \cdots \nu_n$.
Sei nun τ der nichttriviale Automorphismus aus $\mathcal{G}(K/H_k)$. Er entspricht für die Fortsetzungen der Einbettungen $\nu_2 \dots \nu_n$ der komplexen Konjugation: Die komplexe Konjugation hält $H_{\nu_2(k)}, \cdots, H_{\nu_n(k)}$ elementweise fest. Dies folgt aus der Tatsache, daß H_k unverzweigt ist, also alle Einbettungen von H_k reell sind. Insbesondere aber sind die Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$, $K_2, \dots, K_n$, echt komplex und quadratisch über $H_{\nu_2(k)}, \cdots, H_{\nu_n(k)}$. Damit ist die komplexe Konjugation der eindeutige nichttriviale Automorphismus aus $\mathcal{G}(K_j/H_{\nu_j(k)})$ für $2 \leq j \leq n$.

Sei $\chi \in \mathcal{G}^*(K/k)$ mit $\chi(\tau) = -1$ gegeben.
Dann ergibt sich mit (47) S.69, (3) S.28 und dem Lemma auf S.29: $L'(0, \chi) \neq 0$.
Sei nun $\theta \in \mathcal{G}(K/k)$ mit $\theta(\epsilon) = \epsilon$ gegeben, wobei ϵ die Starkeinheit (S. 30) ist. Dann folgt unter Verwendung der Starkschen Vermutung (w_1 ist eine Fortsetzung von ν_1):

(50)
$$0 \neq \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \chi(\sigma) \log |\sigma(\epsilon)|_{w_1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \chi(\sigma\theta) \log |\sigma\theta(\epsilon)|_{w_1} = \chi(\theta) \sum_{\sigma \in \mathcal{G}} \chi(\sigma) \log |\sigma(\epsilon)|_{w_1},$$

woraus folgt:

$$\chi(\theta) = 1.$$

Jeder Charakter mit $\chi(\tau) = 1$ kann als Charakter von $\mathcal{G}/\langle\tau\rangle$ betrachtet werden, wobei für die Gruppe $\langle\tau\rangle$ gilt: $\#\langle\tau\rangle = 2$. Also gilt:

$$\#\{\chi \mid \chi(\tau) = -1\} = \#\mathcal{G}^* - \#\{\chi \mid \chi(\tau) = 1\} = \#(\mathcal{G}/\langle\tau\rangle)^* = \#\mathcal{G}/2.$$

Die Anzahl der Charaktere, für die $\chi(\theta) = 1$ gilt, ist also größer als $\#\mathcal{G}/2$, da auch für den Hauptcharakter $\chi_0 \equiv 1$ dasselbe gilt, aber $\chi_0(\tau) \neq -1$. Aber es ist $\{\chi \mid \chi(\theta) = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}^*$, deren Ordnung größer ist als $\#\mathcal{G}/2$ und deren Ordnung $\#\mathcal{G}^*$ teilt. Daraus folgt:

$$\{\chi \mid \chi(\theta) = 1\} = \mathcal{G}^*.$$

Da $\mathcal{G}$ abelsch ist, muß dann θ das Neutralelement von $\mathcal{G}$ sein.
Man hat also:

$$\theta \in \mathcal{G} \text{ mit } \theta(\epsilon) = \epsilon \Rightarrow \theta = 1 \tag{51}$$

Also sind alle Konjugierten von ϵ bzgl. K/k verschieden und ϵ ist ein primitives Element: $K = k(\epsilon)$.
Koch beschreibt die Situation für zyklische Erweiterungen,[12, S.233] und Roblot für $[K : H_k] = 2$ [20, S.40]. Die Konstruktion S.71 geht aber eigentlich auf Stark

zurück [21, 22], welcher sie als Zwischenschritt zur Bestimmung der Starkeinheit bei der numerischen Überprüfung seiner Hypothese benutzte.

2. Hilbertsche Klassenkörper

Sei $[K : H_k] = 2$ und $\mathcal{G}(K/H_k) = \langle\tau\rangle$.

Wendet man auf $\epsilon\tau(\epsilon)$ den Automorphismus τ an, so ergibt sich:
$\tau(\epsilon\tau(\epsilon)) = \epsilon\tau(\epsilon)$, d.h. $\epsilon\tau(\epsilon)$ ist im Fixkörper H_k von $\langle\tau\rangle$ enthalten.
Aus der Starkschen Vermutung folgt $|\epsilon\tau(\epsilon)|_{w_j} = 1$ für $j = 2\ldots n$, wobei w_j irgendeine Fortsetzung von ν_j auf K ist. Da $\epsilon\tau(\epsilon) \in H_k$, also $w_j(\epsilon\tau(\epsilon)) \in \mathbb{R}$ gilt, hat man $w_j(\epsilon\tau(\epsilon)) = 1$ oder $= -1$. τ entspricht für $j = 2\ldots n$ der komplexen Konjugation, d.h. $w_j \circ \tau \circ w_j^{-1}(x) = \overline{x}$ für $x \in K_j = w_j(K)$. Daher : $w_j(\epsilon\tau(\epsilon)) = w_j(\epsilon)(w_j \circ \tau \circ w_j^{-1})(w_j(\epsilon)) = w_j(\epsilon)\overline{w_j(\epsilon)} > 0$. Also ist $w_j(\epsilon\tau(\epsilon)) = 1$ und damit auch $\epsilon\tau(\epsilon) = 1$. Daraus folgt die Gleichung: $\tau(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$.

Völlig analog ergibt sich dann damit: $\eta := \frac{1}{\epsilon} + \epsilon \in H_k$.
Bilde ich dann das Polynom $x^2 - \eta x + 1 \in H_k[x]$, so hat dieses eine Faktorisierung $(x - \epsilon)(x - \epsilon^{-1})$ in $K[x]$. Wäre $H_k \neq k(\eta)$, also $k(\eta)$ ein echter Teilkörper von H_k, dann würde die durch die Nullstelle ϵ von $x^2 - \eta x + 1$ erzeugte quadratische Erweiterung $k(\eta, \epsilon)$ echt in K enthalten sein, somit $k(\epsilon) \neq K$ im Widerspruch zu der gerade gezeigten Folgerung aus der Starkschen Vermutung. Es ergibt sich also:

$$H_k = k(\epsilon + \epsilon^{-1}) \tag{52}$$

Zur Berechnung des Hilbertschen Klassenkörpers genügt es also, das Polynom

$$(x - \eta_1)\cdots(x - \eta_h) \text{ mit } \eta_j := w_1(\lambda_j(\eta))$$

zu berechnen. Dabei ist h die Klassenzahl von k und $\lambda_j \in \mathcal{G}(H_k/k)$.

In der praktischen Berechnung ist die Konstruktion $H_k(\sqrt{\alpha})$ auf Seite 71 meist nicht die günstigste. Statt dessen geht man alle möglichen Erklärungsmodule $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_\infty$ nach der Größe von $N(\mathfrak{m}_0) \in \mathbb{N}$ durch, wobei $\mathfrak{m}_\infty$ genau von der Form $\nu_2\cdots\nu_n$ ist und berechnet jeweils den Führer der Strahlklassengruppe $I^{(\mathfrak{m})}/H_\mathfrak{m}$. Hat dieser dann als unendlichen Anteil wieder $\nu_2\ldots\nu_n$, so untersucht man, ob es eine Untergruppe U mit $I^{(\mathfrak{m})} \supset H^{(\mathfrak{m})} \supset U \supset H_\mathfrak{m}$, $[H^{(\mathfrak{m})} : U] = 2$ und einem Führer gibt, der wieder als unendlichen Anteil $\nu_2\cdots\nu_n$ hat. ($H^{(\mathfrak{m})}$ ist die Gruppe der Hauptideale prim zu $\mathfrak{m}$.)

Die Konstruktion $H_k(\sqrt{\alpha})$ im letzten Abschnitt (S.71) zeigt, daß es einen Führer mit den gewünschten Verzweigungseigenschaften gibt. Einen Führer mit minimaler Norm erhält man aber durch obiges Verfahren. Dies ist deswegen wichtig, weil in den Funktionen $f(x,s)$ die Zahl $\sqrt{N(\mathfrak{f}_\chi)}$ als multiplikativer Faktor eingeht, d.h. die Größe der Starkeinheit wächst mit diesem Wert exponentiell.

Die Bestimmung der interessierenden Charaktere mit $\chi(\tau) = -1$, wobei $\mathcal{G}(K/H_k) = \langle\tau\rangle$ hat zur Grundlage (S.21):

$$(K/k, \mathfrak{p})^f = (K/H_k, \mathfrak{q}) \text{ wobei } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \text{ und } f := f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}).$$

Daraus leitet man dann ab, daß der Artinisomorphismus bzgl. K/k jedem repräsentierenden Ideal der nichttrivialen Klasse der Gruppe $H^{(\mathfrak{m})}/U$ den Automorphismus τ zuordnet.
Diejenigen L-Reihen $L(s,\chi)$ mit Charakteren $\chi(\tau) = 1$ brauchen nicht berechnet zu werden, da für diese $L'(s,\chi) = 0$ gilt. (vgl. Lemma auf S.29)

Bemerkung 2. *Für Charaktere mit* $\chi(\tau) = -1$ *gilt:* $\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{f}(\mathbf{K}/\mathbf{k})$

Beweis: Zu bestimmen ist der Führer von K_χ/k:
Ist H_k der Hilbertsche Klassenkörper zu k, so gilt offensichtlich, daß $K_\chi \not\subset H_k$. Denn τ hält H_k punktweise fest. (k ist total reell, H_k ist unverzweigte Erweiterung von k, also auch total reell.) Also kann nicht $K_\chi \subset H_k$ gelten, da $\chi(\tau) = -1$ gilt. Aber nach Voraussetzung: $[K : H_k] = 2$. Somit hat man: $K_\chi H_k = K$. Es ist also Satz 20 auf S.21 anwendbar: Erklärungsmodul zu K_χ/k ist nach Definition $\mathfrak{f}_\chi$, ebenso ist $\mathfrak{f}_\chi$ Erklärungsmodul zu H_k/k, da es ein Vielfaches von $\mathfrak{f}(H_k/k) = \mathcal{O}_k$ ist. Also ist K/k über den Schnitt der beiden Idealgruppen zum Erklärungsmodul $\mathfrak{f}_\chi$ erklärt, der Führer $\mathfrak{f}$ von K/k teilt also $\mathfrak{f}_\chi$. Nach Satz 24 auf S.23 teilt aber $\mathfrak{f}_\chi$ den Führer $\mathfrak{f}$. Somit gilt: $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_\chi$ [20]. □

3. Erzeugendes Polynom und Verifikation

Ein algebraischer Zahlkörper K, der eine reelle Einbettung besitzt, hat genau die Torsionseinheiten $\{1, -1\}$. Die Starksche Vermutung ergibt dann:

$$\log|\sigma(\epsilon)|_{w_1} = -2\zeta'(0,\sigma), \text{ also folgt: } |\sigma(\epsilon)|_{w_1} = \exp(-2\zeta'(0,\sigma)). \tag{53}$$

wobei w_1 eine der Fortsetzungen von ν_1 auf K ist, und σ irgendein Automorphismus aus $\mathcal{G}(K/k)$.
Die Starksche Vermutung besagt, daß alle anderen Konjugierten von ϵ vom Betrag 1 sind.

Die Starksche Vermutung besagt über ϵ weiter: $K(\sqrt{\epsilon})/k$ ist abelsch. Dies heißt insbesondere, daß $K(\sqrt{\epsilon})/k$ galoissch ist. Ist dann aber eine der Konjugierten $\sigma(w_1(\epsilon))$ für ein $\sigma \in \mathcal{G}(K/k)$ positiv, und dies sei O.B.d.A. $\sigma = 1$ d.h. $w_1(\epsilon) > 0$, so ist also $K(\sqrt{\epsilon}) \subset \mathbb{R}$. Da dieser Körper galoissch ist, enthält er auch $\sqrt{\sigma(\epsilon)}$ für alle $\sigma \in \mathcal{G}$. Also müssen alle $\sigma(\epsilon)$ positiv sein. Konsequenz:

Alle Konjugierten $\sigma(\epsilon)$ haben dasselbe Vorzeichen, können also alle als positiv vorrausgesetzt werden.
Damit hat man für die reelle Einbettung w_1 sogar:

$$w_1(\sigma(\epsilon)) = \exp(-2\zeta'(0, \sigma)).$$

Man erhält also durch die näherungsweise Berechnung von $\zeta'(0, \sigma_{\mathfrak{a}}))$ eine Approximation von $w_1(\sigma(\epsilon))$. Dabei durchläuft $\mathfrak{a}$ ein Repräsentantensystem der Gruppe $I^{(\mathfrak{f})}/U^{\mathfrak{f}}$, wobei $\mathfrak{f}$ der Führer der auf Seite 73 bestimmten Idealgruppe ist.

Dies läßt folgende Aussage über die verschiedenen Konjugierten von $\eta = \epsilon + \epsilon^{-1} \in H_k$ zu:

Für die Koeffizienten $a_{h-1} \dots a_0 \in k$ des Polynoms

$$(x - \eta_1) \cdots (x - \eta_h) = x^h + a_{h-1}x^{h-1} + \ldots + a_0$$

erhält man, daß

$$\nu_1(a_i) \approx (-1)^{h-i}\sigma_{h-i}(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_h), \tag{54}$$

wobei $\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_h$ die reellen Approximationen von $w_1(\eta_1), \ldots, w_1(\eta_h)$ sind, und σ_i die elementarsymmetrischen Polynome sind [19, S.50].

Die anderen Konjugierten $\nu_j(a_{h-1}) \dots \nu_j(a_0)$ mit $j \geq 2$ lassen sich dann nur noch betragsmäßig abschätzen:

$$|\eta|_{w_j} \leq |\epsilon|_{w_j} + |\epsilon^{-1}|_{w_j} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \tag{55}$$

$$|a_i|_{\nu_j} = |\sigma_{h-i}(\eta_1, \ldots, \eta_h)|_{\nu_j} \leq \sigma_{h-i}(2, \ldots, 2) = \binom{h}{h-i} 2^{h-i}$$

$\mathcal{O}_k$ wird mit (k ist total reell)

$$\alpha \in \mathcal{O}_k \to \begin{pmatrix} \nu_1(\alpha) \\ \vdots \\ \nu_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

nach $\mathbb{R}^n$ eingebettet. Das Bild ist eine Gitter im $\mathbb{R}^n$. Man weiß, daß der Ellipsoid

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid \left\| \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{a}_i \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 \leq \delta^2 + (n-1) \left(\binom{h}{h-i} 2^{h-i} \right)^2 \right\} \tag{56}$$

alle für a_i in Frage kommenden algebraischen Zahlen enthält, wobei $\tilde{a}_i$ die Approximation von $\nu_1(a_i)$ ist und δ der Fehler $|\tilde{a}_i - \nu_1(a_i)|$ ist. $\|.\|$ bedeutet die gewöhnliche euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.
Man zählt also mit dem Algorithmus 4.2. in [18, S.25] die $\mathcal{O}_k$ zugeordneten Gitterpunkte aus, die im Ellipsoid enthalten sind. Danach überprüft man für die erhaltenen Zahlen α, ob sie den Bedingungen $|\tilde{a}_i - \nu_1(\alpha)| \leq \delta$ und $|\nu_j(\alpha)| \leq 2$ für $n \geq j \geq 2$ genügen.

Mit diesen Zahlen α bildet man die Polynome $g(x) := x^h + a_{h-1}x^{h-1} + \ldots + a_0$ und prüft, ob diese irreduzibel über k sind.
Erst dann berechnet man die Relativdiskriminante der durch $g(x)$ über k bestimmten Körpererweiterung, bestimmt deren Signatur über $\mathbb{Q}$ (muß total reell sein). Von den nun verbleibenden Kandidaten stellt man mit dem Verfahren aus [11, S.72] stellt fest, ob sie abelsch sind.

Es sei angemerkt, daß eine algebraische Zahl $\xi \in k$ eindeutig durch $\nu_1(\xi) \in \mathbb{R}$ bestimmt ist. Ist dann $\xi \in \mathcal{O}_k$ sogar ganz und hat man für die anderen Konjugierten $\nu_j(\xi) \in \mathbb{R}$ $(2 \leq j \leq n)$ obere und untere Schranken, so ist die ganze algebraische Zahl ξ bereits durch eine genügend genaue (vom Gitter abhängig) Approximation $\widetilde{\nu_1(\xi)}$ eindeutig bestimmt. Für die Polynome g heißt das, daß man genau ein solches Polynom erhält, wenn die Berechnung der Werte der partiellen ζ-Funktionen nur genau genug war.
Dieser Sachverhalt legt folgende Alternative zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{h-1}, \ldots, a_0$ des Minimalpolynoms $g(x) \in \mathcal{O}_k[x]$ von α nahe:

Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ eine Basis von $\mathcal{O}_k$ mit den Bildern $\begin{pmatrix} \nu_1(\omega_m) \\ \vdots \\ \nu_n(\omega_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq m \leq n$.

Für den Koeffizienten a_i ergeben sich die Schranken $|\nu_j(a_i)| \leq \binom{h}{h-i} 2^{h-i}$ für $2 \leq j \leq n$. Der Fehler bei der Berechnung von $\nu_1(a_i)$ sei δ.

Dann hat man die (eine!) Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ von

$$\widetilde{\nu_1(a_i)} - \delta \leq \sum_{m=1}^{n} x_m \nu_1(\omega_m) \leq \widetilde{\nu_1(a_i)} + \delta.$$

$$-\binom{h}{h-i} 2^{h-i} \leq \sum_{m=1}^{n} x_m \nu_j(\omega_m) \leq \binom{h}{h-i} 2^{h-i} \text{ für } 2 \leq j \leq n$$

zu bestimmen.

Dieses Ungleichungssystem wird mit der Fourier-Motzkin-Elimination auf Dreiecksgestalt gebracht und dann ausgezählt [5, S.41-43]. Es hat sich gezeigt, daß durch diese Methode (insbesondere für größere Klassengruppen) wesentlich effektiver die Koeffizienten a_i bestimmt werden konnten.

KAPITEL VI

Beispiele

1. Das Beispiel von Stark

Sei k der algebraische Zahlkörper, welcher von $f := x^3 - x^2 - 9x + 8$ erzeugt wird: $k := \mathbb{Q}[x]/(f(x))$. Die Klassengruppe dieses Körpers ist eine C_3 und k ist total reell.
Die Nullstellen von f sind $\beta_1 \approx 0.878468121, \beta_2 \approx 3.0791188645$,
$\beta_3 \approx -2.9575869857$. ν_1, ν_2, ν_3 sind die ihnen entsprechenden Einbettungen von k nach $\mathbb{R}$.
Sei $\mathfrak{f} := \nu_1\nu_3$, so ergibt sich als Führer der Strahlklassengruppe $I/H_\mathfrak{f}$ wieder $\mathfrak{f}$. Diese ist eine $C6$. Damit sind alle Vorraussetzungen erfüllt: Für den Körper K, welcher der Klassengruppe zu $I/H_\mathfrak{f}$ entspricht, gilt $K \supset H_k$ und $[K : H_k] = 2$. Weiter ist $[H_k : k] = 3$.
Die appoximierten Werte der Ableitungen der partiellen Zetafunktionen $\zeta'_S(0, \sigma_\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ eine Repräsentantensystem von $I/H_\mathfrak{f}$ durchläuft und $S = \{\nu_1, \nu_3\}$ ist, sind:

$$\begin{aligned} &-1.3114629399, \\ &-0.3633404598, \\ &-0.278371386. \\ &0.278371386, \\ &1.3114629399, \\ &0.3633404598, \end{aligned}$$

Das ergibt die reellen Approximationen der 6 verschiedenen Konjugierten der Starkeinheit $\epsilon \in K$ im Bild $w_2(K) \subset \mathbb{R}$, wobei w_2 eine der 6 verschiedenen Fortsetzungen der reellen Einbettung ν_2 ist:

13.77597151285,
2.06820466554,
0.57307265543,
0.07259016172,
0.48351114213,
1.74497943765

Die 3 konjugierten Werte von $\alpha := \epsilon + \epsilon^{-1}$ in $w_2(H_k)$ ergeben sich zu:

$\alpha^{(1)} \approx 13.8485616746$, $\alpha^{(2)} \approx 2.551715808$, $\alpha^{(3)} \approx 2.318052093$

Das Polynom ist dann:

$(x-\alpha^{(1)})(x-\alpha^{(2)})(x-\alpha^{(3)}) = x^3 + \nu_2(a_2)x^2 + \nu_2(a_1)x + \nu_2(a_0)$
$\approx x^3 - 18.7183295753x^2 + 73.3542912833x - 81.91438312997$

Damit erhält man, wenn man noch die Bedingungen $|\epsilon|_w = 1$ für die anderen Konjugierten berücksichtigt, genau ein Polynom:

$$h_{\beta_2}(x) := x^3 + (-3\beta_2 - \beta_2^2)x^2 + (-11 + 12\beta_2 + 5\beta_2^2)x + (15 - 13\beta_2 - 6\beta_2^2)$$

Man muß nun, da die Starksche Vermutung für den betrachteten Fall nicht bewiesen ist, nachweisen, daß $h_\beta(x)$ irreduzibel über k ist.
Also ist die Relativdiskriminante $\mathcal{D}_{H_k/k}$ des durch $h_\beta(x)$ erzeugten Körpers H_k zu bestimmen, bzw. zeigen, daß $\mathcal{D}_{H_k/k} = O_k$ gilt. Da H_k/k unverweigt ist, muß H_k total reell sein, also die Signatur $r_1 = 9$ und $r_2 = 0$ haben.
Nun weist man nach, daß H_k/k galoissch (also abelsch, da Erweiterung 3-ten Grades) ist. Erst dann weiß man, daß H_k der Hilbertsche Klassenkörper zu k ist.

Aufgrund von $\alpha = \epsilon + \epsilon^{-1}$ ergibt sich, daß

$$x^{18} - 22x^{17} + 144x^{16} - 493x^{15} + 1071x^{14} - 1577x^{13} + 1518x^{12} - 704x^{11} - 382x^{10} + 887x^9 - 382x^8 + \\ -704x^7 + 1518x^6 - 1577x^5 + 1071x^4 - 493x^3 + 144x^2 - 22x + 1$$

das Polynom ist, welches alle Konjugierten von ϵ als Nullstellen hat.

[22, S.98].

2. Starkeinheiten und Hilbertsche Klassenkörper

In diesem Abschnitt ist H_k der Hilbertsche Klassenkörper zum algebraischen Zahlkörper $k := \mathbb{Q}[x]/(f(x))$. ϵ ist die Starkeinheit. $K := k(\epsilon)$ ist quadratische Erweiterung von H_k. Die angegebene Nullstelle β von f gibt diejenige Einbettung von k nach $\mathbb{R}$ an, deren Fortsetzung auf K reell ist. Mit k_β bezeichne ich dann das reelle Bild von k unter dieser Einbettung. Zu den in dieser reellen Einbettung von K in $\mathbb{C}$ liegenden Konjugierten der Starkeinheit gebe ich die reellen Approximationen an, sowie das Polynom, das sie als Nullstelle hat.
Die Beispiele sind zunächst geordnet nach der Größe der Klassengruppe. Dann werden mehrere Beispiel mit einer C_3 und größerer Diskriminante gerechnet. Zuletzt gebe ich eine Beispiel an, dessen Grundkörper vom Grad 5 ist.

$k := \mathbb{Q}[x]/(f(x))$	$f := x^3 + x^2 - 17x + 16$
Diskriminante D_k	8069
$g(x) \in k[x]$ erzeugt H_k	$g(x) := x^4 + (-11 + 10\beta - 2\beta^2)x^3$ $+(68 - 86\beta + 21\beta^2)x^2$ $+(-204 + 262\beta - 66\beta^2)x + (209 - 262\beta + 65\beta^2)$
Nullstelle β von f	$\beta \approx -5.0207080746$
Approximationen der reellen Konjugierten von ϵ	0.0098223383, 0.2594381814, 0.3052819393, 0.7202440698, 1.3884182348, 3.2756605328, 3.8544827701, 101.8087515739.
$G(x) \in k_\beta[x]$ ist Minimalpolynom von ϵ	$G(x) := x^8 + (-11 + 10\beta - 2\beta^2)x^7 + (72 - 86\beta + 21\beta^2)x^6$ $+(-237 + 292\beta - 72\beta^2)x^5 + (351 - 434\beta + 107\beta^2)x^4$ $+(-237 + 292\beta - 72\beta^2)x^3 + (72 - 86\beta + 21\beta^2)x^2$ $+(-11 + 10\beta - 2\beta^2)x + 1$

k	$f := x^3 - 16x + 1$
D_k	16357
β	$\beta \approx -4.0308912283018078$
H_k	$g := x^4 + (-12 + 193\beta - 48\beta^2)x^3 + (288 - 4740\beta + 1176\beta^2)x^2$ $+(-1730 + 28109\beta - 6973\beta^2)x + (2677 - 43494\beta + 10790\beta^2)$
ϵ	0.00064723025925255423 8756, 0.05944750716914876717 7142, 0.1895944163498932467229, 0.5070701948688738097, 1.972113545854525596987, 5.274416933009868469 6436, 16.82156321802785303811 36118 1545.045191729505167 8955
G	$x^8 + (-12 + 193\beta - 48\beta^2)x^7 + (292 - 4740\beta + 1176\beta^2)x^6$ $+(-1766 + 28688\beta + -7117\beta^2)x^5 + (3259 - 52974\beta + 13142\beta)x^4$ $+(-1766 + 28688\beta - 7117\beta^2)x^3 + (292 - 4740\beta + 1176\beta^2)x^2$ $+(-12 + 193\beta - 48\beta^2)x + 1$

k	$f := x^3 - 28x + 47$
D_k	28165
β	$\approx 4.04857835420443 35$
H_k	$g{:=}x^5{+}(17123{-}5972\beta{-}1475\beta^2)x^4{+}({-}2064761{+}720072\beta{+}177858\beta^2)x^3$ $+(51913884-18104674\beta-4471860\beta^2)x^2+(-229870275+80165973\beta 19801018\beta^2)x$ $+(268386698-93598360\beta-23118821\beta^2)$
ϵ	3.214310690473072854 10^{-5}, 0.01134836689815981276 0.03630547764442001967 0.34622163367978679463 0.96538213101623248087 1.03585923943669684191 0 2.88832326672321400288 77 27.54405298821110651361 88.11840584413554810938 31110.86936817498399360
G	$x^{10}+(17123-5972\beta-1475\beta^2)x^9+(-2064756+720072\beta+177858\beta^2)x^8+(51982376-18128562\beta-4477760\beta^2)x^7$ $+(-236064548+82326189\beta+20334592\beta^2)x^6+(372317204-129843540\beta-32071391\beta^2)x^5$ $+(-236064548+82326189\beta+20334592\beta^2)x^4+(51982376-18128562\beta-4477760\beta^2)x^3$ $+(-2064756+720072\beta+177858\beta^2)x^2+(17123-5972\beta-1475\beta)x+1$

k	$f := x^3 + x^2 - 25x - 26$
D_k	56677
β	$\approx 5.0165931683264587$
H_k	$x^6+(-109225-126804\beta-21076\beta^2)x^5+(49792535+57802991\beta+9607262\beta^2)x^4$ $+(-2131059116-2473897370\beta-411179101\beta^2)x^3+(28263880813+32810887207\beta+5453399672\beta^2)x^2$ $+(-133338582112-154789683861\beta-25727131539\beta^2)x+(170257159805+197647609022\beta+32850419414\beta^2)$
ϵ	$7.84131642935283374142\ 10^{-7}$, 0.00243961469798137956436 8, 0.037588437732668587563 0.092153749121609731535 4, 0.15778403283542675396958 92, 0.91138270118781076561838 94, 1.09723390480935588909680 2, 6.33777690954970404781 8, 10.8514304575971234255 03, 26.6039255771166921301415417, 409.9007932799528211961601533973, 1275296.0666867678727330217462 4
G	$x^{12}+(-109225-126804\beta-21076\beta^2)x^{11}+(49792541+57802991\beta+9607262\beta^2)x^{10}$ $+(-2131605241-2474531390\beta-411284481\beta^2)x^9+(28463050968+33042099171\beta+5491828720\beta^2)x^8$ $+(-139732851710-162212644011\beta-26960879602\beta^2)x^7+(227083676661+263616201382\beta+43814862330\beta^2)x^6$ $+(-139732851710-162212644011\beta-26960879602\beta^2)x^5+(28463050968+33042099171\beta+5491828720\beta^2)x^4$ $+(-2131605241-2474531390\beta-411284481\beta^2)x^3+(49792541+57802991\beta+9607262\beta^2)x^2$ $+(-109225-126804\beta-21076\beta^2)x+1$

k	$f := x^3 + x^2 - 41x - 106$
D_k	52645
β	≈ 7.00832063581973
H_k	$x^7+(-60430-31999\beta-3996\beta^2)x^6+(16081611+8514890\beta+1063255\beta^2)x^5+(-781408822-413740326\beta-51663805\beta^2)x^4$ $+(14972633555+7927709844\beta+989934121\beta^2)x^3+(-132771789376-70300005510\beta-8778370488\beta^2)x^2$ $+(536702946795+284173470045\beta+35484776768\beta^2)x+(-785884959517-416110359246\beta-51959752633\beta^2)$
ϵ	$2.080330704156313669\ 10^{-6}$, 0.004761979330770923 68 0.041345264136891649 56 0.075757893379194540 85 0.108545939065172714 0.175827573541653165 5 0.311205876439418872 59 3.213306931865297 4 5.687390093926890 2 9.212689195121192 5 13.199944657841172 24.186566971468871 8 209.996711564497398 480692.804274863571
G	$x^{14}+(-60430-31999\beta-3996\beta^2)x^{13}+(16081618+8514890\beta+1063255\beta^2)x^{12}+(-781771402-413932320\beta-51687781\beta^2)x^{11}$ $+(15053041631+7970284294\beta+995250396\beta^2)x^{10}+(-135898331114-71955446799\beta-8985085648\beta^2)x^9$ $+(581781663605+308041748477\beta+38465211681\beta^2)x^8+(-1056118199801-559193452202\beta-69826556359\beta^2)x^7$ $+(581781663605+308041748477\beta+38465211681\beta^2)x^6+(-135898331114-71955446799\beta-8985085648\beta^2)x^5$ $+(15053041631+7970284294\beta+995250396\beta^2)x^4+(-781771402-413932320\beta-51687781\beta^2)x^3$ $+(16081618+8514890\beta+1063255\beta^2)x^2+(-60430-31999\beta-3996\beta^2)x+1$

k	$f := x^3 + x^2 - 25x - 24$
D_k	58469
β	$\approx -5.02478462225892355284$
H_k	$x^8+(306443+258221\beta-64158\beta^2)x^7+(-234325342-197454993\beta+49059766\beta^2)x^6$ $+(22710161658+19136789535\beta-4754736297\beta^2)x^5+(-688598675432-580249850888\beta+144169168130\beta^2)x^4$ $+(6303436048448+5311610315015\beta-1319725355151\beta^2)x^3+(-24425416510223-20582154445182\beta+5113852386373\beta^2)x^2$ $+(42441928533945+35763825262508\beta-8885897909846\beta^2)x+(-27305039339273-23008677726206\beta+5716747574257\beta^2)$
ϵ	$3.83114200357679153\ 10^{-7}$ 0.00152160077309773659, 0.01708086739274170649, 0.0269847064006145631, 0.21558926352937416057, 0.3707456311728880045, 0.74816991600745215148, 0.89886329811768896512, 1.1125162214255511, 1.336594774267881, 2.6972671177173626, 4.6384499099313887, 37.0580278011557503, 58.5450362096328349, 657.2026103563022179, 2610187.769251022934
G	$x^{16}+(306443+258221\beta-64158\beta^2)x^{15}+(-234325334-197454993\beta+49059766\beta^2)x^{14}$ $+(22712306759+19138597082\beta-4755185403\beta^2)x^{13}+(-690004627456-581434580846\beta+144463526726\beta^2)x^{12}$ $+(6416993292041+5407299685331\beta-1343500383954\beta^2)x^{11}+(-27183326092025-22906115673629\beta+5691264955383\beta^2)x^{10}$ $+(61579349021374+51890033140638\beta-12892623583799\beta^2)x^9+(-80292150919081-67658434821758\beta+16810448551103\beta^2)x^8$ $+(61579349021374+51890033140638\beta-12892623583799\beta^2)x^7+(-27183326092025-22906115673629\beta+5691264955383\beta^2)x^6$ $+(6416993292041+5407299685331\beta-1343500383954\beta^2)x^5+(-690004627456-581434580846\beta+144463526726\beta^2)x^4$ $+(22712306759+19138597082\beta-4755185403\beta^2)x^3+(-234325334-197454993\beta+49059766\beta^2)x^2$ $+(306443+258221\beta-64158\beta^2)x+1$

k	$f := x^3 - 70x + 217$
D_k	100597
β	$\approx -9.6205917256718745$
H_k	$x^3+(-1311891+559554\beta^1-58162\beta^2)x^2+(1885429000-804181391\beta+83589598\beta^2)x$ $+(-5049685910+2153814026\beta-223875421\beta^2)$
ϵ	$8.28025427892557885\ 10^{-8}$ 0.000697023903317, 0.447214314202113770149, 2.236064383994785544, 1434.671028124773887290, 12076923.8034771683741411
G	$x^6+(-1311891+559554\beta-58162\beta^2)x^5+(1885429003-804181391\beta+83589598\beta^2)x^4$ $+(-5052309692+2154933134\beta-223991745\beta^2)x^3+(1885429003-804181391\beta+83589598\beta^2)x^2$ $+(-1311891+559554\beta-58162\beta^2)x+1$

k	$f := x^3 + x^2 - 30x - 29$	
D_k	101969	
β	$\approx -5.4974854675650632$	
H_k	$x^3+(55950160+47702067\beta-10606386\beta^2)x^2+(-17873986912-15239029028\beta+3388344251\beta^2)x$ $+(991994880475+845756397620\beta-188050946183)\beta^2)$	
ϵ	1.8981065535516379523393278 10^{-9} 0.01398803748038318614559766 247.9551383659464061517854559	0.0040329876065086525979035 71.4896568873510181719257187 526840813.087575180404277780
G	$x^6+(55950160+47702067\beta-10606386\beta^2)x^5+(-17873986909-15239029028\beta+3388344251\beta^2)x^4$ $+(992106780795+845851801754\beta-188072158955\beta^2)x^3+(-17873986909-15239029028\beta+3388344251\beta^2)x^2$ $+(55950160+47702067\beta-10606386\beta^2)x+1$	

k	$f := x^3 + x^2 - 62x + 15$	
D_k	103809	
β	$\approx -8.5009072946007808$	
H_k	$x^3+(-10253+43566\beta-5808\beta^2)x^2+(4381226-18624424\beta+2482956\beta^2)x+(-10734431+45631710\beta-6083492\beta^2)$	
ϵ	1.2501666051296861299588039312786 10^{-6} 0.512291255953838464355656946072 425.2610319198381848713032527255	0.00235149690411441286278805415 1.95201457838294235991859574487 799893.386926828782368426362644407
G	$x^6+(-10253+43566\beta-5808\beta^2)x^5+(4381229-18624424\beta+2482956\beta^2)x^4$ $+(-10754937+45718842\beta-6095108\beta^2)x^3+(4381229-18624424\beta+2482956\beta^2)x^2+(-10253+43566\beta-5808\beta^2)x+1$	

k	$f := x^3 + x^2 - 65x + 139$	
D_k	104468	
β	$\approx 5.9817026372665603$	
H_k	$x^3+(15228670-4575445\beta-655348\beta^2)x^2+(-4586492341219+1378008953786\beta+197374340527\beta^2)x$ $+(23588040228775-7087012954415\beta-1015083758593\beta^2)$	
ϵ	2.8340359451950330232078168 10^{-8} 0.202403709532542238090374 303762.4470813270105660935775	3.292046168341104147357804 10^{-6} 4.940620912084722132845386984 35285367.558426711517973007520175
G	$x^6+(15228670-4575445\beta-655348\beta^2)x^5+(-4586492341216+1378008953786\beta+197374340527\beta^2)x^4$ $+(23588070686115-7087022105305\beta-1015085069289\beta^2)x^3+(-4586492341216+1378008953786\beta+197374340527\beta^2)x^2$ $+(15228670-4575445\beta-655348\beta^2)x+1$	

k	$f := x^3 - 54x + 88$
D_k	105192
β	$\approx 1.724621811558618$
H_k	$x^3+(\frac{1}{2}(-573521042+19384492\beta+11239851\beta^2\;))x^2+(\frac{1}{2}(18778004802060-634679575236\beta-3680108711\;27\beta^2))x$ $+(-973351314705235+32898393918039\beta+19075714859658\beta^2\;)$
ϵ	$3.9479368622932342304167783849842 9\;10^{-9}$ $\quad$ $3.06355334981192007011934022224972\;10^{-5}$ $0.00961630683069146235789572970 94$ $\quad$ $103.990026275824937590274373 6$ $32641.834034370341177952885212 37$ $\quad$ $253296857.290450936037650867151864 1$
G	$x^6+(\frac{1}{2}(-573521042+19384492\beta+11239851\beta^2\;))x^5+(\frac{1}{2}(18778004802066-634679575236\beta-3680108711\;27\beta^2))x^4$ $+(-973351888226277+32898413302531\beta+19075726099509\beta\;^2)x^3+(\frac{1}{2}(18778004802066-634679575236\beta-3680108711\;27\beta^2))x^2$ $+(\frac{1}{2}(-573521042+19384492\beta+11239851\beta^2\;))x+1$

k	$f := x^3 + x^2 - 64x - 91$
D_k	103809
β	$\approx 8.1817249956092696$
H_k	$x^3+(\frac{1}{3}(-109769333-90616806\beta-9869257\beta^2))x^2+(3479973012039+2872788426051\beta+312881122820\beta^2)x$ $+(\frac{1}{3}(-56749363907438-46847752915086\beta-5102282298\;532\beta^2))$
ϵ	$1.98473085234370209168375131017 63\;10^{-9}$ $\quad$ $1.05130005872646012530580459637 4\;10^{-5}$ $0.19064049720160382970991113097 9947$ $\quad$ $5.24547519902076268312002964154 3558$ $95120.321900428240091551894030066 1$ $\quad$ $503846654.481706444983895057364$
G	$x^6+(\frac{1}{3}(-109769333-90616806\beta-9869257\beta^2))x^5+(3479973012042+2872788426051\beta+312881122820\beta^2)x^4$ $+(-18916527815368-15615978049566\beta-1700767345682\beta\;^2)x^3+(3479973012042+2872788426051\beta+312881122820\beta^2)x^2$ $+(\frac{1}{3}(-109769333-90616806\beta-9869257\beta^2\;))x+1$

k	$f := x^5 - 15x^3 + 10x^2 + x - 1$
D_k	9824581
β	$\approx 0.6136942909493501970211$
H_k	$x^2+(11911+7499\beta-106897\beta^2+4486\beta^3+7310\beta^4)x+(-235309-148121\beta+2111704\beta^2-88621\beta^3-14\;4406\beta^4)$
ϵ	$4.61829075606756966856682950 92\;10^{-5}$ $\quad$ $0.05070521625138189786223278996575$ $19.72183680358027140613621706592$ $\quad$ $21653.03253560177356839042036 59$
G	$x^4+(11911+7499\beta-106897\beta^2+4486\beta^3+7310\beta^4)x^3+(-235307-148121\beta+2111704\beta^2-88621\beta^3\;-144406\beta^4)x^2$ $+(11911+7499\beta-106897\beta^2+4486\beta^3+7310\;\beta^4)x+1$

Symbolverzeichnis

k^*	:	$k \setminus \{0\}$
$\mathcal{O}_k$	:	Ring der ganzen algebraischen Zahlen von k
D_k	:	Diskriminante von $\mathcal{O}_k$
D	:	Diskriminante eines fest gegebenen Zahlkörpers
w_k	:	Zahl der Torsionseinheiten in k
$\mathcal{D}$	:	Differente
$\mathbb{P}_k$	:	Menge der Primideale von $\mathcal{O}_k$
$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$	:	Primideale
$N(\mathcal{I})$	:	Norm des Ideals $\mathcal{I}$
$N_{K/k}(\mathfrak{a})$	:	Relativnorm des Ideals $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$
$N(\alpha)$	:	Die Norm der algebraischen Zahl α
$\mathrm{T}r(\alpha)$	:	Die Spur der algebraischen Zahl α
$\#\mathcal{G}$	:	Anzahl der Elemente von $\mathcal{G}$
ν_j	:	Einbettung von k nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\lvert\alpha\rvert_{\nu_j}$	:	$\lvert\alpha\rvert_{\nu_j} := \lvert\nu_j(\alpha)\rvert$ für relles ν_j bzw. $\lvert\nu_j(\alpha)\rvert^2$ für ν_j komplex.
r_1 bzw. r_2	:	Anzahl der reellen bzw. komplexen Stellen von k
w_j	:	Eine der Fortsetzungen von ν_j auf eine Körpererweiterung von k
H_k	:	Hilbertscher Klassenkörper zu k
I	:	Gruppe der (gebrochenen) Ideale von $\mathcal{O}_k$
(α)	:	$(\alpha) := \alpha\mathcal{O}_k$ mit $\alpha \in k$
ϵ	:	die Stark-Einheit
C	:	$C := \sqrt{\frac{\lvert D_k\rvert N(\mathfrak{f}_\chi)}{\pi^n 4^{r_2}}}$
$Res_{z=z_0} f(z)$	:	Residuum der meromorphen Funktion f bei z_0
$\mathrm{Im}(z)$	:	Imaginärteil der komplexen Zahl z
$\mathrm{Re}(z)$	:	Realteil der komplexen Zahl z

$\mathfrak{m}$	:	Erklärungsmodul
$\mathfrak{m}_0$	:	endlicher Anteil von $\mathfrak{m}$, d.h. ein ganzes Ideal
$\mathfrak{m}_\infty$	:	unendlicher Anteil des Erklärungsmoduls
H	:	Gruppe der Hauptideale
I	:	Gruppe der gebrochenen Ideale
I_k	:	Gruppe der gebrochenen Ideale von k
h bzw. h_k	:	Klassenzahl von k
$I^{(\mathfrak{m})}$	:	Gruppe der zu m_0 primen Ideale
$H^{(\mathfrak{m})}$	:	Gruppe der zu m_0 primen Haupideale
$H_\mathfrak{m}$	:	Gruppe Haupideale (α) mit $\alpha \equiv 1 \mod {}^*\mathfrak{m}$
$U(K/k)$	:	Kongruenzidealgruppe zur Erweiterung K/k
$U^\mathfrak{m}$	:	Idealgruppe zum Erkärungsmodul $\mathfrak{m}$
$\mathfrak{f}(K/k)$	:	Führer der abelschen Körpererweiterung K/k
$\mathcal{G}(K/k)$	:	Galoisgruppe von K/k
$\mathfrak{D}$	:	Zerlegungsgruppe (S. 15)
$\mathfrak{I}$	:	Trägheitsgruppe (S. 15)
$\sigma_\mathfrak{a}$	:	Bild des Artinabbildung des Ideals $\mathfrak{a}$ (S. 16)
$(K/k, \mathfrak{a})$	:	Eine andere Bezeichnung für $\sigma_\mathfrak{a}$ (Wird auch Artinsymbol genannt)
$\mathcal{G}^*$	:	Duale Gruppe (d.h.: Gruppe der Charaktere) von $\mathcal{G}$
χ	:	Charakter (S. 21)
χ_0	:	Hauptcharakter auf einer endlichen Faktorgruppe von Idealen: $\chi \equiv 1$
K_χ	:	Fixkörper der Gruppe $\{\sigma \in \mathcal{G}(K/k) \mid \chi(\sigma) = 1\}$
$\mathfrak{f}_\chi$	:	Führer der Körpererweiterung K_χ/k bzw. Führer von χ
$\mathcal{W}(\chi)$	:	Artinsche Wurzelzahl von χ (S.65)
$L(s,\chi)$	:	L-Funktion von χ
$L(K/k, s, \chi)$	:	Artinsche L-Funktion
$\Lambda(s,\chi)$	:	Vervollständigte Heckesche L-Funktion
$\zeta(s,\sigma)$	:	Partielle Zetafunktion
ζ_k	:	Die Dedekindsche Zetafunktion
Γ	:	Die Γ-Funktion
γ	:	Die Eulersche Konstante
log	:	Der natürliche Logarithmus, bzw. sein Haupzweig in $\mathbb{C}$
O	:	Landausymbol.
$\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} f(z)dz$	:	ist definiert als $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(it+\delta)\ i)\ dt$

Literaturverzeichnis

[1] Milton Abramowitz. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. A Wiley-Interscience Publication. New York, John Wiley & Sons, 1972.

[2] Henri Cohen, Xavier Roblot. Computing The Hilbert Class Field of Real Quadratic Fields. (Preprint)

[3] Dummit, David S.; Sands, Jonathan W.; Tangedal, Brett A. Computing Stark units for totally real cubic fields. Math. Comput. 66, No.219, 1239-1267 (1997).

[4] M.A. Evgrafov. Analytic Functions. E.B. Saunders Campany 1966.

[5] Claus Fieker. Über relative Normgleichungen in algebraischen Zahlkörpern. Doktorarbeit. TU-Berlin 1997.

[6] Eduardo Friedman. Hecke's Integral Formula. Seminaire de Theorie des Nombres de Bordeaux, 1987-88. (1988).

[7] Larry Goldstein. Analytic Number Theory. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey. 1971.

[8] Helmut Hasse. Vorlesungen über Klassenkörpertheorie. Physica-Verlag 1967.

[9] Helmut Hasse. Zahlbericht. Physica-Verlag 1970.

[10] Anatolii A. Karatsuba, Sergei M. Voronin. The Riemann Zeta-Function. Walter de Gruyter. 1992.

[11] Jürgen Klüners. Über die Berechnung von Automorphismen und Teilkörpern algebraischer Zahlkörper. Doktorarbeit. TU-Berlin. 1997.

[12] Helmut Koch. Algebraic Number Theory. Springer 1991.

[13] Serge Lang. Algebraic Number Theory. Springer Verlag. 1991.

[14] Daniel.A.Marcus. Number Fields. Springer 1977.

[15] Kurt Meyberg. Algebra. Teil 1. Carl Hanser Verlag. 1975.

[16] Jürgen Neukirch. Algebraische Zahlentheorie. Springer Verlag. 1992.

[17] Sebastian Pauli. Zur Berechnung von Strahlklassengruppen. Diplomarbeit. TU-Berlin, 1996.

[18] Michael E. Pohst. Computational Algebraic Number Theory. Birkhäuser Verlag. 1993.

[19] Michael E. Pohst. Hans Zassenhaus. Algorithmic Algebraic Number Theory. Cambridge University Press. 1989.

[20] Xavier Roblot. Algorithmes de factorisation dans les extensions relatives et applications de la conjecture de Stark a la construction des corps de classes de rayon. Doktorarbeit. Universität Bordeaux I, 1997.

[21] Harold M. Stark: L-Functions at s=1.IV. first Derivates at s=0. Advances in Math.35 (1980), S.197-235.
[22] John Tate. Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en $s = 0$. Birkhäuser. 1984.
[23] Tikao Tatuzawa. On The Hecke-Landau L-Series. In: Nagoya Math. Journal 16. (1960) S.11-20.
[24] Emmanuel Tollis. Calculs dans les Corps des Nombres: Etude Algoritmique de la Fonction Zeta de Dedekind. Doktorarbeit. Universität Bordeaux I, 1996.
[25] André Weil. Basic Number Theory. Springer Verlag. 1973