Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung im
Sommersemester 1997
Technische Universität Berlin

gehalten von
Prof. Dr. M. Pohst

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 8: Invariante Unterräume

V ist im folgenden stets ein endlich dimensionaler Vektorraum ($\dim V = n$) über dem (kommutativen) Körper K.

8.0 Rückblick

R sei kommutativer Ring mit Eins, K Körper:

$$R[t] = \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}^{\geq 0},\ a_i \in R \right\}$$

ist der Polynomring in der Variablen t über R.
Einsetzen von "Werten" für die Variable t, d.h. eine Abbildung

$$\sum_{i=0}^{m} a_i t^i \longmapsto \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

mit x aus kommutativen Ring mit Eins, der zusätzlich ein unitärer R-Modul ist, heißt Spezialisierung.
Ist etwa $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i = 0$ in diesem Ring, so heißt x Nullstelle des Polynoms.
Bezeichnungen:
Für $f(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$ mit $a_m \neq 0$ schreiben wir

$$\begin{array}{lcllcl} \deg(f) & = & \text{Grad von } f & (= & m) \\ l(f) & = & \text{Leitkoeffizient von } f & (= & a_m). \end{array}$$

(Vereinbarungen: $\deg(0) = -\infty,\ l(0) = 0$).
Für $l(f) = 1$ heißt f normiert. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{array}{rcl} \deg(f+g) & \leq & \max(\deg(f), \deg(g)), \\ \deg(f\,g) & \leq & \deg(f) + \deg(g). \end{array}$$

(Beachte: $l(f\,g) = l(f)\,l(g)$, falls $l(f)\,l(g) \neq 0$ ist.)
Die Gleichung in der vorangegangenen Zeile ist garantiert, falls R keine Nullteiler enthält, speziell also für $R = K$.

Division mit Rest in $K[t]$:
Zu Polynomen $f(t)$, $g(t) \in K[t]$ mit $g(t) \neq 0$ existieren $Q(f,g)\,(t)$, $R(f,g)\,(t) \in K[t]$ mit

$$f(t) = Q(f,g)\,(t)\ g(t) + R(f,g)\,(t) \text{ mit } \deg(R(f,g)) < \deg(g).$$

(Hierbei ist $R(f,g) = 0$ eingeschlossen. In diesem Fall sagt man, daß $g(t)$ das Polynom $f(t)$ teilt.)

Euklidischer Algorithmus in $K[t]$:
Der letzte nicht verschwindende Divisionsrest bei sukzessiver Anwendung von Division mit Rest auf f, g, danach auf g, $R(f,g)$ etc. ist bis auf Normierung der ggT von f und g.

(Beachte: Der ggT ist durch Normierung eindeutig bestimmt.)

Darstellung des ggT:
Zu f, g existieren u, v mit

$$u(t)\, f(t) + v(t)\, g(t) = \mathrm{ggT}\,(f, g)\,(t),$$

u, v sind mit Euklidischem Algorithmus berechenbar.
Falls $\lambda \in K$ Nullstelle von $f(t) \in K[t]$ ist, gilt:

$$(t - \lambda) \in K[t] \quad \text{teilt} \quad f(t).$$

Die Vielfachheit einer Nullstelle ist der größte Exponent $k \in \mathbb{N}$ mit $(t-\lambda)^k$ teilt $f(t)$ (Schreibweise: $(t - \lambda)^k |\, f(t)$).

8.1 Definition

Ein Polynom $f(t) \in R[t]$ positiven Grades heißt <u>irreduzibel</u>, falls in $R[t]$ kein Polynom $g(t)$ mit $0 < \deg(g) < \deg(f)$ mit $g(t) \,|\, f(t)$ existiert.

<u>Beispiele:</u>

(i) $t + \lambda \quad (\lambda \in R)$;

(ii) $t^2 + 1$ in $\mathbb{R}[t]$ (denn es existiert in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle);

(iii) $t^3 + t + 1 \in \mathbb{F}_2[t]$

(Beachte: Polynome vom Grad 2 bzw. 3 sind genau dann über Körpern irreduzibel, wenn sie keine Nullstelle besitzen.)

(iv) $t^m + 2$ in $\mathbb{Q}[t] \quad (m \in \mathbb{N})$

(<u>Beweis:</u> Algebra-Vorlesung).

Ziel: Schreibe $f(t) \in K[t]$, $\deg(f) > 0$ als Potenzprodukt irreduzibler Polynome, eine solche Darstellung wird — bis auf Reihenfolge der Faktoren — eindeutig durch Normierung der irreduziblen Polynome.

8.2 Hilfssatz

Es seien $f(t)$, $g(t)$, $h(t) \in K[t]$ nicht konstant, sowie $f(t)$ irreduzibel.

(i) Gilt $g(t)|f(t)$ so folgt auch $f(t)|g(t)$. Sind zudem $f(t)$, $g(t)$ beide normiert, so sind sie gleich.

(ii) Aus $f(t)|(g(t)\,h(t))$ folgt $f(t)|g(t)$ oder $f(t)|h(t)$.

(Über Ringen ist dies i.a. falsch: In $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist $t^2 - 1 = (t-1)\,(t+1) = (t-3)\,(t+3)$.)

<u>Beweis:</u>

(i) In $K[t]$ ist
$$\begin{array}{rrcl} & f(t) & = & g(t)\,\tilde{g}(t), \text{ also} \\ & \deg(f) & = & \deg(g) + \deg(\tilde{g}) \text{ mit} \\ (0 <) & \deg(g) & \leq & \deg(f). \end{array}$$

Da $f(t)$ irreduzibel war, muß $\deg(g) = \deg(f)$ sein, also $\deg(\tilde{g}) = 0$ gelten,

d.h. $\tilde{g}(t) = \lambda \in K,\ \lambda \neq 0$ ist konstant.

Es folgt $f(t) = \lambda\, g(t)$ bzw. $\dfrac{1}{\lambda}\, f(t) = g(t)$, also $f(t)|g(t)$.

Ferner ist $l(f) = \lambda\, l(g)$; falls $l(f) = l(g) = 1$ ist, folgt $\lambda = 1$.

(ii) Gemäß (8.1) folgt für $u(t) := \mathrm{ggT}\,(f(t),\, g(t))$ entweder $u(t) = \frac{1}{l(f)}\, f(t)$ oder $u(t) = 1$.

Im ersten Fall gilt $f(t)|g(t)$, und wir sind fertig.

Im zweiten Fall gilt in $K[t]$:

$$\begin{aligned} 1 &= f(t)\, \tilde{f}(t) + g(t)\, \tilde{g}(t), \\ h(t) &= f(t)\, \tilde{f}(t)\, h(t) + g(t)\, \tilde{g}(t)\, h(t) \\ &= f(t)\, \hat{f}(t) \text{ wegen } f(t)|(g(t)\; h(t)), \text{ also } f(t)|h(t). \end{aligned}$$

□

8.3 Satz (von der eindeutigen Primpolynomzerlegung)

Für $f(t) \in K[t]$ mit $m = \deg(f) \geq 1$ existieren bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmte normierte irreduzible Polynome $p_1(t), \ldots, p_r(t) \in K[t]$ mit

$$f(t) = l(f)\; p_1(t)\; \ldots\; p_r(t)$$

(über Körpern: normiertes und irreduzibles Polynom = Primpolynom).

Beweis:

Die Existenz wird mittels Induktion über $m = \deg(f)$ gezeigt.
Für $m = 1$ ist $f(t)$ irreduzibel, $f(t) = l(f)\, \tilde{f}(t)$ mit $\tilde{f}(t)$ normiert und irreduzibel. Sei nun $m > 1$ und die Behauptung für alle Polynome vom Grad $< m$ bereits gezeigt. Ist $f(t)$ irreduzibel, so ist die Behauptung wiederum klar. Sonst existiert Aufspaltung $f(t) = f_1(t)\, f_2(t)$ mit $0 < \deg(f_i) < \deg(f)$ $(i = 1, 2)$. Wende Induktionsvorraussetzung auf $f_1(t)$, $f_2(t)$ an und erhalte so die gewünschte Darstellung von $f(t)$.
Die Eindeutigkeit der Darstellung sieht man folgendermaßen:
Es sei

$$\frac{1}{l(f)}\, f(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_r(t) = q_1(t) \cdot \ldots \cdot q_s(t)$$

mit Primpolynomen p_i, q_i (o.B.d.A. : $r \leq s$). Dann folgt

$$p_1(t) \mid (q_1(t) \cdot \ldots \cdot q_s(t)),$$

nach (8.2)(ii) teilt $p_1(t)$ dann ein $q_j(t)$, eventuelles Umnumerieren liefert $p_1(t)|q_1(t)$, nach (8.2)(i) ist also $p_1(t) = q_1(t)$. Damit erhält man

$$p_2(t) \cdot \ldots \cdot p_r(t) = q_2(t) \cdot \ldots \cdot q_s(t).$$

Führt man denselben Schluß für $p_2(t), \ldots, p_r(t)$ durch, folgt $r = s$ und $p_i = q_i$ $(1 \leq i \leq r)$ (bei passender Numerierung).

□

8.4 Definition

Zu $f(t)$, $g(t) \in K[t]$ mit $\deg(f) \geq 0$, $\deg(g) \geq 0$ heißt das eindeutig bestimmte normierte Polynom $m(t)$ kleinsten Grades mit $f(t)|m(t)$, $g(t)|m(t)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $f(t)$, $g(t)$.

Bezeichnung: $m(t) = \mathrm{kgV}\,(f(t),\, g(t))$.
(Zusätzlich vereinbaren wir: $\mathrm{kgV}\,(0,\, g(t)) = 0$.)

Bemerkung:
Für $h(t) = \dfrac{f(t)\, g(t)}{\mathrm{ggT}\,(f(t),\, g(t))}$ ist $\mathrm{kgV}\,(f(t),\, g(t)) = \dfrac{1}{l(h)}\, h(t)$.
Angenehmere Schreibweise für Darstellung durch Primpolynome:
Es sei $\mathbb{P}_t$ die Menge aller Primpolynome von $K[t]$. Dann ist

$$f(t) = l(f) \prod_{p(t) \in \mathbb{P}_t} p(t)^{\nu_p(f)}, \quad g(t) = l(g) \prod_{p(t) \in \mathbb{P}_t} p(t)^{\nu_p(g)},$$

($\nu_p(g)$, $\nu_p(f) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, fast alle Exponenten gleich 0)

$$\begin{aligned} f(t)\, g(t) &= l(f)\, l(g) \prod_{p(t) \in \mathbb{P}_t} p(t)^{\nu_p(f)+\nu_p(g)}, \\ \mathrm{ggT}\,(f(t),\, g(t)) &= \prod_{p(t) \in \mathbb{P}_t} p(t)^{\min(\nu_p(f),\, \nu_p(g))}, \\ \mathrm{kgV}\,(f(t),\, g(t)) &= \prod_{p(t) \in \mathbb{P}_t} p(t)^{\max(\nu_p(t),\, \nu_p(g))}. \end{aligned}$$

Zu $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ bzw. $A \in K^{n \times n}$, betrachten wir die Spezialisierungen:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma \quad &: \quad K[t] \longrightarrow \mathrm{End}\,(V) \quad : \quad \sum_{i=0}^m a_i t^i \longmapsto \sum_{i=0}^m a_i \sigma^i \quad (\sigma^0 = \mathrm{id}_V), \\ \varphi_A \quad &: \quad K[t] \longrightarrow K^{n \times n} \quad : \quad \sum_{i=0}^m a_i t^i \longmapsto \sum_{i=0}^n a_i A^i \quad (A^0 = I_n). \end{aligned}$$

Statt $\varphi_\sigma(f(t))$ schreiben wir im folgenden kurz $f(\sigma)$.

Bemerkung:
φ_σ, φ_A sind Ringhomomorphismen, speziell ist $\varphi_\sigma(K[t])$ kommutativer Teilring von $\mathrm{End}\,(V)$ und $\varphi_A(K[t])$ einer von $K^{n \times n}$.

8.5 Satz

Für $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ und $f(t)$, $g(t) \in K[t]$ gelten:

(i) $g(t) | f(t) \;\Rightarrow\; \ker(g(\sigma)) \subseteq \ker(f(\sigma))$,

(ii) $\ker(\varphi_\sigma(\mathrm{ggT}\,(f(t),\, g(t)))) = \ker(g(\sigma)) \cap \ker(f(\sigma))$,

(iii) $\ker(\varphi_\sigma(\mathrm{kgV}\,(f(t),\, g(t)))) = \ker(f(\sigma)) + \ker(g(\sigma))$.

Bemerkung:
Für $\mathrm{ggT}\,(f(t),\, g(t)) = 1$ ist der entsprechende Kern der Nullraum, also gilt

$$\ker(f(\sigma)\, g(\sigma)) = \ker(f(\sigma)) \dot{+} \ker(g(\sigma)).$$

Beispiel:
Im Fall $\dim V = 2$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ mit charakteristischem Polynom

$$f(t) = \det(t\, I_2 - A) = t^2 - \mathrm{Sp}\,(A)\, t + \det(A)\, t^0$$

wird

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - (\alpha + \delta)\, A + \det(A)\, A^0 \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \gamma\delta & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\alpha+\delta)\, \alpha & (\alpha+\delta)\, \beta \\ (\alpha+\delta)\, \gamma & (\alpha+\delta)\, \delta \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis zu (8.5):

(i) Es sei $\underline{x} \in \ker(g(\sigma)) = \{\, \underline{y} \in V \mid g(\sigma)\,(\,\underline{y}) = \underline{0}\,\}$.
In $K[t]$ gilt $f(t) = g(t)\,h(t)$, also ist

$$\begin{aligned} f(\sigma)\,(\,\underline{x}) &= (g(\sigma)\,h(\sigma))\,(\,\underline{x}) \\ &= (h(\sigma)\,g(\sigma))\,(\,\underline{x}) \\ &= h(\sigma)\,(g(\sigma)\,(\,\underline{x})) \\ &= h(\sigma)\,(\,\underline{0}\,) \\ &= \underline{0}\,, \end{aligned}$$

das heißt $\underline{x} \in \ker(f(\sigma))$.

(ii) "$\subseteq$" gilt nach (i).
Sei ferner $\underline{x} \in \ker(g(\sigma)) \cap \ker(f(\sigma))$.
In $K[t]$ ist $\operatorname{ggT}(f(t),\, g(t)) = \tilde{f}(t)\,f(t) + \tilde{g}(t)\,g(t)$, es folgt

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(\operatorname{ggT}(f(t),\, g(t)))\,(\,\underline{x}) &\overset{\varphi_\sigma \text{ Ringhom.}}{=} \big(\tilde{f}(\sigma)\,f(\sigma) + \tilde{g}(\sigma)\,g(\sigma)\big)\,(\,\underline{x}) \\ &= \tilde{f}(\sigma)\,\underbrace{(f(\sigma)\,(\,\underline{x}))}_{=\,\underline{0}} + \tilde{g}(\sigma)\,\underbrace{(g(\sigma)(\,\underline{x}))}_{=\,\underline{0}} \\ &= \underline{0}\,, \end{aligned}$$

also gilt auch "$\supseteq$".

(iii) "$\supseteq$" gilt nach (i).
In $K[t]$ ist

$$\operatorname{kgV}(f(t),\, g(t)) = f(t)\,f_1(t) = g(t)\,g_1(t)$$

mit $1 = \operatorname{ggT}(f_1(t),\, g_1(t)) = \tilde{f}_1(t)\,f_1(t) + \tilde{g}_1(t)\,g_1(t)$.
Ist nun $\underline{x} \in V$ beliebig, so gilt

$$\underline{x} = \mathrm{id}_V(\,\underline{x}) = \underbrace{\tilde{f}_1(\sigma)\,f_1(\sigma)\,(\,\underline{x})}_{=:\,\underline{x}_1} + \underbrace{\tilde{g}_1(\sigma)\,g_1(\sigma)\,(\,\underline{x})}_{=:\,\underline{x}_2}.$$

Ist zusätzlich $\underline{x} \in \ker\Big(\varphi_\sigma\big(\operatorname{kgV}(f(t),\, g(t))\big)\Big)$, so folgt

$$\begin{aligned} f(\sigma)\,(\,\underline{x}_1) &= f(\sigma)\,\tilde{f}_1(\sigma)\,f_1(\sigma)\,(\,\underline{x}) \\ &= \tilde{f}_1(\sigma)\,f(\sigma)\,f_1(\sigma)\,(\,\underline{x}) \\ &= \underline{0}\,, \\ g(\sigma)\,(\,\underline{x}_2) &= g(\sigma)\,\tilde{g}_1(\sigma)\,g_1(\sigma)\,(\,\underline{x}) \\ &= \tilde{g}_1(\sigma)\,(\,\underline{0}\,) \\ &= \underline{0}\,, \end{aligned}$$

also ist $\underline{x} \in \ker(f(\sigma)) + \ker(g(\sigma))$, es gilt auch "$\subseteq$".

$\square$

Bemerkung:
Zu jedem $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ existiert ein Polynom $f(t) \in K[t]$ positiven Grades mit $f(\sigma) = \mathcal{O}$ (Nullabbildung).

Aus der Linearen Algebra I wissen wir:
$\dim(\operatorname{End}(V)) = \dim K^{n\times n} = n^2$, also sind die Potenzen $\sigma^0 = \mathrm{id}_V,\, \sigma^1,\, \sigma^2,\, \ldots,\, \sigma^{n^2}$ linear abhängig, d.h. es existieren $\lambda_i \in K$, $0 \le i \le n^2$, nicht alle 0, mit $\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i \sigma^i = 0$. Also leistet etwa $f(t) := \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i t^i$ das Gewünschte.

Man beachte: Mit $f(t)$ hat auch jedes Vielfache von $f(t)$ in $K[t]$ diese Eigenschaft.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\sigma = \mathrm{id}_V &: f(t) = t-1,\\ \sigma = \mathcal{O} &: f(t) = t,\end{aligned}$$

im Fall $\dim V = 2$ hat das charakteristische Polynom diese Eigenschaft, vgl. Beispiel auf Seite 4.

Später werden wir zeigen, daß dies generell so ist.

Zunächst zeigen wir:
Es existiert ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom minimalen Grades (> 0) $m_\sigma(t)$ mit $m_\sigma(\sigma) = 0$.
Dazu betrachten wir

$$\mathcal{M} = \{f(t) \in K[t] \mid \deg(f) > 0,\ f(\sigma) = 0\} \neq \emptyset.$$

In $\mathcal{M}$ ordnen wir die Polynome nach ihrem Grad, also existiert in $\mathcal{M}$ ein Polynom $m(t)$ minimalen Grades mit $m(\sigma) = 0$. Hierfür gilt $m(t) | f(t)\ \forall f(t) \in \mathcal{M}$. Denn in $K[t]$ ist

$$f(t) = Q(f, m)(t)\, m(t) + R(f, m)(t),$$

und wegen $\mathcal{O} = f(\sigma) = m(\sigma)$ ist auch $R(f, m)(t)$ aus $\mathcal{M}$. Wegen $\deg(R(f, m)) < \deg(m)$ ist demnach $R(f, m) = 0$.

Die Eindeutigkeit wird durch Normierung erreicht: $m_\sigma(t) := \dfrac{1}{l(m)}\, m(t)$.

8.6 Definition

Zu $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ heißt dasjenige normierte Polynom $m_\sigma(t) \neq 0$ kleinsten Grades mit $m_\sigma(\sigma) = \mathcal{O}$ das Minimalpolynom von σ.

Beispiele:

(i)

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{id}_V}(t) &= t-1,\\ m_{\mathcal{O}}(t) &= t.\end{aligned}$$

(ii) Es sei $\dim V = 2$ und $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$. Ist das Minimalpolynom von σ vom Grad 1, so ist $m_\sigma(t) = t + \lambda$ mit $\lambda \in K$, also

$$\mathcal{O} = m_\sigma(\sigma) = \sigma + \lambda\,\mathrm{id}_V,\ \text{d.h. } \sigma = -\lambda\,\mathrm{id}_V\,.$$

Mithin besitzen genau die skalaren Vielfachen der Identität ein Minimalpolynom vom Grad 1.

(Dies gilt genauso für $\dim V = n \in \mathbb{N}$.)

Für alle übrigen $\sigma \neq \lambda\,\mathrm{id}_V$ stimmen (vgl. Beispiel auf Seite 4) Minimalpolynom und charakteristisches Polynom überein.

8.7 Definition

Es sei $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ und U ein Unterraum von V. Gilt dann $\sigma(U) \subseteq U$, so heißt U (σ-)invariant bzw. invarianter Unterraum.

Beispiele:

(i) $\ker(\sigma)$ ist σ-invariant, denn für $\underline{x} \in \ker(\sigma)$ gilt $\sigma(\underline{x}) = \underline{0} \in \ker(\sigma)$.

(ii) Ist U Unterraum zum Eigenwert λ, so ist U σ-invariant.
($\underline{x} \in U \Rightarrow \sigma(\underline{x}) = \lambda\,\underline{x} \in U$.)

(iii) Für $f(t) \in K[t]$ ist $\ker(f(\sigma))$ σ-invariant.

(Für $\underline{x} \in \ker(f(\sigma))$ gilt

$$\begin{aligned} f(\sigma)\,(\sigma\,(\underline{x})) &= f(\sigma)\,\sigma\,(\underline{x}) \\ &= \sigma\, f(\sigma)\,(\underline{x}) \\ &= \sigma(\underbrace{f(\sigma)\,(\underline{x})}_{=\underline{0}}) = \underline{0}\ .) \end{aligned}$$

8.8 Hilfssatz

Es sei $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ mit Minimalpolynom $m_\sigma(t)$. Ferner seien $f(t),\, g(t) \in K[t]$ mit $g(t)|f(t)|m_\sigma(t)$ und $\deg(g) < \deg(f)$. Dann gilt: $\ker(g(\sigma)) \subset \ker(f(\sigma))$.

Beweis:
"$\subseteq$" wurde in (8.5)(i) gezeigt. Wir konstruieren folglich $\underline{y} \in \ker(f(\sigma)) \setminus \ker(g(\sigma))$. Wir wissen: In $K[t]$ ist $m_\sigma(t) = f(t)\,h(t)$, sowie für $g_1(t) = g(t)\,h(t)$ ist $\deg(g_1) < \deg(m_\sigma)$. Also existiert nach Voraussetzung ein $\underline{z} \in V$ mit $g_1(\sigma)\,(\underline{z}) \neq 0$. Setze $\underline{y} = h(\sigma)\,(\underline{z})$. Hierfür erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(\sigma)\,(\underline{y}) &= f(\sigma)\,h(\sigma)\,(\underline{z}) \\ &= m_\sigma(\sigma)\,(\underline{z}) \\ &= \mathcal{O}\,(\underline{z}) \\ &= \underline{0}\,, \\ g(\sigma)\,(\underline{y}) &= g(\sigma)\,h(\sigma)\,(\underline{z}) \\ &= g_1(\sigma)\,(\underline{z}) \\ &\neq \underline{0}\ . \end{aligned}$$

□

8.9 Satz

$\lambda \in K$ Nullstelle von $m_\sigma(t) \;\Leftrightarrow\; \lambda$ Eigenwert zu σ.

Beweis:
"$\Rightarrow$":
Wende (8.8) an mit $g(t) = 1,\; f(t) = t - \lambda$ ($f(t)|m_\sigma(t)$ gemäß (6.16)). Danach existiert $\underline{x} \in \ker(f(\sigma)) \setminus \ker(g(\sigma))$, d.h. $\underline{x} \neq \underline{0}$, mit $\underbrace{(\sigma - \lambda\,\mathrm{id}_V)}_{=f(\sigma)}\,(\underline{x}) = \underline{0}$, d.h. $\underline{x}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ.
"$\Leftarrow$":
Für $f(t) = t - \lambda$ ist $\ker(f(\sigma)) \neq \{\underline{0}\}$, besteht nämlich aus $\underline{0}$ und den Eigenvektoren zu λ.
Wegen $\ker(f(\sigma)) = \ker\,(f(\sigma)) \cap \underbrace{\ker(m_\sigma(\sigma))}_{=V}$ ist gemäß (8.5)(ii) $\mathrm{ggT}\,(f(t),\, m_\sigma(t)) \neq 1$, also muß $\mathrm{ggT}\,(f(t),\, m_\sigma(t)) = t - \lambda$ sein.

□

8.10 Definition

Es seien $V_1, \ldots, V_r$ Unterräume von V mit $V_i \neq \{\underline{0}\}$ $(1 \leq i \leq r)$. Dann heißt V direkte Summe von $V_1, \ldots, V_r$ (Schreibweise: $V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_r$), falls gelten:

(i) $V = V_1 + \ldots + V_r$,

(ii) $V_i \cap \tilde{V}_i = \{\underline{0}\}$ für $\tilde{V}_i := V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_r$ $(1 \leq i \leq r)$.

8.11 Hilfssatz

Es sei $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit Minimalpolynom $m_\sigma(t)$. In $K[t]$ sei $m_\sigma(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{l_i}$ die Primpolynomzerlegung von $m_\sigma(t)$ in paarweise verschiedene Primpolynome ($l_i \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$). Dann gilt $V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_s$ für $V_i = \ker\left(p_i(\sigma)^{l_i}\right)$.

Beweis:
Zunächst ist

$$
\begin{aligned}
V = \ker(\mathcal{O}) &= \ker(m_\sigma(\sigma)) \\
&= \ker\left(\prod_{i=1}^{s} p_i(\sigma)^{l_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \ker\left(p_i(\sigma)^{l_i}\right) \quad \text{(nach (8.5)(iii))} \\
&= \sum_{i=1}^{s} V_i.
\end{aligned}
$$

Es bleibt $V_i \cap \tilde{V}_i = \{\underline{0}\}$ zu zeigen.

Gemäß (8.5)(ii) genügt es dazu, $\tilde{V}_i = \ker\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} p_j(\sigma)^{l_j}\right)$ zu zeigen. Letzteres folgt aber unmittelbar aus (8.5)(iii).

$\square$

Beispiel:
Es sei $\dim V = 5$, $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_5$ eine Basis von V, bzgl. der $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ die Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

zugeordnet ist. Wir berechnen $m_\sigma(t)$ mittels (8.11).
Wähle $\underline{x} \in V$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, und betrachte $\underline{x}, \sigma(\underline{x}), \sigma^2(\underline{x}), \ldots$. Spätestens $\{\underline{x}, \sigma(\underline{x}), \ldots, \sigma^5(\underline{x})\}$ ist linear abhängig. Der hiervon erzeugte Unterraum ist offenbar σ-invariant. Es ist $\sigma(\underline{x}_5) = 3\,\underline{x}_5$ von $\underline{x}_5$ linear abhängig, also ist $K\,\underline{x}_5$ σ-invariant. Gleiches gilt für $K\,\underline{x}_4$. Für $\underline{x}_3$ erhält man

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}_3, \\
\sigma(\underline{x}_3) &= \underline{x}_2 + 2\,\underline{x}_3, \\
\sigma^2(\underline{x}_3) &= \underline{x}_1 + 4\,\underline{x}_2 + 4\,\underline{x}_3, \\
\sigma^3(\underline{x}_3) &= 6\,\underline{x}_1 + 12\,\underline{x}_2 + 8\,\underline{x}_3, \text{ d.h. } \{\underline{x}_3, \sigma(\underline{x}_3), \sigma^2(\underline{x}_3), \sigma^3(\underline{x}_3)\} \text{ ist linear abhängig.}
\end{aligned}
$$

Also ist $U_1 = K\,\underline{x}_1 + K\,\underline{x}_2 + K\,\underline{x}_3$ ein σ-invarianter Unterraum, der $K\,\underline{x}_1$ echt enthält.

Insgesamt haben wir $V = U_1 \dotplus K\,\underline{x}_4 \dotplus K\,\underline{x}_5$ gezeigt.
Die zugehörigen Minimalpolynome sind:

für $\sigma|_{K\,\underline{x}_5}$: $t-3$,
für $\sigma|_{K\,\underline{x}_4}$: $t-2$,
für $\sigma|_{U_1}$: $(t-2)^3$ (!).

Nach (8.11) ist

$$
\begin{aligned}
m_\sigma(t) &= \operatorname{kgV}(t-3,\, t-2,\, (t-2)^3) \\
&= (t-2)^3\,(t-3).
\end{aligned}
$$

(Dagegen ist $f_\sigma(t) = (t-2)^4\,(t-3)$.)

8.12 Berechung σ-invarianter Teilräume

$\underline{x}, \ldots, \sigma^{k-1}(\underline{x})$ sind linear unabhängig und

$$\sigma^k(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \, \sigma^i(\underline{x}).$$

Dann gelten:

(i) $U = \sum_{i=0}^{k-1} K \, \sigma^i(\underline{x})$ ist σ-invarianter Unterraum.

(ii) $\sigma|_U$ hat als Minimalpolynom

$$m_{\sigma|_U}(t) := t^k - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \, t^i.$$

Beweis:

Zunächst ist $m_{\sigma|_U}(\sigma|_U) = \mathcal{O}_U$.

Dafür genügt es wegen (i) zu zeigen, daß $m_{\sigma|_U}(\sigma|_U)(\sigma^\nu(\underline{x})) = \underline{0}$ $(0 \le \nu < k)$ ist. Dies ist wegen

$$m_{\sigma|_U}(\sigma|_U)\,\sigma^\nu(\underline{x}) = \sigma^\nu \, m_{\sigma|_U}(\sigma|_U)(\underline{x}) = \sigma^\nu(\underline{0}) = \underline{0}$$

richtig.

Weiter besitzt $m_{\sigma|_U}(t)$ minimalen Grad mit $(m_{\sigma|_U}(\sigma|_U) = \mathcal{O}|_U)$.

Dies zeigen wir indirekt.

Wäre $f(t)$ Minimalpolynom von $\sigma|_U$ mit Grad $\deg(f) \le k-1$, etwa

$$f(t) = t^l + \sum_{j=0}^{l-1} \mu_j \, t^j \quad (l < k),$$

so folgte

$$\sigma^l(\underline{x}) = \sum_{j=0}^{l-1} \mu_j \, \sigma^j(\underline{x}),$$

d.h. $\sigma^l(\underline{x})$ linear abhängig von $\underline{x}, \sigma(\underline{x}), \ldots, \sigma^{l-1}(\underline{x})$ mit $l \le k-1$ im Widerspruch zur Wahl von k.

□

Konstruktion von $m_\sigma(t)$

(i) Setze $V_0 \leftarrow \{\underline{0}\}$, $i \leftarrow 1$, $m_0(t) \leftarrow 1$.

(ii) Wähle $\underline{x}_i \in V \setminus \sum_{j=0}^{i-1} V_j$ (speziell: $\underline{x}_i \neq 0$).

Bilde sukzessive

$$\underline{x}_i, \sigma(\underline{x}_i), \ldots, \sigma^{k_i-1}(\underline{x}_i) \text{ linear unabhängig,}$$

sowie $\sigma^{k_i}(\underline{x}_i) = \sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{i,j} \, \sigma^j(\underline{x}_i)$.

Setze

$$V_i \longleftarrow K\,\underline{x}_i + K\,\sigma(\underline{x}_i) + \ldots + K\,\sigma^{k_i-1}(\underline{x}_i),$$

dies ist k_i-dimensionaler σ-invarianter Teilraum von V.

Das zugehörige Minimalpolynom ist

$$m_i(t) = t^{k_i} - \sum_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{i,j}\, t^j.$$

Setze $m_0(t) \leftarrow \operatorname{kgV}(m_0(t),\, m_i(t))$.

(iii) Ist $V = \sum_{\nu=1}^{i} V_\nu$, so ist $m_0(t)$ gemäß (8.5)(iii) und nachfolgender Bemerkung das Minimalpolynom von σ und wir sind fertig.

Für $V \supset \sum_{\nu=1}^{i} V_\nu$ setze $i \leftarrow i+1$ und gehe zu (ii).

Vergleiche vorangehendes Beispiel!
Was passiert, wenn man mit $\underline{x}_1$ oder $\underline{x}_2$ an der Stelle von $\underline{x}_3$ startet? (Übung!)

Bemerkung:
Für $\sigma \in \operatorname{End}(V)$, $f(t) \in K[t]$ mit $f(t) | m_\sigma(t)$ ist $U := \ker(f(\sigma))$ ein σ-invarianter Teilraum von V. Hierfür ist

$$m_{\sigma|_U}(t) = \frac{1}{l(f)}\, f(t).$$

Beweis:
Wegen $f(\sigma)(U) = \{\underline{0}\}$ gilt $m_{\sigma|_U}(t) | f(t)$. Wegen $\ker(m_{\sigma|_U}(\sigma)) \supseteq \ker(f(\sigma))$ und (8.8) muß

$$\deg(m_{\sigma|_U}) = \deg(f)$$

gelten. (Wende (8.8) mit $g(t) = m_{\sigma|_U}(t)$ an.) Wegen der Normierung folgt also die Behauptung.

$\square$

Falls für $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ das Minimalpolynom die Gestalt

$$m_\sigma(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{l_i}$$

($p_i(t)$ paarweise verschiedene Primpolynome, $l_i \in \mathbb{N}$) besitzt, so gilt für $U := \ker(p_i(\sigma)^{l_i})$ demnach

$$m_{\sigma|_U}(t) = p_i(t)^{l_i}.$$

8.13 Hilfssatz

Es sei $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit $m_\sigma(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{l_i}$ und $U_i := \ker(p_i(\sigma)^{l_i})$ $(1 \le i \le s)$. Dann gilt:

(i) $\{\underline{0}\} = \ker(p_i(\sigma)^o) \subset \ker(p_i(\sigma)^1) \subset \ldots \subset \ker(p_i(\sigma)^{l_i}) = \ker(p_i(\sigma)^{l_i+m})$ $(m \in \mathbb{N})$,

(ii) $V = p_i(\sigma)^0(V) \supset p_i(\sigma)^1(V) \supset \ldots \supset p_i(\sigma)^{l_i}(V) = p_i(\sigma)^{l_i+m}(V)$ $(m \in \mathbb{N})$,

(iii) $V = \ker(p_i(\sigma)^{l_i}) \dot{+} p_i(\sigma)^{l_i}(V)$.

Beweis:

(i) Es ist $\{\underline{0}\} = \ker(\mathrm{id}_V)$ mit $\mathrm{id}_V = p_i(\sigma)^0$.
Die "$\subset$"-Aussagen folgen unmittelbar aus (8.8).
Schließlich liefert (8.5)(ii):

$$\begin{aligned} \ker(p_i(\sigma)^{l_i}) &= \ker(\varphi_\sigma(\operatorname{ggT}(p_i(t)^{l_i+m},\, m_\sigma(t)))) \\ &= \ker(p_i(\sigma)^{l_i+m}) \cap \ker(m_\sigma(\sigma)) \\ &= \ker(p_i(\sigma)^{l_i+m}) \cap V \\ &= \ker(p_i(\sigma)^{l_i+m}). \end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen zunächst, daß $p_i(\sigma)^\nu\,(V)$ ein $p_i(\sigma)$-invarianter Teilraum von V ist $(\nu \in \mathbb{N})$.
Sei dazu $\underline{x} \in p_i(\sigma)^\nu\,(V)$, d.h. $\underline{x} = p_i(\sigma)^\nu\,(\underline{y})$ für passendes $\underline{y} \in V$;
es folgt

$$\begin{aligned} p_i(\sigma)\,(\underline{x}) &= p_i(\sigma)^{\nu+1}\,(\underline{y}) \\ &= p_i(\sigma)^\nu\,(\underbrace{p_i(\sigma)\,(\underline{y})}_{\in V}) \quad \in p_i(\sigma)^\nu\,(V). \end{aligned}$$

Damit gilt $p_i(\sigma)^\nu\,(V) \supseteq p_i(\sigma)^{\nu+1}\,(V)$; der Rest folgt mit (i) und der Dimensionsgleichung für Endomorphismen φ von V:

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$$

für $\varphi = p_i(\sigma)^\nu \quad (\nu \in \mathbb{Z}^{\geq 0})$.

(iii) Es gilt $V = \ker(p_i(\sigma)^{l_i}) + p_i(\sigma)^{l_i}\,(V)$ gemäß Dimensionsgleichung; wegen

$$p_i(\sigma)\,(p_i(\sigma)^{l_i}\,(V)) = p_i(\sigma)^{l_i}\,(V)$$

folgt $\ker(p_i(\sigma)^{l_i}|_{p_i(\sigma)^{l_i}\,(V)}) = \{\underline{0}\}$, also $\ker(p_i(\sigma)^{l_i}) \cap p_i(\sigma)^{l_i}\,(V) = \{\underline{0}\}$.

□

<u>Bemerkung:</u>
Die Schlußweise in Teil (ii) des letzten Beweises zeigt analog, daß $p_i(\sigma)^\nu(V)$ ein σ-invarianter Unterraum ist.

8.14 Satz (1. Normalform)

Für $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit Minimalpolynom $m_\sigma(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{l_i}$ gelten:

(i) $V = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_s$ mit σ-invarianten Teilräumen
$V_i := \ker(p_i(\sigma)^{l_i}) \neq \{\underline{0}\} \quad (1 \leq i \leq s)$,

(ii) $1 \leq s \leq n$,

(iii) $p_i(\sigma)$ ist singulär. $p_j(\sigma)\,(V_i) = V_i$ für $i \neq j$.

<u>Beweis:</u>

(i) Folgt aus (8.11), der vorangehenden Bemerkung und (8.8).

(ii) Offenbar ist $n = \dim V = \sum_{i=1}^{s} \dim V_i \geq \sum_{i=1}^{s} 1 = s \;\; (\geq 1)$.

(iii) $p_i(\sigma)$ ist singulär, da nach (8.8) $\ker(p_i(\sigma)) \neq \{\underline{0}\}$ ist.
V_i ist σ-invariant, also gilt $p_j(\sigma)\,(V_i) \subseteq V_i$.
Die behauptete Gleichheit ergibt sich dann aus

$$\ker(p_j(\sigma)) \cap \ker(p_i(\sigma)^{l_i}) = \{\underline{0}\} \quad (\text{gemäß } (8.5)(\text{ii}))$$

mittels der Dimensionsformel.

□

Der letzte Satz hat nun folgende Auswirkungen auf die Matrixdarstellung von σ bzgl. geeigneter Basen:
Aus

$$V = V_1 \dot{+} \ldots \dot{+} V_s$$

und Basisdarstellung der Teilräume, etwa

$$V_i = K\,\underline{x}_{i,1} + \ldots + K\,\underline{x}_{i,n_i},$$

erhält man für V die Basis

$$B := \{\,\underline{x}_{i,\nu} \mid 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq \nu \leq n_i\},$$

bzgl. der σ eine Matrix der folgenden Form zugeordnet ist:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{n_1} & \overbrace{\quad}^{n_2} & \cdots & \overbrace{\quad}^{n_s} \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1\{ \\ n_2\{ \\ \vdots \\ n_s\{ \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & \\ & \boxed{*} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \boxed{*} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Nächstes Ziel: Spalte die V_i ihrerseits in σ-invariante Teilräume auf (falls möglich).
Dazu betrachten wir eins der Kästchen, d.h. wir setzen im folgenden

$$V \leftarrow V_i, \quad \sigma \leftarrow \sigma|_{V_i}, \quad m_\sigma(t) \leftarrow m_{\sigma|_{V_i}}(t) = p_i(t)^{l_i},$$

um unnötige Indizes zu vermeiden.

8.15 Definition

Es sei U ein Unterraum von V. Dann heißen Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_m \in V$ <u>über U linear unabhängig</u>, falls $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\underline{x}_i \in U\ (\lambda_i \in K) \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ gilt. Andernfalls heißen sie <u>über U linear abhängig</u>.

<u>Bemerkungen:</u>

(i) $\underline{x} \in V \backslash U$ ist über U linear unabhängig.

(ii) Für $U = \{\,\underline{0}\}$ entspricht "über U linear unabhängig" dem alten "linear unabhängig".

(iii) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_m$ über U linear (unabhängig) abhängig.
$\Leftrightarrow$ $\underline{x}_1 + U, \ldots, \underline{x}_m + U$ in V/U linear (unabhängig) abhängig.

$$\left(\begin{array}{lcl} \text{Denn:}\quad U = \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i\,\underline{x}_i + U) & = & (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\underline{x}_i) + U \\ \qquad\qquad\qquad\Leftrightarrow & & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\underline{x}_i \in U \end{array} \right)$$

8.16 Hilfssatz

Es seien $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit $m_\sigma(t) = p(t)^l$ und $\deg(p) = k$. Dann gelten für $1 \leq j \leq l$:

(i) $\underline{x} \in \ker(p(\sigma)^j) \backslash \ker(p(\sigma)^{j-1})$
$\Rightarrow$ $\underline{x}, \sigma(\underline{x}), \ldots, \sigma^{k-1}(\underline{x})$ sind über $\ker(p(\sigma)^{j-1})$ linear unabhängig,

(ii) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ (etwa $\in \ker(p(\sigma)^{j+1})$) sind linear unabhängig über $\ker(p(\sigma)^j)$
$\Leftrightarrow$ $p(\sigma)(\underline{x}_1), \ldots, p(\sigma)(\underline{x}_r)$ linear unabhängig über $\ker(p(\sigma)^{j-1})$.

Beweis:

(i) Annahme, es existieren $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \in K$, nicht alle 0, mit $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \, \sigma^i(\underline{x}) \in \ker(p(\sigma)^{j-1})$.

Für $0 \neq h(t) := \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \, t^i \in K[t]$ ist $\deg(h) < k = \deg(p)$, also ist $1 = \operatorname{ggT}(h(t), p(t)^k)$.

(ii) Gemäß (8.5)(i) ist $\ker(h(\sigma)) = \{\underline{0}\}$, d.h. $h(\sigma)$ ist regulär.
Andererseits ist $h(\sigma)(\underline{x}) \in \ker(p(\sigma)^{j-1})$, und damit wird

$$\underline{0} = p(\sigma)^{j-1} \, h(\sigma)(\underline{x}) = h(\sigma)(p(\sigma)^{j-1}(\underline{x})),$$

also $\underline{0} = p(\sigma)^{j-1}(\underline{x})$ im Widerspruch zur Wahl von $\underline{x}$.

(iii) Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, p(\sigma)(\underline{x}_i) \in \ker(p(\sigma)^{j-1}) \quad &\Leftrightarrow \quad p(\sigma)^{j-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, p(\sigma)(\underline{x}_i)\right) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \quad p(\sigma)^{j}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, \underline{x}_i\right) = \underline{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, \underline{x}_i \in \ker(p(\sigma)^{j}). \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:
Es sei U ein Unterraum von V und $M \subseteq U$ linear unabhängig, sowie $\tilde{M} \subseteq V$ über U linear unabhängig. Dann ist $M \cup \tilde{M}$ linear unabhängig.
(Denn:

$$\underline{0} = \sum_{\underline{m} \in M} \alpha_{\underline{m}} \, \underline{m} + \sum_{\underline{\tilde{m}} \in \tilde{M}} \alpha_{\underline{\tilde{m}}} \, \underline{\tilde{m}} \quad (\alpha_{\underline{m}}, \alpha_{\underline{\tilde{m}}} \in K, \text{ jeweils nur endlich viele } \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{\underline{\tilde{m}} \in \tilde{M}} \alpha_{\underline{\tilde{m}}} \, \underline{\tilde{m}} \in U$$

$\Rightarrow$ alle $\alpha_{\underline{\tilde{m}}} = 0$, damit alle $\alpha_{\underline{m}} = 0$.)

Zur Erinnerung: Die Begleitmatrix zu dem Polynom
$f(t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \, t^i$ wurde in (5.24) erklärt als

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{k-2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A_f \in K^{k \times k}$$

mit $\det(t \, I_k - A_f) = f(t)$.
Wir behaupten:
Für

$$B_f := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -\alpha_{k-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{k-1} \end{pmatrix} \in K^{k \times k}$$

gilt ebenfalls

$$f(t) = \det(t\, I_k - B_f).$$

Die Matrizen A_f und B_f gehen durch

Vertauschen von Zeile i mit Zeile $k+1-i$ $\left(1 \le i \le \frac{n}{2}\right)$ sowie
Vertauschen von Spalte j mit Spalte $k+1-j$ $\left(1 \le j \le \frac{n}{2}\right)$ auseinander hervor.

Dies ergibt eine neue Berechungsmöglichkeit für das charakteristische Polynom (vgl. dazu Beispiel Seite 8):
Wähle $\underline{x}_1 \in V\backslash\{\underline{0}\}$ und bilde $\sigma(\underline{x}_1), \ldots, \sigma^k(\underline{x}_1)$ bis $\sigma^k(x_1)$ erstmals linear abhängig von $\underline{x}_1, \sigma(\underline{x}_1), \ldots, \sigma^{k-1}(\underline{x}_1)$ wird. Setze

$$m_1(t) = t^k - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{1i}\, t^i \text{ für } \sigma^k(\underline{x}_1) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{1i}\, \sigma^i(\underline{x}_1);$$

dann ist $m_1(t)$ Minimalpolynom von $\sigma|_{U_1}$ für $U_1 = [\underline{x}_1, \sigma(\underline{x}_1), \ldots, \sigma^{k-1}(\underline{x}_1)]$.
Für $U_1 = V$ sind wir fertig.
Sonst wähle $\underline{x}_2 \in V\backslash U_1$; dies definiert den Unterraum $U_2 = [\sigma^i(\underline{x}_2) \mid i \in \mathbb{Z}^{\ge 0}]$ (beachte, daß sich U_2 tatsächlich stets durch $\sigma^i(\underline{x}_2)$ mit $i < n$ erzeugen läßt), es bezeichne $m_2(t)$ das Minimalpolynom von $\sigma|_{U_2}$.
Für $U_1 + U_2 = V$ sind wir fertig mit

$$m_\sigma(t) = \mathrm{kgV}\,(m_1(t), m_2(t)).$$

Sonst wähle $\underline{x}_3 \in V\backslash(U_1 + U_2)$ etc.

<u>Beispiel:</u>
Es sei

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

die σ bzgl. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_4$ zugeordnete Matrix.

Für $\underline{x}_1 = \underline{e}_1$, ist $\underline{x}_2 := A_\sigma\, \underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\underline{x}_1$ linear unabhängig,

$A_\sigma^2\, \underline{x}_1 = A_\sigma\, \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\underline{x}_2 + 2\,\underline{x}_1$ von $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ linear abhängig.
Also ist $U_1 = K\,\underline{x}_1 + K\,\underline{x}_2$ A_σ-invariant mit

$$m_1(t) = t^2 + t - 2.$$

Bei Basisergänzung mit $\underline{x}_3, \underline{x}_4$ zur Basis von K^4 erhält die zu σ gehörige Matrix die Gestalt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & \\ 1 & -1 & \\ \hline 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \end{array}\right) = \tilde{A}$$

mit

$$\det(t\, I_4 - \tilde{A}) \quad = \quad \det\left(t\, I_2 - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(t\, I_2 - \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{33} & \tilde{\alpha}_{34} \\ \tilde{\alpha}_{43} & \tilde{\alpha}_{44} \end{pmatrix}\right).$$

Wir wählen nun $\underline{x}_3 \in V\backslash U_1$, etwa $\underline{x}_3 = \underline{e}_2$ und erhalten

$$A_\sigma \, \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\,\underline{x}_2 + \underline{x}_3 - 2\,\underline{x}_1,$$

danach wäre die zugeordnete Matrix

$$\left(\begin{array}{rr|r|c} 0 & 2 & -2 & \\ 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right),$$

und $\underline{x}_3$, $A_\sigma \, \underline{x}_3$ sind über U_1 linear abhängig.
$\underline{x}_4 = \underline{e}_3$ ist von $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2 = 2\,\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3 + \underline{e}_4$, $\underline{x}_3 = \underline{e}_2$ linear unabhängig.
$\Rightarrow$ zur Basis $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_4$ gehörige Matrix ist

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

folglich wird hier

$$\begin{aligned} f_{A_\sigma}(t) &= \det\left(t\,I_2 - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \det\,(t-1)\, \det\,(t+2) \\ &= (t^2 + t - 2)\,(t-1)\,(t+2) \\ &= (t-1)^2 (t+2)^2. \end{aligned}$$

Generell haben wir als Induktionsvoraussetzung:
Es ist U σ-invarianter Unterraum von V mit Basis $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ bzgl. der der Abbildung eine Matrix der Gestalt

$$\begin{array}{c} k \\ \text{Zeilen} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{B_1} & & * & & \\ & \boxed{B_2} & & & * \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \boxed{B_i} & \\ \hline & & & & R \end{array}\right) \begin{array}{c} i \text{ Kästchen in} \\ \text{Begleitmatrixgestalt} \end{array}$$

zugeordnet ist.
Falls die Matrix B_ν gerade k_ν Zeilen und Spalten hat, so wird

$$f_A(t) = \prod_{j=1}^{i} \underbrace{\det\,(t\,I_{k_j} - B_j)}_{\substack{\text{sofort aus letzter} \\ \text{Spalte aus } B_j \\ \text{ablesbar!}}} \; \det\,(t\,I_{n-k} - R).$$

Im Induktionsschritt wird dann ein weiteres Kästchen erzeugt!
Wähle dazu $\underline{x}_{k+1} \in V \backslash U$ und bilde $A\,\underline{x}_{k+1}$, $A^2\,\underline{x}_{k+1}, \ldots, A^{\nu-1}\,\underline{x}_{k+1}$, bis erstmalig $A^\nu\,\underline{x}_{k+1}$ von den vorangehenden über U linear abhängig wird. Es gilt daher erstmalig

$$A^\nu\,\underline{x}_{k+1} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \alpha_{k+1+\mu,k+\nu} A^\mu(\,\underline{x}_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,k+\nu}\,\underline{x}_j.$$

Nun wählt man als neue Basis $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{k+\nu}$ plus Ergänzung zu Basis V, wobei

$$x_{k+j+1} = A^j\,\underline{x}_{k+1} \text{ für } 1 \le j \le \nu - 1 \text{ ist}.$$

Die entsprechende neue Matrix besitzt ein Kästchen (als Begleitmatrix) mehr. Schließlich führt dies auf eine Basis von V, bzgl. der die σ zugeordnete Matrix in der Diagonalen Kästchengestalt (mit Begleitmatrizen) und darunterstehenden Nullen hat. Das charakteristische Polynom läßt sich hieraus unmittelbar ablesen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl.} \quad \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_4 \in K^4.$$

Für $\underline{x}_1 = \underline{e}_1$ wird $\underline{x}_2 = A\,\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{x}_3 = A\,\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}$, $A\,\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 500 \\ 680 \\ 860 \\ 1040 \end{pmatrix}$. Wähle $\underline{x}_4 = \underline{e}_2$.
Es ist $A\,\underline{e}_2 = \ldots + 0\,\underline{x}_4$
Bzgl. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_4$ erhält die der Abbildung σ zugeordnete Matrix die Gestalt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & 20 & * \\ 0 & 1 & 16 & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Beachte, daß für } f_\sigma(t) \\ \text{nur die letzte Spalte jedes} \\ \text{Kästchens relevant ist.} \end{array}\right)$$

Das charakteristische Polynom lautet demnach:

$$\begin{aligned} f_A(t) &= (t^3 - 16\,t^2 - 20\,t)\,t \\ &= t^2\,(t^2 - 16\,t - 20). \end{aligned}$$

Berechnung des charakteristischen Polynoms, Zusammenhang zum Minimalpolynom und Satz von Hamilton-Cayley

Gegeben: V mit $\dim V = n$, $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$.

1. Wähle $\underline{x}_1 \in V \backslash \{\,\underline{0}\,\}$ und bilde

   $$U_1 = [\,\underline{x}_1, \sigma\,(\,\underline{x}_1), \ldots, \sigma^{n-1}(\,\underline{x}_1)]$$

   als σ-invarianten Teilraum. Dabei sei $k_1 \in \mathbb{N}$ minimal mit

   $$\sigma^{k_1}(\,\underline{x}_1) = \sum_{i=0}^{k_1-1} \alpha_i\,\sigma^i(\,\underline{x}_1).$$

   Dann ist

   $$m_1(t) = t^{k_1} - \sum_{i=0}^{k_1-1} \alpha_i\,t^i$$

   das Minimalpolynom von $\sigma|_{U_1}$, sowie auch charakteristisches Polynom von $\sigma|_{U_1}$ (zugehörige Matrix ist Begleitmatrix).

2. Induktionsannahme:

   Es sei U σ-invarianter Teilraum von V der Dimension k. Das Minimalpolynom von $\sigma|_U$ teilt das charakteristische Polynom von $\sigma|_U$. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ ist Basis von U bzgl. der $\sigma|_U$ Kästchengestalt hat

   $$\begin{pmatrix} \square & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \square \end{pmatrix};$$

   dabei besitzt jedes Kästchen die Gestalt einer Begleitmatrix.

3. Induktionsschritt:

   Für $U \subset V$ wähle $\underline{x}_{k+1} \in V \backslash U$ und bilde

$$\tilde{U} = [\underline{x}_{k+1},\, \sigma\,(\underline{x}_{k+1}),\, \dots,\, \sigma^{\nu-1}(\underline{x}_{k+1}),\, U],$$

   wobei ν minimaler Exponent mit

$$\sigma^{\nu}(\underline{x}_{k+1}) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \beta_i\, \sigma^i(\underline{x}_{k+1}) \quad \in U$$

   ist. Bilde $g(t) = t^{\nu} - \sum\limits_{i=0}^{\nu-1} \beta_i\, t^i$.

   Dafür ist $g(\sigma)\,(\underline{x}_{k+1}) \in U$

   $\Rightarrow\ g(\sigma)\,(\sigma^{\mu}(\underline{x}_{k+1})) \ \in U \ \ \forall \mu \in \mathbb{N}$,

   d.h. $g(\sigma)\,(\tilde{U}) \subseteq U$

   $\Rightarrow\ \underbrace{f_{\sigma|_U}(\sigma)\, g(\sigma)}_{f_{\sigma|_{\tilde{U}}}(\sigma)} = \mathcal{O}_{\tilde{U}}$ nach Induktionsannahme,

   d.h. $f_{\sigma|_{\tilde{U}}}(t)$ ist Vielfaches des Minimalpolynoms von $\sigma|_{\tilde{U}}$.

   Ersetze U durch $\tilde{U}$ bis $U = V$ erreicht wird.

Bemerkung:
Dieses Verfahren ist zugleich ein konstruktiver Beweis des Satzes von Hamilton-Cayley: $f_\sigma(\sigma) = \mathcal{O}$ (vgl. (8.22)). Das Minimalpolynom ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms.

8.17 Hilfssatz

Es sei $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit $m_\sigma(t) = p(t)^l$ und $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i\, t^i$, sowie $\alpha_k = 1$.
Für $\underline{x} \in \ker\big(p(\sigma)^l\big) \backslash \big(\ker(p(\sigma)^{l-1}\big)$ sei $m \in \mathbb{N}$ maximal mit $\underline{x},\, \sigma\,(\underline{x}),\, \dots,\, \sigma^{m-1}(\underline{x})$ linear unabhängig.
Dann hat $U := [\underline{x},\, \sigma\,(\underline{x}),\, \dots,\, \sigma^{m-1}(\underline{x})]$ die Dimension $m = k \cdot l$ und bzgl. der angegebenen Basis von U hat $\sigma|_U$ die zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} \Box & 1 & & 0 \\ & \Box & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \Box \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} l \text{ Begleitmatrizen der Gestalt } A_p \\ \text{der Größe } k \times k \end{array} \right).$$

Beweis:

(i) $m = k\, l$

   U ist σ-invarianter Unterraum.

   Das Minimalpolynom von $\sigma|_U$ teilt $m_\sigma(t)$ (vergleiche (8.12)). Also ist $m_{\sigma|_U}(t) = p(t)^r$ mit $(1 \le r \le l)$; nach Wahl von $\underline{x}$ ist $p(\sigma)^{l-1}(\underline{x}) \neq \underline{0}$, also $l \le r$ und damit $r = l$. Es folgt

$$m = \deg\big(m_{\sigma|_U}\big) = l \cdot \deg(p) = l \cdot k.$$

(ii) Gemäß (8.16) und anschließender Bemerkung gilt:

$\underline{x},\, \sigma(\underline{x}),\, \ldots,\, \sigma^{k-1}(\underline{x})$ linear unabhängig über $\ker(p(\sigma)^{l-1})$

$\Rightarrow \quad p(\sigma)(\underline{x}),\, p(\sigma)\,\sigma(\underline{x}),\, \ldots,\, p(\sigma)\,\sigma^{k-1}(\underline{x})$ linear unabhängig über $\ker(p(\sigma)^{l-2})$

$\vdots$

$\Rightarrow \quad p(\sigma)^{l-1}\,\underline{x},\, p(\sigma)^{l-1}\,\sigma(\underline{x}),\, \ldots,\, p(\sigma)^{l-1}\,\sigma^{k-1}(\underline{x})$ linear unahängig über $\ker(p(\sigma)^0) = \{\underline{0}\}$,
insgesamt erhält man $k \cdot l$ linear unabhängige Vektoren, die gemäß (i) eine Basis von U bilden. Geeignete Anordnung dieser Basisvektoren liefert gewünschte Matrix.

Wir wählen als neue Basis folglich:

$$\underline{y}_{(\nu-1)k+\mu} := p(\sigma)^{l-\nu}\,\sigma^{k-\mu}(\underline{x})$$

für $\nu = 1, \ldots, l$ und bei festem ν jeweils $\mu = 1, \ldots, k$.
Hierfür wird im Fall $\mu \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sigma(\underline{y}_{(\nu-1)k+\mu}) &= p(\sigma)^{l-\nu}\,\sigma^{k-\mu+1}(\underline{x}) \\ &= \underline{y}_{(\nu-1)k+(\mu-1)} \end{aligned}$$

und für $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma(\underline{y}_{(\nu-1)k+\mu}) &= p(\sigma)^{l-\nu}\,\sigma^{k}(\underline{x}) \\ &= p(\sigma)^{l-\nu}\left(p(\sigma) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i\,\sigma^i\right)(\underline{x}) \\ &= p(\sigma)^{l-(\nu-1)}(\underline{x}) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i\, p(\sigma)^{l-\nu}\sigma^i(\underline{x}), \end{aligned}$$

woraus man die Behauptung abließt.

□

Beispiel: (vergleiche früher)
$U = K\,\underline{x}_1 + \ldots + K\,\underline{x}_3,\ \tilde{U} = K\,\underline{x}_1 + \ldots + K\,\underline{x}_4,\ m_{\sigma|_U}(t) = (t-2)^3, \quad p(t) = t-2,\ l = 3.$
Als $\underline{x} \in \ker(p(\sigma)^3) \setminus \ker(p(\sigma)^2)$ ist etwa $\underline{x}_3$ wählbar wegen $p(\sigma)^2(\underline{x}_3) = \underline{x}_1 \neq \underline{0}$.
Folglich ist

$$U = [\underline{x}_3,\, \underline{x}_2 = p(\sigma)(\underline{x}_3),\, \underline{x}_1 = p(\sigma)^2(\underline{x}_3)]$$

mit zu $\sigma|_U$ gehöriger Matrix

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \\ \qquad\quad\ \uparrow \\ \qquad\quad\ A_p \end{array}.$$

8.18 Definition

Für $\sigma \in \mathrm{End}(V)$ heißt ein σ-invarinater Unterraum U von V σ-zyklisch, falls $\underline{x} \in U$ mit $U = [\underline{x},\, \sigma(\underline{x}),\, \ldots,\, \sigma^{n-1}(\underline{x}),\, \ldots]$ existiert. In diesem Fall heißt $\underline{x}$ erzeugender Vektor von U.

Bemerkungen:

(i) Die Existenz von σ-zyklischen Unterräumen wurde in (8.17) gezeigt.
(Trivial: $U = \{\underline{0}\}$.)

(ii) Ist U σ-zyklisch und $m_\sigma(t) = p(t)^l$ mit $\deg(p) = k$, so gilt $\dim U = k \cdot r$ mit $0 \leq r \leq l$.
(Beweis wie in (8.17)(i)!)

(iii) Ist $\{\underline{0}\} \neq U$ σ-zyklisch mit $m_{\sigma|_U}(t) = p(t)^l$, so läßt sich U nicht als direkte Summe von σ-zyklischen Teilräumen $\neq \{\underline{0}\}$ schreiben.

(Ist nämlich $U = U_1 \dot{+} U_2$ mit σ-zyklischen Teilräumen U_i $(i = 1, 2)$, so gilt:

$$p(t)^l = m_{\sigma|_U}(t) = \operatorname{kgV}\left(m_{\sigma|_{U_1}}(t),\, m_{\sigma|_{U_2}}(t)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} m_{\sigma_{U_1}}(t) = p(t)^l & \vee & m_{\sigma|_{U_2}}(t) = p(t)^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dim U_1 = \dim U & & \dim U_2 = \dim U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 = U & & U_2 = U.) \end{array}$$

<u>Beispiel:</u>
In V sei $U = [\,\underline{x}_1,\, \underline{x}_2]$ mit $\sigma(\underline{x}_i) = \lambda_i\, \underline{x}_i$ $(\underline{x}_i \neq \underline{0},\ i = 1, 2;\ \lambda_1 \neq \lambda_2)$.
Hierfür ist $m_{\sigma|_U}(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$. Es ist $U = [\,\underline{x}_1 + \underline{x}_2,\, \sigma(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)]$ selbst σ-zyklisch, aber auch direkte Summe der σ-zyklischen Teilräume $U_1 = [\,\underline{x}_1]$ und $U_2 = [\,\underline{x}_2]$.

8.19 Satz

Es sei $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit $m_\sigma(t) = p(t)^l$.
Dann ist V direkte Summe von σ-zyklischen Unterräumen $\neq \{\underline{0}\}$. Ferner ist U aus (8.17) direkter Summand von V.

<u>Beweis:</u> Per Induktion über $n = \dim V$ in 9 Schritten.

$\boxed{1}$ Für $n = 1$ ist $V = K\,\underline{x}$ mit $\sigma(\underline{x}) = \lambda\,\underline{x}$, für ein $\lambda \in K$. Also ist V σ-zyklisch.

Im folgenden sei $n > 1$ und die Behauptung bereits für alle Räume (und deren Endomorphismen) kleinerer Dimension bewiesen. Konstruiere wie in (8.17) einen σ-zyklischen Teilraum U von V (mit erzeugendem Vektor $\underline{x} \in \ker(p(\sigma)^l) \setminus \ker(p(\sigma)^{l-1})$) der Dimension $\deg(p)^l \geq 1$.

Für $V = U$ sind wir fertig.

Alles weitere betrifft den Fall $U \subset V$.

$\boxed{2}$ Der Faktorraum $V^* = V/U$ mit induzierter Abbildung $\sigma^* \in \operatorname{End}(V^*)$.

Betrachte kanonischen Homomorphismus

$$\chi\ :\ V \longrightarrow V/U\ :\ \underline{x} \longmapsto \underline{x} + U,$$

setze $V^* = V/U$.

Bilde σ^* gemäß:

$$\sigma^*\ :\ V^* \longrightarrow V^*\ :\ \underline{x} + U \longmapsto \sigma(\underline{x}) + U.$$

Wohldefiniertheit:

$$\begin{array}{rcl} \underline{x} + U = \underline{y} + U & \Leftrightarrow & \underline{x} - \underline{y} \in U \\ & \overset{!}{\Rightarrow} & \sigma(\underline{x} - \underline{y}) \in U \\ & & \| \\ & & \sigma(\underline{x}) - \sigma(\underline{y}) \\ & \Leftrightarrow & \sigma(\underline{x}) + U = \sigma(\underline{y}) + U. \end{array}$$

Da σ Endomorphismus ist, sieht man (durch Nachrechnen) sofort: $\sigma^* \in \operatorname{End}(V^*)$.

Nach Konstruktion von σ^* gilt: $\sigma^* \circ \chi = \chi \circ \sigma$.

Damit wird

$$\begin{array}{rcl} {\sigma^*}^k \circ \chi & = & {\sigma^*}^{k-1} \circ \sigma^* \circ \chi \\ & = & {\sigma^*}^{k-1} \circ \chi \circ \sigma \\ & = & \dots \\ & = & \chi \circ \sigma^k \end{array}$$

für beliebiges $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, sowie für $f(t) \in K[t]$

$$f(\sigma^*) \circ \chi = \chi \circ f(\sigma).$$

$\boxed{3}$ Induktionsannahme für V^*.

Wegen $\dim V^* = \dim V - \dim U < \dim V$ ist V^* direkte Summe von σ^*-zyklischen Unterräumen, etwa

$$V^* = U_1^* \dot{+} \ldots \dot{+} U_r^* \text{ mit } U_i^* \neq \{\underline{0}^*\} = \{U\} \quad (1 \leq i \leq r).$$

Es sei ferner $\underline{x}_i^* \in V^*$ erzeugender Vektor von U_i^* $(1 \leq i \leq r)$, sowie

$$h_i(t) = m_{\sigma^*|_{U_i^*}}(t) \quad (1 \leq i \leq r).$$

Wegen χ surjektiv existiert zu jedem $\underline{x}_i^*$ ein $\underline{\hat{x}}_i \in V$ mit $\chi(\underline{\hat{x}}_i) = \underline{x}_i^*$.

Die Überlegungen in $\boxed{4}$–$\boxed{7}$ gelten für festes $i \in \{1, \ldots, r\}$.

$\boxed{4}$ $h_i(t)$ ist das normierte Polynom kleinsten Grades mit $h_i(\sigma)(\underline{\hat{x}}_i) \in U$.

Zunächst ist nämlich

$$\chi \circ h_i(\sigma)(\underline{\hat{x}}_i) = h_i(\sigma^*)(\underline{x}_i^*) = \underline{0}^*,$$

also $h_i(\sigma)(\underline{\hat{x}}_i) \in \ker \chi = U$.

Ist ferner $g(t) \in K[t]$ mit $g(\sigma)(\underline{\hat{x}}_i) \in U$, so gilt

$$\underline{0}^* = \chi \circ g(\sigma)(\underline{\hat{x}}_i) = g(\sigma^*)(\underline{x}_i^*),$$

d.h. $g(\sigma^*)|_{U_i^*} = \mathcal{O}_{U_i^*}$ und damit $h_i(t) \mid g(t)$ nach Definition von $h_i(t)$.

$\boxed{5}$ $\hat{U}_i := \chi^{-1}(U_i^*)$ ist Summe von U und $W_i := [\underline{\hat{x}}_i, \ldots, \sigma^{m_i-1}(\underline{\hat{x}}_i)]$ für $m_i = \deg(h_i(t))$.

Ist nämlich $\underline{y} \in \hat{U}_i$, so ist $\chi(\underline{y}) \in U_i^*$, also ist

$$\begin{aligned} \chi(\underline{y}) &= \sum_{\nu=0}^{m_i-1} \lambda_\nu \, {\sigma^*}^\nu (\underline{x}_i^*) \\ &= \chi\left(\sum_{\nu=0}^{m_i-1} \lambda_\nu \, \sigma^\nu(\underline{\hat{x}}_i)\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m_i-1} \lambda_\nu \, \sigma^\nu(\underline{\hat{x}}_i) + U \end{aligned}$$

und somit $\underline{y} \in W_i + U$. Umgekehrt ist für $\underline{y} \in W_i + U$ stets $\chi(\underline{y}) \in U_i^*$, also $\underline{y} \in \hat{U}_i$.

$\boxed{6}$ Es ist $\hat{U}_i = W_i \dot{+} U$.
Jedes $\underline{y} \in W_i$ hat die Form

$$\underline{y} = \sum_{\nu=0}^{m_i-1} \lambda_\nu \, \sigma^\nu(\underline{\hat{x}}_i);$$

hierfür ist

$$\chi(\underline{y}) = \sum_{\nu=0}^{m_i-1} \lambda_\nu \, {\sigma^*}^\nu (\underline{x}_i^*)$$

genau dann aus U, falls alle Koeffizienten λ_ν verschwinden. Also ist $W_i \cap U = \{\underline{0}\}$.

$\boxed{7}$ Es ist $\hat{U}_i = U_i \dot{+} U$ mit σ-zyklischem Unterraum U_i.

Für die ersten $m_i - 1$ Basisvektoren von W_i liegen deren Bilder unter σ wiederum in W_i. Für den letzten Basisvektor erhalten wir

$$\sigma\,(\sigma^{m_i-1}(\,\underline{\hat{x}}_i)) = \sigma^{m_i}(\,\underline{\hat{x}}_i) = h_i(\sigma)\,(\,\underline{\hat{x}}_i) + \underline{w}_i$$

mit $\underline{w}_i \in W$. Für $h_i(\sigma)\,(\,\underline{\hat{x}}) = \underline{o}$ sind wir fertig, indem wir $U_i = W_i$ setzen. Ansonsten ist der erzeugende Vektor $\underline{\hat{x}}_i$ von W_i durch $\underline{x}_i := \underline{\hat{x}}_i - \underline{u}_i$ mit passendem $\underline{u}_i \in U$ zu ersetzen ($U_i := [\,\underline{x}_i, \ldots, \sigma^{m_i-1}(\,\underline{x}_i)]$). Wie in $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ folgt $\hat{U}_i = U_i \dot{+} U$. Damit U_i zusätzlich σ-zyklisch wird, muß $h_i(\sigma)\,(\,\underline{\hat{x}}_i) = h_i(\sigma)\,(\,\underline{u}_i)$ erfüllt sein. Wir haben also die Existenz von $\underline{u}_i \in U$ mit $h_i(\sigma)\,(\,\underline{u}_i) = h_i(\sigma)\,(\,\underline{\hat{x}}_i)$ zu zeigen.

Wegen der Eigenschaft $\boxed{4}$ von $h_i(\sigma)$ und $m_\sigma(t) = p(t)^l$ ist $p\,(\sigma)^l(\,\underline{\hat{x}}_i) = \underline{o} \in U$, also gilt $h_i(t)\,|\,p(t)^l$, d.h.

$$h_i(t) = p(t)^{l_i} \text{ mit } 1 \le l_i \le l.$$

Wir verwenden die Notation aus (8.17), wonach $\underline{x}$ erzeugender Vektor von U war, sowie $\dim U = k\,l$ mit $k = \deg\,(p(t))$ gilt. Demnach existiert $e\,(t) \in K[t]$ vom Grad $< k\,l$ mit

$$h_i(\sigma)\,(\,\underline{\hat{x}}_i) = e\,(\sigma)\,(\,\underline{x}).$$

Nach dem Vorangehenden ist

$$p(\sigma)^{l-l_i}(e\,(\sigma))\,(\,\underline{x}) = \underline{o}\,,$$

es folgt $p(t)^{l_i}\,|\,e\,(t)$ bzw. $e\,(t) = h_i(t)\,\tilde{h}_i(t)$ in $K[t]$, und $\underline{u}_i := \tilde{h}_i(\sigma)\,(\,\underline{x})$ leistet das Gewünschte.

$\boxed{8}$ Es ist $V = U_1 + \ldots + U_r + U$.

Daß V die rechte Seite enthält, ist trivial. Umgekehrt existieren zu jedem $\underline{y} \in V$ Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ mit

$$\chi\,(\,\underline{y}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,\underline{x}_i^* \quad \text{bzw.} \quad \underline{y} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,\underline{x}_i \in U.$$

$\boxed{9}$ Es ist $V = U_1 \dot{+} \ldots \dot{+} U_r \dot{+} U$.

Ist $\underline{y} = \underline{y}_1 + \ldots + \underline{y}_r$ mit $\underline{y}_i \in U_i$, nicht alle $\underline{y}_i = 0$, so folgt $\chi\,(\,\underline{y}) = \chi\,(\,\underline{y}_1) + \ldots + \chi\,(\,\underline{y}_r)$, und hierbei sind nicht alle $\chi\,(\,\underline{y}_i) \in U$. Gemäß $\boxed{3}$ ist demnach $\chi\,(\,\underline{y}) \notin U$, also $U \cap (U_1 + \ldots + U_r) = \{\,\underline{o}\}$.

Ist $\underline{o} \ne \underline{y}_i \in U_i$, so ist $U \ne \underline{y}_i + U \in U_i^*$, also kann $\underline{y}_i$ wegen $\boxed{3}$ nicht in $U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_r + U$ enthalten sein. Folglich ist

$$U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_r + U) = \{\,\underline{o}\}.$$

□

Normalform für i-tes Kästchen

8.20 Satz (2. Normalform)

Es sei $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ mit $m_\sigma(t) = p(t)^l$ und $\deg\,(p) = k$. Dann gelten:

(i) V ist direkte Summe σ-zyklischer Unterräume $U_i \quad (1 \le i \le r)$.

(ii) Jeder direkte Summand U_i besitzt die Dimension $k\,\mu_i$, $(1 \le \mu_i \le l)$, $k\,\mu_i = \deg\,(m_{\sigma|_{U_i}})$.

(iii) Bezeichnet $r(\mu)$ die Anzahl der U_i der Dimension $\mu\,k$, so ist hierfür

$$\mathrm{rg}(p(\sigma)^{\mu-1}) + \mathrm{rg}(p(\sigma)^{\mu+1}) - 2\,\mathrm{rg}(p(\sigma)^{\mu}) = k\,r(\mu).$$

(iv) Jeder Summand U_i besitzt eine feste Basis der Gestalt

$$\underline{x}_{j\nu} := p(\sigma)^{\mu_i - j}\, \sigma^{k-\nu}(\,\underline{a}_i) \quad (1 \le j \le \mu_i,\ 1 \le \nu \le l)$$

für passendes $\underline{a}_i \in U_i$.

(v) Bezüglich der Basis in (iv) hat $\sigma|_{U_i}$ die zugehörige Matrix

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

mit

$$A_i = \begin{pmatrix} \boxed{A_p} & {\scriptstyle 1} & & 0 \\ & \boxed{A_p} & {\scriptstyle 1} & \\ & & \ddots & {\scriptstyle 1} \\ 0 & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$$

(μ_i viele $k \times k$ Kästchen, A_p Begleitmatrix zu $p(t)$.

(vi) Die Normalform von A_σ in (v) ist bis auf die Reihenfolge der Kästchen A_i eindeutig durch σ bestimmt.

Beweis:

(i) Direkte Folge aus (8.19).

(ii) $m_{\sigma|_{U_i}}(t) = p(t)^{\mu_i}$ $\;(1 \le \mu_i \le l)$.
Da U_i σ-zyklisch ist, folgt $\dim(U_i) = \mu_i\, k$ wie im Beweis zu (8.17)(i).

(iii) Es sei $\dim U_i = k\,\mu_i$ mit $1 \le \mu_i \le l$.
U_i hat Basis $B_i = \{p(\sigma)^j\, \sigma^\nu(\,\underline{a}_i) \mid 0 \le j < \mu_i,\ 0 \le \nu < k\}$.
Entsprechend enthält $p(\sigma)\,(B_i)$ noch $(\mu_i - 1)\,k$ linear unabhängige Elemente, $[p(\sigma)\,(B_i)] = p(\sigma)\,U_i$ ist σ-zyklisch von der Dimension $(\mu - 1)\,k$. Es sei W_μ die direkte Summe aller U_i der Dimension $k\mu$ bei festem $\mu \in \{1, \ldots, l\}$, $\dim W_\mu = r(\mu)\,\mu\,k$.
Damit wird

$$V = \dot{+}_{\mu=1}^{l} W_\mu \quad \text{mit} \quad p(\sigma)\,(V) = \dot{+}_{\mu=1}^{l} p(\sigma)\,W_\mu,$$

$$\mathrm{rg}\,(p(\sigma)) = \dim\,(p(\sigma)\,(V)) = \sum_{\mu=1}^{l} (\mu - 1)\,k\,r(\mu),$$

sowie

$$\mathrm{rg}(p(\sigma)^j) = k \sum_{\mu=j+1}^{l} (\mu - j)\,r(\mu) \quad (1 \le j \le l).$$

Also erhalten wir

$\mathrm{rg}\,(p(\sigma)^{\mu-1}) + \mathrm{rg}\,(p(\sigma)^{\mu+1}) - 2\;\mathrm{rg}\,(p(\sigma)^{\mu})$

$$\begin{aligned} &= k \sum_{\nu=\mu}^{l} (\nu - \mu + 1)\,r(\nu) + k \sum_{\nu=\mu+2}^{l} (\nu - \mu - 1)\,r(\nu) - 2\,k \sum_{\nu=\mu+1}^{l} (\nu - \mu)\,r(\nu) \\ &= k \sum_{\nu=\mu+2}^{l} r(\nu)\,\{\nu - \mu + 1 + \nu - \mu - 1 - 2\nu + 2\mu\} + k\,r(\mu) + 2k\,r(\mu + 1) - 2k\,r(\mu + 1) \\ &= k\,r(\mu). \end{aligned}$$

(iv) Klar, vergleiche Beweis zu (8.17).

(v) Klar, vergleiche Beweis zu (8.17).

(vi) Die Gestalt der direkten σ-zyklischen Summanden U_i ist durch $m_{\sigma|_{U_i}}(t) = p(t)^{\mu_i}$ festgelegt. Die U_i lassen sich nicht mehr als direkte Summe σ-invarianter Teilräume $\neq \{\underline{0}\}$ schreiben, die Anzahl der U_i fester Dimension ist durch σ gemäß (iii) festgelegt.

□

<u>Bemerkung:</u>
Eindeutigkeit der 2. Normalform ist erreichbar, indem man etwa die Kästchen nach fallender Größe angeordnet.

8.21 Satz

Für $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ teilt m_σ das charakteristische Polynom $f_\sigma(t)$.

<u>Bemerkung:</u> Genauer wurde gezeigt:
Ist $p(t) \in K[t]$ Primpolynom, so gilt:

(i) $p(t)|m_\sigma(t) \;\Leftrightarrow\; p(t)|f_\sigma(t)$,

(ii) $p(t)^k|m_\sigma(t) \;\Rightarrow\; p(t)^k|f_\sigma(t) \;\; \forall k \in \mathbb{N}$.

8.22 Korollar (Satz von Hamilton-Cayley)

Für $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ ist $f_\sigma(\sigma) = 0$.

Jordansche Normalform

Hierfür ist Voraussetzung, daß $m_\sigma(t)$ Produkt von Primpolynomen 1. Grades aus $K[t]$ ist. In diesem Fall gilt $\deg(p_i) = k = 1,\; p(t) = t - \lambda_i \;\; (1 \leq i \leq s),\; A_{p_i} = (\lambda_i)$. Dies ist gewährleistet, falls K "<u>algebraisch abgeschlossen</u>" ist, d.h. jedes nicht konstante Polynom aus $K[t]$ eine Nullstelle in K besitzt. (Beispiel: $K = \mathbb{C}$, vgl. Algebra-Vorlesung.)

Berechnung der Normalform

1. Schritt:

   Berechne $f_\sigma(t) = \det(t\,\mathrm{id}_V - \sigma)$ etwa mittels Frobenius-Matrizen.

   (Im allgemeinen ist σ bereits mittels A_σ bzgl. einer festen Basis (i.a. kanonische Basis des K^n) gegeben. Ansonsten wähle Basis von V, etwa $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$, und erhalte A_σ mittels

$$(\varphi(\underline{x}_1), \ldots, \varphi(\underline{x}_n)) = A_\sigma(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n).)$$

   <u>Beispiel:</u>

   $\sigma \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ habe bzgl. kanonischer Basis die Matrix

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 6 \\ -6 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
f_\sigma(t) &= \det(t\,I_4 - A_\sigma) \\
&= \begin{vmatrix} t-5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & t-2 & -6 \\ 6 & 1 & 0 & t+4 \end{vmatrix} \\
&= \text{(Entwicklung 2. Zeile)} \\
& \quad (t-2)\begin{vmatrix} t-5 & 0 & -3 \\ -6 & t-2 & -6 \\ 6 & 0 & t+4 \end{vmatrix} \\
&= \text{(Entwicklung 2. Spalte)} \\
& \quad (t-2)^2\begin{vmatrix} t-5 & -3 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix} \\
&= (t-2)^2\,(t^2-t-2) \\
&= (t-2)^3\,(t+1).
\end{aligned}$$

2. Schritt:

Berechne Faktorisierung von $f_\sigma(t)$ in Potenzprodukt von Primpolynomen:

$$f_\sigma(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{\tilde{l}_i}.$$

(Jordan: $p_i(t) = t - \lambda_i$)

Gemäß (8.21), (8.13) und (8.14) gilt:

$$V = \dot{+}_{i=1}^{s} V_i \text{ mit } V_i = \ker(p_i(\sigma)^{\tilde{l}_i}).$$

Für das Minimalpolynom $m_\sigma(t)$ gilt:

$$m_\sigma(t) = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{l_i} \text{ mit } 1 \le l_i \le \tilde{l}_i \ (1 \le i \le r).$$

Gemäß (8.13) ist dabei $l_i \in \mathbb{N}$ minimal mit $\ker(p_i(\sigma)^{l_i}) = \ker(p_i(\sigma)^{l_i+1})$ bzw. $\operatorname{rg}(p_i(\sigma)^{l_i}) = \operatorname{rg}(p_i(\sigma)^{l_i+1})$.

Die l_i lassen sich somit als Ränge geeigneter Matrizen bestimmen. Die Bestimmung der Ränge kann außerdem zur Kontrolle der Kästchenanzahl (siehe (8.20)) verwendet werden.

(Beachte: Für (8.20)(iii) wird $\operatorname{rg}(p(\sigma|_{V_i})^j)$ benötigt, die dortige Aussage stimmt jedoch auch für $\operatorname{rg}(p(\sigma)^j)$!)

Hiernach erhält man bereits die Gestalt der Jordanschen Normalform zu

$$J(A_\sigma) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

mit

$$A_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{1,i}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{r_i,i}} \end{pmatrix}$$

und Jordan-Kästchen

$$J_{\mu,i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Dabei besitzen

$$\begin{array}{rll} J_{1,i}, \ldots, J_{r(l_i),i} & \text{die Größe} & l_i \times l_i, \\ J_{r(l_i)+1,i}, \ldots, J_{r(l_i)+r(l_{i-1}),i} & \text{die Größe} & (l_{i-1}) \times (l_{i-1}), \\ J_{r_i - r(1)+1,i}, \ldots, J_{r_i,i} & \text{die Größe} & 1 \times 1. \end{array}$$

Speziell: $r(1) + \ldots + r(l_i) = r_i$ ist die Anzahl der Jordan Kästchen in A_i.

A_i hat genau dann Diagonalgestalt, wenn $l_i = 1$ ist.

<u>Mögliche Jordan-Normalformen für $\sigma|_{V_i}$ bzw. A_i:</u>

1 Jordan-Kästchen, V_i ist σ-zyklisch, $m_{\sigma|_{V_i}}(t) = (t - \lambda)^{l_i}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

3 Jordan-Kästchen für $m_{\sigma|_{V_i}}(t) = (t - \lambda)^3$ und $\dim V_i = 8$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} \lambda & 1 & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & 0 & \\ & & \lambda & & & & & \\ \cline{1-6} & & & \lambda & 1 & & & \\ & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & & \lambda & & \\ \cline{4-8} & 0 & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & & \lambda \end{array}\right).$$

5 Jordan-Kästchen für $m_{\sigma|_{V_i}}(t) = (t - \lambda)^2$ und $\dim V_i = 7$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c|c|c} \lambda & 1 & & & & & \\ 0 & \lambda & & & & 0 & \\ \cline{1-4} & & \lambda & 1 & & & \\ & & 0 & \lambda & & & \\ \cline{3-5} & & & & \lambda & & \\ \cline{5-6} & 0 & & & & \lambda & \\ \cline{6-7} & & & & & & \lambda \end{array}\right).$$

<u>Fortsetzung des Beispiels von Seite 23:</u>

$p_1(t) = t + 1, \quad l_1 = 1,$

$p_2(t) = t - 2, \quad \tilde{l}_2 = 3 \ (1 \leq l_2 \leq 3).$

Die Jordan-Normalform sieht daher wie folgt aus $(* \in \{0,1\})$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & * & 0 \\ 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen:

$$p_2(A_\sigma) \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{vom Rang 2,}$$

$$p_2(A_\sigma)^2 \quad = \quad \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & -18 \\ 18 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{vom Rang 1.}$$

Es folgt notwendig (!) $\operatorname{rg}(p_2(A_\sigma)^3) = \operatorname{rg}(p_2(A_\sigma)^2) = 1$, also $l_2 = 2$.

(Die Anzahl der Jordan-Kästchen ist durch
$r_1 = \dim(\ker(p_1(A_\sigma))) = 1$,
$r_2 = \dim(\ker(p_2(A_\sigma))) = 2$ festgelegt.)

Hiermit ist klar:

$$J(A_\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Empfehlung: Rechne Kästchenanzahl gemäß (8.20)(iii) nach!

3. Schritt:

   Berechnung der passenden Basis, bzgl. der σ die Matrix $J(A_\sigma)$ zugeordnet ist, sowie der Übergangsmatrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $J(A_\sigma) = S^{-1}A_\sigma S$.

   Eine solche Basis ist i.a. nicht eindeutig, selbst dann nicht, wenn die Reihenfolge der Jordan-Kästchen vorgeschrieben wird.

   O.B.d.A. führen wir die Überlegungen für $\sigma|_{V_i}$ bzgl. der Matrix A_i durch und lassen den Index i weg.

   Dazu berechnen wir Mengen von Basisvektoren C_j $(1 \leq j \leq l)$. Hierbei sollen die Elemente C_j maximal viele über $\ker(p(\sigma)^{j-1})$ linear unabhängige Elemente aus $\ker(p(\sigma)^j)$ sein:

$$C_1 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, C_j \text{ ist Basis von } \ker(p(\sigma)^j) \ \ (1 \leq j \leq l).$$

   Damit erhält man Basen für die σ-zyklischen direkten Summanden U_ϱ $(1 \leq \varrho \leq r_i)$ von $V = V_i$ nach dem anschließend beschriebenen Verfahren:

   Die Rechnungen erfolgen sukzessive für Stufe l, dann $l-1, \ldots, 1$.

   C_l $\quad \underline{x}_{l,1}, \ldots, \underline{x}_{l,k_l}$ aus $V = V_i$ seien über $\ker(p(\sigma)^{l-1})$ linear unabhängig,

   C_{l-1} $\quad \underline{x}_{l-1,1}, \ldots, \underline{x}_{l-1,k_{l-1}}$ aus $\ker(p(\sigma)^{l-1})$ seien über $\ker(p(\sigma)^{l-1})$ linear unabhängig,

   $\vdots$

   C_1 $\quad \underline{x}_{1,1}, \ldots, \underline{x}_{1,k_1}$ aus $\ker(p(\sigma))$ seien linear unabhängig.

   Für jedes $\underline{x}_{l\nu}$ $(1 \leq \nu \leq k_l)$ sind die $p(\sigma)^\mu(\underline{x}_{l\nu})$ $(0 \leq \mu \leq l-1)$ linear unabhängige Vektoren aus $V = V_i$, die dort σ-zyklischen Unterraum aufspannen. Basis wird nun geändert, indem man $p(\sigma)^\mu(\underline{x}_{l\nu})$ gegen passende Vektor aus $C_{l-\mu}$ austauscht (Steinitz).

Für $\nu = 1$ bzw.

$$\underline{x}_{l1},\, p(\sigma)\,(\,\underline{x}_{l1}),\, \ldots,\, p(\sigma)^{l-1}(\,\underline{x}_{l1})$$

tausche $p(\sigma)^{\mu}(\,\underline{x}_{l1})$ gegen passendes Element von $C_{l-\mu}$ aus und ordne die C_λ um, so daß $p(\sigma)^{\mu}(\,\underline{x}_{l1})$ das erste Element von $C_{l-\mu}$ wird.

Resultat:

$$\begin{array}{l|l|l}
C_l & \underline{x}_{l1}, & \underline{x}_{l,2}, \ldots, \underline{x}_{l,k_l} \\
C_{l-1} & p(\sigma)\,(\,\underline{x}_{l1}), & \underline{x}_{l-1,2}, \ldots, \underline{x}_{l-1,k_{l-1}} \\
 & \vdots & \\
C_1 & p(\sigma)^{l-1}(\,\underline{x}_{l1}), & \underline{x}_{1,2}, \ldots, \underline{x}_{1,k_1} \\
\hline
 & U_1 &
\end{array}$$

Fahre fort mit $\underline{x}_{l,2}$ etc:

Erhalte k_l Unterräume der Dimension l bzw. k_l maximale Jordan-Kästchen.

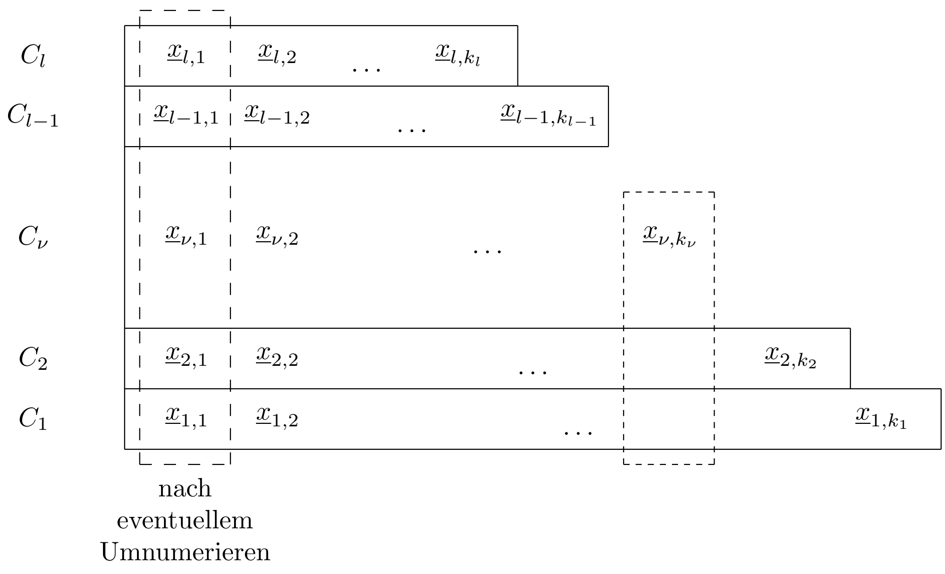
Danach fahre mit Stufe $l-1$ analog fort.

Falls $k_{l-1} = k_l$ ist man für diese Stufe fertig,

sonst wähle $\underline{x}_{l-1,k_l+1}$ aus C_{l-1} und führe gleiches Verfahren durch. Dies liefert zyklische Unterräume der Dimension $l-1$ sowie Jordan-Kästchen der Größe $l-1$.

<u>Bemerkung:</u>

Stufenanzahl $=$ Größe des größten Jordan-Kästchen
Kästchenanzahl $= \sharp C_1 =$ Dimension des Eigenraums zu λ für $p(t) = t - \lambda$.



$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{x}_{l,1} \\ p(\sigma)\,(\,\underline{x}_{l,1}) \\ \vdots \\ p(\sigma)^{l-1}(\,\underline{x}_{l,1}) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \underline{x}_{\nu,k_\nu} \\ p(\sigma)\,(\,\underline{x}_{\nu,k_\nu}) \\ \vdots \\ p(\sigma)^{\nu-1}(\,\underline{x}_{\nu,k_\nu}) \end{array}}$$

Beispiel zur Jordanschen Normalform

$\sigma \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^6)$ habe bzgl. kanonischer Basis die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f_A(t) &= (t-2)^6 \\ &= p(t)^6 \quad \text{für } p(t) = t-2. \end{aligned}$$

<u>Aufstellen des Tableaus:</u>

$$p(A) = A - 2\,I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker(p(A))$ enthält als linear unabhänigige Vektoren $C_1 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, es wird $k_1 = 3 =$ Anzahl der σ-zyklischen Unterräume.

$$p(A)^2 = (A - 2\,I_6)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $C_2 = \{\underline{e}_4, \underline{e}_5\},\ k_2 = 2.$

$$p(A)^3 = \mathcal{O},$$

also $C_3 = \{\underline{e}_6\}$ mit $k_3 = 1$.

Demnach existieren 3 Kästchen der Größen 3×3, 2×2, 1×1; es ist $m_\sigma(t) = (t-2)^3$ und folglich

$$J(A) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Gesucht wird $X \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ mit

$$J(A) = X^{-1} A\, X.$$

Aufstellung der σ-zyklischen Unterräume:

$U_1 = [\underline{e}_6, p(\sigma)(\underline{e}_6), p(\sigma)^2(\underline{e}_6)] = [\underline{e}_6, \underline{e}_3 - \underline{e}_4, \underline{e}_2]$,

$U_2 = [\underline{e}_5, p(\sigma)(\underline{e}_5)] = [\underline{e}_5, \underline{e}_2 - \underline{e}_3]$,

$U_3 = [\underline{e}_1]$.

Austauschen mittels Steinitz liefert

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\underline{e}_6 & & \\
\hline
\underline{e}_4 & \underline{e}_5 & \\
\hline
\underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\
\hline
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\underline{e}_6 & & \\
\hline
\underline{e}_3 - \underline{e}_4 & \underline{e}_5 & \\
\hline
\underline{e}_2 & \underline{e}_2 - \underline{e}_3 & \underline{e}_1 \\
\hline
\end{array}
$$

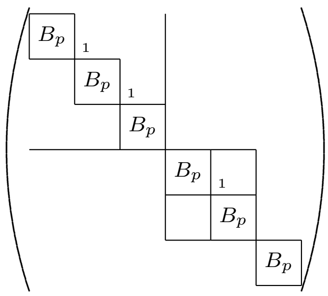
Es wird demnach

$$
\begin{aligned}
X &= (p(\sigma)^2(\underline{e}_6),\, p(\sigma)\,(\underline{e}_6),\, \underline{e}_6,\, p(\sigma)\,(\underline{e}_5),\, \underline{e}_5,\, \underline{e}_1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Teste $J\,(A) = X^{-1} A\, X \quad \Leftrightarrow \quad X\, J\,(A) \stackrel{?}{=} A\, X$:

$$
X\, J\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A\, X.
$$

<u>Bemerkung:</u>
Im Fall $k = \deg\,(p) > 1$ verlaufen die Rechnungen analog, nur daß auf jeder Stufe statt eines Vektors $\underline{x}_{\mu\nu}$ die Vektoren $\underline{x}_{\mu\nu},\, \sigma\,(\underline{x}_{\mu\nu}),\, \ldots,\, \sigma^{k-1}(\underline{x}_{\mu\nu})$ auftreten bzw. ausgetauscht werden müssen.



(Für einen σ-zyklischen Unterraum der Dimension $k\nu$ sind also auf Ebene j ($j = \nu, \nu-1, \ldots, 1$) jeweils k Vektoren aus dem Tableau auszutauschen.)

<u>Beispiel:</u> (Fortsetzung)
$\sigma \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^4)$ mit

$$
A_\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 6 \\ -6 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix},
$$

$$
f_\sigma(t) = (t-2)^3(t+1),
$$

$p_1(t) = t+1, \quad l_1 = 1,$
$p_2(t) = t-2, \quad l_2 = 2.$

Wegen $\operatorname{rg}(p_2(A_\sigma)^3) = \operatorname{rg}(p_2(A_\sigma)^2)$ ist

$$m_\sigma(t) = (t+1)\,(t-2)^2,$$

also

$$J\,(A_\sigma) = \left(\begin{array}{c|cc|c} -1 & & & \\ \hline & 2 & 1 & \\ & 0 & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right).$$

Bestimmung der neuen Basis:

Zu $p_1(A_\sigma) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 6 \\ -6 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (Zeilenstufenform ausrechnen)

erhält man $\ker(p_1(A_\sigma)) \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{x}_1$;

zu $p_2(A_\sigma)$ erhält man

$C_1 = \{\,\underline{x}_2,\,\underline{x}_3\}$ mit $\underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k_1 = 2$,

$C_2 = \{\,\underline{x}_4\}$ mit $\underline{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\ker(p_2(A_\sigma)^2) = [\,\underline{x}_2,\,\underline{x}_3,\,\underline{x}_4],$

$p_2(A_\sigma)\,(\,\underline{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{x}_3.$

Neue Basis: $\underline{x}_1,\,\underline{x}_3,\,\underline{x}_4,\,\underline{x}_2.$

Zusammenfassung

Gegeben V mit $\dim(V) = n,\ \sigma \in \operatorname{End}(V)$.

1. Berechne $f_\sigma = \prod_{i=1}^{s} p_i(t)^{\tilde{l}_i}$, danach weiß man

   $$V = \dot{+}_{i=1}^{s} \underbrace{\ker(p_i(\sigma)^{\tilde{l}_i})}_{=:\,U_i},$$

   und bzgl. entsprechender Basis hat σ die zugehörige Matrix

   $$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix},$$

   wobei A_i die Wirkung von $\sigma|_{U_i}$ beschreibt:

   $$p_i(t)^{l_i} = m_{\sigma|_{U_i}}(t) \;\Big|\; p_i(t)^{\tilde{l}_i}.$$

2. Zerlege U_i in σ-zyklische Teilräume.

   Dabei berechne $(l = l_i)$:

   $$\begin{array}{ll} C_1 & (\text{Erzeuger für } \ker(p_i(\sigma))), \\ C_2 & (\text{über } \ker(p_i(\sigma)) \text{ linear unabhängige Elemente aus } \ker(p_i(\sigma)^2)), \\ \vdots & \\ C_l & (\text{maximal über } \ker(p_i(\sigma)^{l-1}) \text{ linear unabhängige Elemente aus } U_i = \ker(p_i(\sigma)^l)). \end{array}$$

   Es sei $k_i = \sharp C_i \quad (1 \leq i \leq l)$. Dann ist k_1/k = Anzahl der σ-zyklischen Unterräume, $k = \deg(p_i)$.

   Die Dimension des größten σ-zyklischen Teilraums von U_i ist $k \cdot l$, die Anzahl der σ-zyklischen Unterräume der Dimension $k\,\nu \;\; (\leq \nu \leq l)$ ist

   $$(k_\nu - k_{\nu-1}) \,/\, k \quad (= 0 \text{ möglich}).$$

   Zur Wahl der neuen Basis vergleiche Ausführungen auf Seite 26ff.

Rückblick: Was ist eine Normalform?

$$\begin{array}{lcl} \text{Beste Möglichkeit:} & \text{Diagonalgestalt} & (\text{Lineare Algebra I}) \\ & \Uparrow & \\ \text{Zweitbeste Möglichkeit:} & \text{Jordan-Kästchen} & \\ & \Uparrow & \\ \text{Drittbeste Möglichkeit:} & \text{Kästchengestalt} & \end{array}$$

$V,\ \sigma \in \mathrm{End}(V)$, Minimalpolynom $m_\sigma(t) = \prod\limits_{i=0}^{s} p_i(t)^{l_i}$

<u>1. Normalform:</u>

$V = \dot{+}_{i=1}^{s} U_i$ mit $U_i = \ker(p_i(\sigma)^{l_i})$,

U_i σ-invariant, wie die Kästchen aussehen, bleibt offen.

<u>2. Normalform:</u>

Aufspaltung eines Kästchen aus 1., d.h. Betrachtung von $\sigma|_{U_i}$.

Direkte Zerlegung von $U = U_i$ in σ-zyklische Unterräume

$\Rightarrow$ Kästchengestalt, jedes Kästchen aus 1. spaltet auf in Kästchen der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_p} & 1 & & \\ & \boxed{A_p} & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}.$$

(Für A_p 1×1-Kästchen ist dies die Jordan-Normalform.)

Kapitel 9: Duale Raumpaare und Dualraum

9.1 Definition

Es seien V, W zwei K-Vektorräume.
Eine Abbildung $B : V \times W \to K : (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto B(\underline{v}, \underline{w})$ mit den Eigenschaften

(i) $B(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}, \underline{w}) = B(\underline{v}, \underline{w}) + B(\underline{\tilde{v}}, \underline{w})$,

(ii) $B(\underline{v}, \underline{w} + \underline{\tilde{w}}) = B(\underline{v}, \underline{w}) + B(\underline{v}, \underline{\tilde{w}})$,

(iii) $B(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda B(\underline{v}, \underline{w}) = B(\underline{v}, \lambda \underline{w})$

$\forall \lambda \in K,\ \forall \underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V,\ \forall \underline{w}, \underline{\tilde{w}} \in W.$

heißt Bilinearform (des Raumpaares (V, W)).

9.2 Definition

Ein Raumpaar (V, W) mit Bilinearform B, für das zusätzlich

(iv) $B(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in W \ \Rightarrow\ \underline{v} = \underline{0}$,

(v) $B(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in V \ \Rightarrow\ \underline{w} = \underline{0}$

erfüllt ist, heißt duales Raumpaar, B in diesem Fall skalares Produkt.

Bemerkungen:

(a) Dies ist eine Verallgemeinerung des früheren Skalarproduktes auf $V \times V$ für reelle Vektorräume V (Lineare Algebra I, Kapitel 7).

(b) (iv) und (v) garantieren, daß V und W nicht zu unterschiedlich ausfallen. Etwa:

$$V = \{\underline{0}\} \quad \Leftrightarrow \quad W = \{\underline{0}\}$$

(vergleiche Beweis zu (9.4)).

Standardbeispiel:
V K-Vektorraum, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ und

$$B : V \times V^* \longrightarrow K : (\underline{v}, \underline{v}^*) \longmapsto \underline{v}^*(\underline{v}).$$

Nachrechnen der Aximone (i)–(v):

(i)

$$\begin{aligned} B(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}, \underline{v}^*) &\overset{\text{def}}{=} \underline{v}^*(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) \\ &\overset{\underline{v}^* \text{ linear}}{=} \underline{v}^*(\underline{v}) + \underline{v}^*(\underline{\tilde{v}}) \\ &\overset{\text{def}}{=} B(\underline{v}, \underline{v}^*) + B(\underline{\tilde{v}}, \underline{v}^*) \quad \forall \underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V\ \forall \underline{v}^* \in V^*; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} B(\underline{v}, \underline{u}^* + \underline{v}^*) &= (\underline{u}^* + \underline{v}^*)(\underline{v}) \\ &= \underline{u}^*(\underline{v}) + \underline{v}^*(\underline{v}) \\ &= B(\underline{v}, \underline{u}^*) + B(\underline{v}, \underline{v}^*) \quad \forall \underline{v} \in V\ \forall \underline{u}^*, \underline{v}^* \in V^*; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{array}{rcccl} B(\lambda\underline{v}, \underline{v}^*) & = & \underline{v}^*(\lambda\underline{v}) & & \\ & = & \lambda(\underline{v}^*(\underline{v})) & = & (\lambda\underline{v}^*)(\underline{v}) \\ & & \| & & \| \\ & & \lambda B(\underline{v}, \underline{v}^*) & & B(\underline{v}, \lambda\underline{v}^*) \quad \forall\lambda \in K\ \forall\underline{v} \in V\ \forall\underline{v}^* \in V^*; \end{array}$$

(iv) Sei $\underline{v} \in V$ mit $B(\underline{v}, \underline{v}^*) = 0\ \forall \underline{v}^* \in V^*$.

Unter der Annahme $\underline{v} \neq \underline{0}$, ergänzen wir $\underline{v}$ zu einer Basis X von V (gezeigt für $\dim V < \infty$, für $\dim V = \infty$ siehe Algebra-Vorlesung). Erkläre auf V eine lineare Abbildung $f^* : V \to K$ durch Vorgabe der Werte auf X und lineare Fortsetzung (vergleiche (3.3) in Lineare Algebra I) mittels:

$$f^*(\underline{v}) = 1, \quad f^*(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in X \backslash \{\underline{v}\}.$$

Dies liefert $\mathcal{O} \neq f^* \in \mathrm{Hom}(V, K)$ mit

$$B(\underline{v}, f^*) = f^*(\underline{v}) = 1$$

im Widerspruch zu $B(\underline{v}, \underline{v}^*) = 0\ \forall \underline{v}^* \in \mathrm{Hom}(V, K)$.

(v) Es sei $\underline{v}^* \in V^*$ mit $B(\underline{v}, \underline{v}^*) = \underline{v}^*(\underline{v}) = \underline{0} \quad \forall \underline{v} \in V$.

Dann ist offensichtlich $\underline{v}^* = \underline{0}^* \in V^*$.

Demnach ist (V, V^*) mit angegebenem B ein duales Raumpaar; V^* heiß Dualraum zu V.

Bemerkung:
Da die Vekorräume V, W eines dualen Raumpaares infolge (i)–(v) gleichberechtigt sind, liefert jeder Satz über das Paar (V, W) bei Rollentausch von V und W einen Satz über das Paar (W, V) (dualer Satz). Hierin liegt die Bedeutung des Konzepts (Anwendungen in Numerischer Mathematik).

9.3 Hilfssatz

Es sei (V, W) ein duales Raumpaar und $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ eine Basis von V. Gilt dann für $\underline{w} \in W$:

$$B(\underline{v}_i, \underline{w}) = \underline{0} \quad (1 \le i \le n),$$

so ist $\underline{w} = \underline{0}$.

Beweis:
Jedes $\underline{x} \in V$ hat Basisdarstellung

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i \quad (\lambda_i \in K).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} B(\underline{x}, \underline{w}) &= B\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i, \underline{w}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B(\underline{v}_i, \underline{w}) \\ &= \underline{0}, \end{aligned}$$

also $\underline{w} = \underline{0}$ nach (9.2).

□

Bemerkung: Der Beweis funktioniert auch für $\dim V = \infty$.

9.4 Satz

Es sei (V, W) ein duales Raumpaar, und V oder W habe endliche Dimension. Dann sind V und W isomorph.

Beweis:
Es genügt, $\dim V = \dim W$ zu zeigen!
Infolge der Dualität genügt daher der Nachweis $\dim V \geq \dim W$ im Fall $\dim V < \infty$. (Denn dann besitzt W endliche Dimension, Rollentausch von V und W liefert $\dim W \geq \dim V$ und damit Gleichheit.)

Sei zunächst $V = \{\underline{0}\}$. Dann ist für festes $\underline{w} \in W$:

$$B(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{0} \quad \forall \underline{v} \in V$$

$$(B(\underline{0}, \underline{w}) = B(\underline{0} + \underline{0}, \underline{w}) \quad \Rightarrow \quad B(\underline{0}, \underline{w}) = 0)$$

$\overset{(9.2)}{\Longrightarrow} \quad \underline{w} = \underline{0}$, also $W = \{\underline{0}\}$.

Sei nun $\dim V = n$ und $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ eine Basis von V. Außerdem seien $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k \in W$ linear unabhängig. Zeige: $k \leq n$.
Setze $\gamma_{\mu\nu} := B(\underline{v}_\mu, \underline{w}_\nu) \ (1 \leq \mu \leq n,\, 1 \leq \nu \leq k)$.
Für $k > n$ sind die Vektoren

$$\underline{c}_\nu = (\gamma_{1\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu})^{\mathrm{tr}} \in K^n \quad (1 \leq \nu \leq k)$$

linear abhängig. Also existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, nicht alle 0, mit

$$\underline{0} = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \underline{c}_\nu \text{ in } K^n.$$

Koordinatenweise heißt dies:

$$0 = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \gamma_{\mu\nu} \quad (1 \leq \mu \leq n).$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} B\left(\underline{v}_\mu, \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \underline{w}_\nu\right) &= \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \underbrace{B(\underline{v}_\mu, \underline{w}_\nu)}_{\gamma_{\mu\nu}} \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad (1 \leq \mu \leq n). \end{aligned}$$

Nach (9.3) steht dies im Widerspruch zu

$$\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \underline{w}_\nu \neq \underline{0}\,.$$

Es folgt $k \leq n$ bzw. $\dim W \leq \dim V$.

□

9.5 Satz (Duale Basis)

Es sei (V, W) ein duales Raumpaar und $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ eine Basis von V. Dann existiert hierzu eine Basis $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ von W mit $B(\underline{v}_\mu, \underline{w}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ $(1 \leq \mu, \nu \leq n)$. Die Basis $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ heißt duale Basis (zu $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$).

Bemerkung: Anwendung etwa für $W = V^*$!

Beweis:

(i) Eindeutigkeit:

Es seien $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ und $\tilde{\underline{w}}_1, \dots, \tilde{\underline{w}}_n$ Basen von W mit der behaupteten Eigenschaft. Dann folgt:

$$\begin{aligned} B(\underline{v}_\mu, \underline{w}_\nu - \tilde{\underline{w}}_\nu) &= B(\underline{v}_\mu, \underline{w}_\nu) - B(\underline{v}_\mu, \tilde{\underline{w}}_\nu) \\ &= \delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} \\ &= 0 \qquad\qquad (1 \le \mu \le n), \end{aligned}$$

also

$$B(\underline{x}, \underline{w}_\nu - \tilde{\underline{w}}_\nu) = 0 \quad \forall \underline{x} \in V, \text{ nach (9.3)}$$

also $\underline{w}_\nu - \tilde{\underline{w}}_\nu = \underline{0}$ $(1 \le \nu \le n)$.

(ii) Existenz:

Dazu sei $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ eine beliebige Basis von W. Definiere durch $\gamma_{ij} := B(\underline{v}_i, \underline{y}_j)$ eine Matrix $C = (\gamma_{ij}) \in K^{n \times n}$. Für

$$V \ni \underline{x} = \sum_{i=1}^n \zeta_i \underline{v}_i, \quad W \ni \underline{y} = \sum_{i=1}^n \eta_i \underline{y}_i$$

erhält man

$$\begin{aligned} B(\underline{x}, \underline{y}) &= \sum_{i,j=1}^n \zeta_i \eta_j B(\underline{v}_i, \underline{y}_j) \\ &= (\underline{\zeta}_1, \dots, \underline{\zeta}_n) C \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \\ &= \underline{\zeta}^{\mathrm{tr}} C \underline{\eta}. \end{aligned}$$

Wäre C singulär ($\det C = 0$), so existierte $\underline{0} \neq \underline{\zeta} \in K^{n \times 1}$ mit $\underline{\zeta}^{\mathrm{tr}} C = \underline{0}^{\mathrm{tr}}$; d.h. für das zugehörige $\underline{x} \in V$ wäre $B(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \; \forall \underline{y} \in W$, also $\underline{x} = \underline{0}$. Widerspruch!

Also ist C regulär, schreibe $C^{-1} = (\tilde{\gamma}_{ij})$ und setze

$$\underline{w}_j := \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{ij} \underline{y}_i \quad (1 \le i \le n).$$

$$((\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n) = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) C^{-1})$$

Danach ist $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ Basis von W. Sie leistet zudem

$$\begin{aligned} B(\underline{v}_i, \underline{w}_j) &= e_i^{\mathrm{tr}} C \tilde{\underline{\gamma}}_j \quad (\text{mit } \tilde{\underline{\gamma}}_j = j\text{-te Spalte von } C^{-1}) \\ &= \underline{e}_i^{\mathrm{tr}} \underline{e}_j \\ &= \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n). \end{aligned}$$

□

Zu den folgenden Notationen und Sätzen vergleiche (7.11), (7.12) und (7.16).

9.6 Definition

Es sei V, W ein duales Raumpaar. Dann heißen Vektoren $\underline{v} \in V$ und $\underline{w} \in W$ mit $B(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ orthogonal. Zu $M \subseteq V$ heißt

$$M^\perp := \{ \underline{w} \in W \mid B(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \; \forall \underline{v} \in M \}$$

das <u>orthogonale Kompliment</u> von M.
(Analog für $N \subseteq W$:

$$N^\perp := \{ \underline{v} \in V \mid B(\underline{v}, \underline{y}) = 0 \; \forall \underline{y} \in N \} \quad)$$

9.7 Hilfssatz

Es sei (V, W) ein duales Raumpaar, und es seien $M_1, M_2 \subseteq V$.
Dann gilt:

(i) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$.

(ii) $M_1^\perp$ ist Unterraum von W.

(iii) $M_1^\perp = [M_1]^\perp$.

<u>Beweis:</u>

(i) $\underline{w} \in M_2^\perp \Rightarrow B(\underline{x}, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in M_2$
$\Rightarrow B(\underline{x}, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in M_1$
$\Rightarrow \underline{w} \in M_1^\perp$.

(ii) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in M_1^\perp$.
Dann ist

$$\begin{aligned} B(\underline{x}, \lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2) &= \lambda_1 B(\underline{x}, \underline{w}_1) + \lambda_2 B(\underline{x}, \underline{w}_2) \\ &= 0 \qquad \forall \underline{x} \in M_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 \in M_1^\perp$. Trivialerweise ist $\underline{0} \in M_1^\perp$.

(iii) Nach (i) ist $[M_1]^\perp \subseteq M_1^\perp$. Sei ferner $\underline{w} \in M_1^\perp$. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n \in M_1$, so ist

$$B(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{x}_n, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B(\underline{x}_i, \underline{w}) = 0,$$

folglich ist $\underline{w} \in [M_1]^\perp$.

□

<u>Bemerkung:</u> Statt $\underline{w} \in M_1^\perp$ schreibt man auch $\underline{w} \perp M_1$.

9.8 Hilfssatz

Es sei (V, W) ein duales Raumpaar mit $\dim V < \infty$.
Dann gilt für jeden Unterraum U von V:

(i) $(U^\perp)^\perp = U$,

(ii) $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Beweis:

(i) Ist $U = \{\underline{0}\}$, so ist $U^\perp = W$, sowie $(U^\perp)^\perp = W^\perp = \{\underline{0}\} = U$.

Es sei nun $U \neq \{\underline{0}\}$ und $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ eine Basis von U.

Ergänze diese mittels $\underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_n$ zu Basis von V.

Hierzu sei $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ die zugehörige duale Basis.

Für $X = [\underline{w}_{k+1}, \ldots, \underline{w}_m]$ ist $X \subseteq U^\perp$.

Ist andererseits $\underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \underline{w}_i \in U^\perp$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= B(\underline{v}_\nu, \underline{w}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, B(\underline{v}_\nu, \underline{w}_i) \\ &= \lambda_\nu \qquad (1 \le \nu \le k), \end{aligned}$$

also $\underline{w} \in X$ bzw. $X = U^\perp$.

Analog folgt $(U^\perp)^\perp = X^\perp = U$.

(ii) Die Dimensionsaussage ist nach Teil (i) klar gemäß $\dim V = n$, $\dim U = k$ und $n - k = \dim U^\perp$.

□

9.9 Satz

Es sei (V, W) ein duales Raumpaar.
Dann gibt es genau einen Monomorphimus $\varphi : W \to V^*$ mit

$$B(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w})(\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in V,\ \underline{w} \in W.$$

Beweis:

(i) Eindeutigkeit:

Dazu seien $\varphi, \tilde{\varphi} \in \operatorname{Hom}(W, V^*)$ mit obiger Eigenschaft. Dann gilt für alle $\underline{v} \in V$, $\underline{w} \in W$:

$$\varphi(\underline{w})(\underline{v}) = B(\underline{v}, \underline{w}) = \tilde{\varphi}(\underline{w})(\underline{v}),$$

d.h. $\tilde{\varphi}(\underline{w})$, $\varphi(\underline{w})$ aus V^* haben auf ganz V die gleichen Werte, $\tilde{\varphi}(\underline{w}) = \varphi(\underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W$, also sind sie als lineare Funktionale gleich, $\tilde{\varphi} = \varphi$.

(ii) Existenz:

Definiere:

$$\varphi : W \longrightarrow V^* : \underline{w} \longmapsto B(\ \ , \underline{w})$$

mit

$$B(\ \ , \underline{w}) : V \longrightarrow K : \underline{v} \longmapsto B(\underline{v}, \underline{w}),$$

denn nach (9.1)(i), (iii) ist $B(\ \ , \underline{w}) \in V^*$.

φ ist Homomorphimus!

Dazu seien $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$. Dann gilt für alle $\underline{v} \in V$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1\, \underline{w}_1 + \lambda_2\, \underline{w}_2)(\underline{v}) &= B(\underline{v}, \lambda_1\, \underline{w}_1 + \lambda_2\, \underline{w}_2) \\ &= \lambda_1\, B(\underline{v}, \underline{w}_1) + \lambda_2\, B(\underline{v}, \underline{w}_2) \\ &= \lambda_1\, \varphi(\underline{w}_1)(\underline{v}) + \lambda_2\, \varphi(\underline{w}_2)(\underline{v}) \\ &= (\lambda_1\, \varphi(\underline{w}_1) + \lambda_2\, \varphi(\underline{w}_2))(\underline{v}), \end{aligned}$$

also ist $\varphi(\lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2) = \lambda_1 \varphi(\underline{w}_1) + \lambda_2 \varphi(\underline{w}_2)$, d.h. $\varphi \in \operatorname{Hom}(W, V^*)$.

φ ist injektiv!

Dazu sei $\underline{w} \in W$ mit $\varphi(\underline{w}) = \underline{0}^*$. Dann ist

$$0 = \varphi(\underline{w})(\underline{v}) = B(\underline{v}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v} \in V,$$

also $\underline{w} = \underline{0}$ nach (9.1)(v).

□

Bemerkung:
Für $\dim V < \infty$ ist überdies $\operatorname{rg} \varphi = \dim V$, also φ nach (9.4) auch surjektiv, d.h. Isomorphismus.

9.10 Korollar

Es sei V ein Vektorraum und U^* ein Unterraum von V^*.
Dann gilt: Genau dann ist (V, U^*) ein duales Raumpaar, wenn $U^{*\perp} = \{\underline{0}\}$ ist.

Beweis:
"$\Rightarrow$" Klar nach Definition, vergleiche (9.2)(iv).
"$\Leftarrow$"
(V, U^*) wird nun duales Raumpaar mittels

$$B(\underline{v}, \underline{v}^*) = \underline{v}^*(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V, \underline{v}^* \in U^*.$$

Es bleibt (9.2)(iv) und (v) zu zeigen, (9.1)(i)–(iii) ist klar, da sogar für alle $\underline{v}^* \in V^*$ erfüllt.

Zunächst folgt: $U^{*\perp} = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ (9.2)(iv).
Sei schließlich $\underline{u}^* \in U^*$:

$$B(\underline{v}, \underline{u}^*) = 0 \quad \forall \underline{v} \in V \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u}^*(\underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in V \quad \overset{\substack{B \text{ nicht} \\ \text{ausgeartet}}}{\Leftrightarrow} \quad \underline{u}^* = \underline{0}^* \in U^* \subseteq V^*.$$

□

9.11 Korollar

Für $\dim V < \infty$ ist (V, V^*) bis auf Isomorphie das einzige duale Raumpaar mit V als erstem Vektorraum.

Bemerkung:
Zwei duale Raumpaare (V, W_i) mit Bilinearformen B_i $(i = 1, 2)$ heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus $\varphi : W_1 \to W_2$ gibt mit

$$B_1(\underline{v}, \underline{w}_1) = B_2(\underline{v}, \varphi(\underline{w}_1)) \quad \forall \underline{v} \in V, \forall \underline{w}_1 \in W_1.$$

9.12 Definition

Es seien (V_i, W_i) zwei duale Raumpaare mit Bilinearformen B_i $(i = 1,2)$ über K. Dann heißen $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ und $\varphi^* \in \operatorname{Hom}(W_2, W_1)$ ein duales Abbildungspaar, wenn für alle $\underline{v} \in V_1$, $\underline{w} \in W_2$ gilt:

$$B_1(\underline{v}, \varphi^*(\underline{w})) = B_2(\varphi(\underline{v}), \underline{w}).$$

In diesem Fall heißt φ^* zu φ dual.

Beispiel:
Es sei V ein Euklidischer-Vektorraum mit Skalarprodukt B. Setze $V_1 = V_2 = W_1 = W_2 = V$, $B_1 = B_2 = B$. Für $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert ist φ, φ^* $(= \varphi)$ ein duales Abbildungspaar.

9.13 Hilfssatz

Zu $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ existiert höchstens eine duale Abbildung $\varphi^* \in \operatorname{Hom}(W_2, W_1)$.

Beweis:
Es seinen (φ, φ_1^*) und (φ, φ_2^*) duale Abbildungspaare.
Für alle $\underline{v}_1 \in V_1$, $\underline{w}_2 \in W_2$ gilt dann

$$B_1(\underline{v}_1, \varphi_2^*(\underline{w}_2)) = B_2(\varphi(\underline{v}_1), \underline{w}_2) = B_1(\underline{v}_1, \varphi_1^*(\underline{w}_2))$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad 0 &= B(\underline{v}_1, \varphi_2^*(\underline{w}_2) - \varphi_1^*(\underline{w}_2)) \\ &= B(\underline{v}_1, (\varphi_2^* - \varphi_1^*)(\underline{w}_2)) \end{aligned}$$

$\overset{(9.2)}{\Longrightarrow}$ $(\varphi_2^* - \varphi_1^*)(\underline{w}_2) = \underline{0} \quad \forall\, \underline{w}_2 \in W_2$
$\Longrightarrow$ $\varphi^*(\underline{w}_2) = \varphi_1^*(\underline{w}_2) \quad \forall\, \underline{w}_2 \in W_2$
$\Longrightarrow$ $\varphi_2^* = \varphi_1^*$.

□

9.14 Hilfssatz

Zu jedem $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ existiert die duale Abbildung $\varphi^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$.

Beweis:
Betrachten des Diagramms

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V^* & W^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

führt zur folgenden Definition von φ^*:

$$\varphi^* \; : \; W^* \longrightarrow V^* \; : \; \underline{w}^* \longmapsto \underline{w}^* \circ \varphi.$$

Hier ist $\underline{w}^* \circ \varphi$ zunächst eine Abbildung von V nach K.
Als Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ist $\underline{w}^* \circ \varphi$ wiederum linear, also ist $\underline{w}^* \circ \varphi$ aus V^*. Es verbleibt der Nachweis der Dualitätseigenschaften.
Dazu seien $\underline{v} \in V$ und $\underline{w}^* \in W^*$ gegeben. Hierfür wird

$$\begin{array}{cccc} B_1(\underline{v}, \varphi^*(\underline{w}^*)) & & & \\ \| & & & \\ \varphi^*(\underline{w}^*)(\underline{v}) & = \; \underline{w}^* \circ \varphi(\underline{v}) & \overset{!}{=} & B_2(\varphi(\underline{v}), \underline{w}^*). \end{array}$$

□

9.15 Hilfssatz

Es seien $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\varphi^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ ein duales Abbildungspaar. Dann gilt:

(i) $\ker(\varphi^*) = \varphi(V)^\perp$, $\ker(\varphi) = \varphi^*(W^*)^\perp$.

(ii) $\varphi^* \left\{ \begin{array}{c} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi \left\{ \begin{array}{c} \text{surjektiv} \\ \text{injektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\}.$

(iii) Im Fall $\dim V < \infty$ oder $\dim W < \infty$ ist $\operatorname{rg} \varphi^* = \operatorname{rg} \varphi$.

Beweis:

(i) Für $\underline{w}^* \in W^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{w}^* \in \ker \varphi^* &\Leftrightarrow \varphi^*(\underline{w}^*) = \underline{0}^* \quad \in V^* \\ &\Leftrightarrow 0 = B_1(\underline{v}, \varphi^*(\underline{w}^*)) \quad \forall \underline{v} \in V \\ &\qquad = B_2(\varphi(\underline{v}), \underline{w}^*) \\ &\Leftrightarrow \underline{w}^* \perp \varphi(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V \\ &\Leftrightarrow \underline{w}^* \perp \varphi(V); \end{aligned}$$

für $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{v} \in \ker \varphi &\Leftrightarrow \varphi(\underline{v}) = \underline{0} \quad \in W \\ &\Leftrightarrow 0 = B_2(\varphi(\underline{v}), \underline{w}^*) \quad \forall \underline{w}^* \in W^* \\ &\qquad = B_1(\underline{v}, \varphi^*(\underline{w}^*)) \\ &\Leftrightarrow \underline{v} \perp \varphi^*(\underline{w}^*) \quad \forall \underline{w}^* \in W^* \\ &\Leftrightarrow \underline{v} \in \varphi^*(W^*)^\perp. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \varphi^* \text{ injektiv} &\Leftrightarrow \ker(\varphi^*) = \{\underline{0}^*\} \\ &\overset{\text{(i)}}{\Leftrightarrow} \varphi(V)^\perp = \{\underline{0}^*\} \subseteq W^* \\ &\Leftrightarrow \varphi(V) = W \end{aligned}$$

Zur letzten Äquvalenz:

$\varphi(V) = W \;\Rightarrow\; \varphi(V)^\perp = \{\underline{0}^*\}$ nach (9.2)(v).

Wäre andererseits $\underline{w} \in W \backslash \varphi(V)$, so ist $\underline{w} \neq \underline{0}$, läßt sich also zu einer Basis B von W ergänzen. Hierfür erkläre lineares Funktional $\underline{w}^* \in W^*$ mittels $\underline{w}^*(\underline{w}) = 1$, $\underline{w}^*(\varphi(V)) = 0$. Dies liefert Funktional $\underline{0}^* \neq \underline{w}^* \in (\varphi(V))^\perp$.

$$\begin{aligned} \varphi^* \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \varphi^*(W^*) = V^* \\ &\Rightarrow \varphi^*(W^*)^\perp = \{\underline{0}\} \subseteq V \\ &\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \varphi \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

Ist andererseits φ injektiv, so wähle Basis $\{\underline{v}_i\}_{i\in I}$ von V. Dann ist $\{\varphi(\underline{v}_i)\}_{i\in I}$ linear unabhängig. Sei nun $\underline{v}^* \in V^*$. Hierzu existiert $\underline{w}^* \in W^*$ mit

$$\underline{w}^*(\varphi(\underline{v}_i)) = \underline{v}^*(\underline{v}_i),$$

denn $\{\varphi(\underline{v}_i)\}_{i\in I}$ läßt sich zu einer Basis von W ergänzen, auf der sich die Werte von $\underline{w}^*$ beliebig vorschreiben lassen. Es gilt

$$\begin{aligned} (\varphi^*(\underline{w}^*))(\underline{v}_i) &= B_1(\underline{v}_i, \varphi^*(\underline{w}^*)) \\ &= B_2(\varphi(\underline{v}_i), \underline{w}^*) \\ &= \underline{w}^*(\varphi(\underline{v}_i)) \\ &= \underline{v}^*(\underline{v}_i). \end{aligned}$$

Damit wird $\varphi^*(\underline{w}^*) = \underline{v}^*$, also $\varphi^*(W^*) = V^*$.

Schließlich gilt:

$$\begin{array}{ccc} \varphi \text{ surjektiv und injektiv} & \Leftrightarrow & \varphi^* \text{ injektiv und surjektiv} \\ \| & & \| \\ \varphi \text{ bijektiv} & & \varphi^* \text{ bijektiv} \end{array}.$$

(iii) Sei zunächst $\dim V = \dim V^* = n < \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\varphi &= n - \dim(\ker \varphi) \\ &= n - \dim(\varphi^*(W^*)^\perp) \\ &= n - (n - \dim \varphi^*(W^*)) \\ &= \operatorname{rg} \varphi^*. \end{aligned}$$

Sei schließlich $\dim W = \dim W^* = m < \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\ \varphi^* &= m - \dim(\ker \varphi^*) \\ &= m - \dim(\varphi(V)^{\perp}) \\ &= m - (m - \dim \varphi(V)) \\ &= \dim \varphi(V) \\ &= \mathrm{rg}\ \varphi. \end{aligned}$$

□

9.16 Lemma

Es seien V, W endlich dimensionale Vektorräume und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist dann φ bzgl. fester Basen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ von V bzw. $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ von W die Matrix $A = A_\varphi \in K^{m\times n}$ zugeordnet, so ist $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ bzgl. der dualen Basen $\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ von V bzw. $\underline{w}_1^*, \dots, \underline{w}_m^*$ von W^* die Matrix A^{tr} zugeordnet.

Beweis:
$A = (\alpha_{\mu\nu}) \in K^{m\times n}$ ist gegeben durch

$$(\varphi(\underline{v}_1), \dots, \varphi(\underline{v}_n)) = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m)\, A.$$

Für die duale Abbildung φ^* folgt:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\underline{w}_k^*)(\underline{v}_l) &= B_1(\underline{v}_l, \varphi^*(\underline{w}_k^*)) \\ &= B_2(\varphi(\underline{v}_l), \underline{w}_k^*) \\ &= \underline{w}_k^*(\varphi(\underline{v}_l)) \\ &= \underline{w}_k^*\left(\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\mu l}\, \underline{w}_\mu\right) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\mu l}\, \delta_{\mu k} \quad \text{(duale Basis)} \\ &= \alpha_{kl} \\ &= \left(\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{k\mu}\, \underline{v}_\mu^*\right)(\underline{v}_l) \quad (1 \le k \le m,\ 1 \le l \le n). \end{aligned}$$

Damit gilt jedoch:

$$\varphi^*(\underline{w}_k^*) = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{k\mu}\, \underline{v}_\mu^* \quad (1 \le k \le m).$$

□

Bemerkung:
Als Konsequenz von (9.15)(iii) und (9.16) folgt sofort, daß Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix übereinstimmen. (9.16) bedingt für Endomorphismen:

$$\det \varphi = \det \varphi^*.$$

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

9.17 (Alternativ-) Satz

Für $A \in K^{m\times n}$, $\underline{b} \in K^m$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,\underline{x} = \underline{b}$ genau dann lösbar, wenn $\underline{b}$ orthogonal zu allen Lösungen $\underline{y}^* \in K^m$ von $A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y}^* = \underline{o}$ ist.

Beweis:

Bzgl. der kanonischen Basen von K^n, K^m definiert A eine lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$. Die zugehörige duale Abbildung $\varphi^* : K^m \to K^n$ hat dann bzgl. der entsprechenden dualen Basen die Matrix A^{tr}. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A\,\underline{x} = \underline{b} \text{ lösbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad \underline{b} \in \varphi(K^n) \\ &\overset{(9.13)(\mathrm{i})}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{b} \in (\ker \varphi^*)^{\perp} \\ &\Longleftrightarrow \quad \underline{b} \perp \underline{y}^* \quad \forall \underline{y}^* \in \ker \varphi^* \\ &\Longleftrightarrow \quad \underline{b} \perp \underline{y}^* \quad \forall \underline{y}^* \text{ mit } A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y}^* = \underline{0}\,. \end{aligned}$$

□

9.18 Dualitätssatz

Besitzt eine der beiden Optimierungsaufgaben

I. $\max\{\,\underline{c}^{\mathrm{tr}}\,\underline{x} \mid A\,\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{0}\,\}$,

II. $\min\{\,\underline{b}^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} \mid A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} \ge \underline{c},\ \underline{y} \ge \underline{0}\,\}$

($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{y}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{u} \le \underline{v} :\Leftrightarrow u_i \le v_i$ koordinatenweise)

eine endliche Optimallösung, so auch die andere; in diesem Fall sind die Optimalwerte $\underline{c}^{\mathrm{tr}}\,\underline{x}$ bzw. $\underline{b}^{\mathrm{tr}}\,\underline{y}$ gleich.

Beweisskizze:

(i) $\left\{ \begin{smallmatrix} \underline{x}\in\mathbb{R}^n \\ \underline{y}\in\mathbb{R}^m \end{smallmatrix}\right.$ heißt zulässige Lösung von $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{smallmatrix}\right.$, falls $\left\{ \begin{smallmatrix} A\,\underline{x}\le \underline{b} \\ A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y}\ge \underline{c} \end{smallmatrix}\right.$ und $\left\{ \begin{smallmatrix} \underline{x}\ge \underline{0} \\ \underline{y}\ge \underline{0} \end{smallmatrix}\right.$ gilt.

Für zulässige Lösungen $\underline{x}$ von I, $\underline{y}$ von II erhält man:

$$\underline{c}^{\mathrm{tr}}\,\underline{x} \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{\le} (\underline{y}^{\mathrm{tr}} A)\,\underline{x} = \underline{y}^{\mathrm{tr}}\,(A\,\underline{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ (**)}}{\le} \underline{b}^{\mathrm{tr}}\,\underline{y}\ (= \underline{y}^{\mathrm{tr}}\,\underline{b}),$$

denn $(*)$ ist richtig wegen $A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} \ge \underline{c},\ \underline{x} \ge \underline{0}$, $(**)$ ist richtig wegen $A\,\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{y} \ge \underline{0}$.

(ii) Konsequenz von (9.17):

$$A\,\underline{x} = \underline{b} \text{ lösbar} \iff A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} = \underline{0} \wedge \underline{b}^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} = 1 \text{ unlösbar.}$$

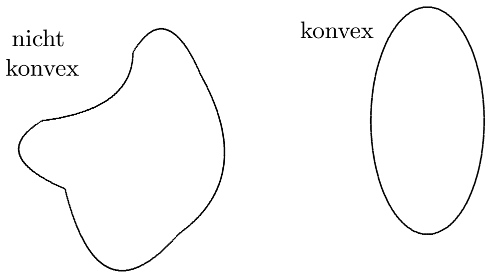
(iii) Mit einem Trennungssatz für konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ folgt aus (ii):

$$A\,\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \ge \underline{0} \text{ lösbar} \iff A^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} \ge \underline{0} \wedge \underline{b}^{\mathrm{tr}}\,\underline{y} < 0 \text{ unlösbar.}$$

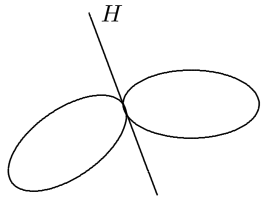
Hiermit und mittels (i) folgt die Behauptung.

Trennungssatz (anschaulich):

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls mit $\underline{x}, \underline{y} \in M$ auch $\lambda\,\underline{x} + (1-\lambda)\,\underline{y}\ \forall \lambda \in [0, 1]$ zu M gehört (Verbindungsstrecke von $\underline{x}$ und $\underline{y}$). Zum Beispiel sind Kreise und Ellipsen konvexe Mengen im $\mathbb{R}^2$.



Eine Hyperebene H ist ein Element $\underline{x} + U \in V/U$ im Fall, daß U ein Unterraum von V der Dimension $\dim V - 1$ ist.



Falls M_1, M_2 konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ sind und M_2 abgeschloßen ist, dann existiert eine Hyperebene, die M_1 und M_2 trennt.

Nachtrag zur Linearen Algebra I

9.19 Satz

Im $\mathbb{R}^n$ wird durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels

$$(x,\, y) \longmapsto \underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{y}$$

genau dann ein Skalarprodukt definiert, wenn A lauter positive Eigenwerte besitzt. A heißt in diesem Fall <u>positiv definit</u>.

<u>Beweis:</u>
Durch $\underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{y}$ wird eine symmetrische Bilinearform erklärt (vergleiche Kapitel 7). Nach (7.28) existiert $S \in O(n)$ (orthogonale Matrix) mit $S^{\mathrm{tr}}\, A\, S = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gerade die Eigenwerte von A sind. Damit gilt für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x} &= \underline{x}^{\mathrm{tr}}\, ({S^{-1}}^{\mathrm{tr}}\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, S^{-1})\, \underline{x} \\ &= (S^{-1}\, \underline{x})^{\mathrm{tr}}\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, (S^{-1}\, \underline{x}). \end{aligned}$$

Für $\underline{y} = S^{-1}\, \underline{x}$ wird

$$\begin{aligned} \underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x} &= \underline{y}^{\mathrm{tr}}\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, \underline{y} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2. \end{aligned}$$

Sind alle λ_i positiv so ist $\underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x} > 0$ für jedes $\underline{x} \neq \underline{0}$.
Gilt umgekehrt $\underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x} > 0\ \forall\, \underline{x} \neq \underline{0}$, so setze $\underline{x}_i = S\, \underline{e}_i \neq \underline{0}$. Es folgt

$$0 < \underline{x}_i^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \delta_{ij} = \lambda_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

□

9.20 Satz (Sylvestersches Trägheitsgesetz)

Zu symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert $S \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ mit

$$S^{\mathrm{tr}}\, A\, S = \mathrm{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}, \underbrace{0,\ldots,0}_{r}).$$

Hierbei sind dann der Rang von A ($p+q = n-r = \mathrm{rg}\, A$) und die Signatur von A ($(p,\, q)$ bzw. $p-q$) Invarianten von A (d.h. unabhängig von der Wahl von S mit der Eigenschaft $S^{\mathrm{tr}}\, A\, S =$ Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $+1$, -1, 0).
(Auf diese Weise wird jeder Äquivalenzklasse

$$\{X^{\mathrm{tr}}\, A\, X \mid X \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})\} \text{ von zu } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

äquivalenten Matrizen ein eindeutiger Vertreter zugeordnet.)

Beweis:
Es seien

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ die positiven Eigenwerte von A,
$\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}$ die negativen Eigenwerte von A,
$\lambda_{p+q+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ (0 tritt $n-(p+q)$ mal als Eigenwert von A auf).

Nach (7.28) existiert $\tilde{S} \in O(n)$ mit

$$\tilde{S}^{\mathrm{tr}}\, A\, S = \underbrace{\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}_{T}.$$

Setze $T = \mathrm{diag}\,(|\lambda_1|^{-1/2}, \ldots, |\lambda_{p+q}|^{-1/2}, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$.
Dann leistet $S = \tilde{S}\, T$ das gewünschte.

Ferner ist $\mathrm{rg}(A) = p+q$ eine Invariante, da sich der Rang bei Multiplikation mit regulären Matrizen nicht ändert. Es genügt folglich, die Invarianz von p zu zeigen. Dies geschieht indirekt.

Annahme: Es existiert $S_i \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ mit

$$A_i := S_i^{\mathrm{tr}}\, A\, S_i = \mathrm{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{p_i}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q_i}, 0, \ldots, 0) \quad (i = 1,\, 2)$$

und $p_1 < p_2 \quad (p_1 + q_1 = p_2 + q_2)$.
Hierfür ist $A_2 = T^{\mathrm{tr}}\, A_1\, T$ mit $T = S_1^{-1}\, S_2 \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$.
Betrachte Unterräume

$$U_1 = \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \ldots = x_{p_1} = 0\}$$

mit $\dim U_1 = n - p_1$ und $\underline{u}^{\mathrm{tr}}\, A_1\, \underline{u} \le 0 \;\; \forall\, \underline{u} \in U_1$, sowie

$$U_2 = \{\, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \mid y_{p_2+1} = \ldots = y_n = 0\}$$

mit $\dim U_2 = p_2$ und $\underline{u}^{\mathrm{tr}}\, A_2\, \underline{u} > 0 \;\; \forall\, \underline{u} \in U_2 \backslash \{\, \underline{0}\}$. Es ist
$\dim (T^{-1}\,(U_1) \cap U_2) > 0$ nach dem Dimensionssatz wegen
$\dim (T^{-1}\,(U_1) + U_2) \le n$ und
$\dim (T^{-1}\,(U_1)) + \dim U_2 = n - p_1 + p_2 > n$.
Also existiert $\underline{0} \ne \underline{y} \in U = T^{-1}\,(U_1) \cap U_2$, d.h. $\underline{x} = T\, \underline{y} \in U_1$; damit wird

$$\begin{aligned} 0 \underset{\underline{y}\in U_2}{<} \underline{y}^{\mathrm{tr}}\, A_2\, \underline{y} &= \underline{y}^{\mathrm{tr}}\, T^{\mathrm{tr}}\, A_1\, T\, \underline{y} \\ &= \underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A_1\, \underline{x} \underset{\underline{x}\in U_1}{\le} 0. \end{aligned}$$

Dies ist offensicht ein Widerspruch zu $p_1 < p_2$!

□

Eine Multiplikation mit S bedeutet Basistransformation im $\mathbb{R}^n$, bzgl. passender Basis läßt sich also jede symmetrische Bilinearform im $\mathbb{R}^n$ als $\mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ schreiben. Dasselbe gilt für eine quadratische Form $\underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x}$ im $\mathbb{R}^n$; bzgl. passender Basis wird sie zu

$$y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2 = Q(\underline{y})$$

für $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Für eine symmetrische (positiv definite) Matrix erhält man damit eine vereinfachte Version des Gaußschen Algorithmus, das sog. Cholesky-Verfahren:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} x_i\,\alpha_{ij}\,x_j = \underline{x}^{\mathrm{tr}}\,A\,\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}\left(x_i + \sum_{j=i+1}^{n} q_{ij}\,x_j\right)^2$$

Beispiel:
Es ist

$2\,x^2 + 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y^2 + 2\,y\,z + 2\,z^2$

$$\begin{aligned} &= 2\left(x + \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z\right)^2 + \frac{3}{2}\,y^2 + y\,z + \frac{3}{2}\,z^2 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{3}\,z\right)^2 + \frac{4}{3}\,z^2; \end{aligned}$$

dies wird in Matrixschreibweise zu

$$(x,\,y,\,z)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Umformungen verlaufen hierfür folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1\;\;1} \\ 1 & 2 \quad 1 \\ 1 & \quad\;\; 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

Division durch Diagonalelement in Zeile

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 - \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2} \\ 1 & & 2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ * & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ & & \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ & & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner Algorithmus zur Berechnung der q_{ij} aus $A = (\alpha_{ij})$:
Setze $q_{ij} \leftarrow \alpha_{ij} \quad (1 \le i \le j \le n)$.
Für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ tue:

(1.) $q_{ji} \leftarrow q_{ij}$ und danach $q_{ij} \leftarrow q_{ij}/q_{ii} \quad (i < j \le n)$;

(2.) für $k = i+1, \ldots, n$ setze $q_{kl} \leftarrow q_{kl} - q_{ki}\, q_{il} \quad (k \le l \le n)$.

Im eigentlichen Cholesky-Verfahren berechnet man statt dessen eine obere $\triangle$-Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = R^{\mathrm{tr}}\, R$. Die Elemente r_{ij} von R berechnen sich hierbei aus den q_{ij} mittels
$r_{ij} = 0 \qquad (i > j)$,
$r_{ii} = q_{ii}^{1/2} \qquad (1 \le i \le n)$,
$r_{ij} = q_{ij}\, r_{ii} \quad (j > i)$.
Dieses Verfahren gestattet nun eine einfache Berechnung von

$$\underline{x}^{\mathrm{tr}}\, A\, \underline{x} \le C \quad (C > 0,\ \underline{x} \in \mathbb{Z}^n).$$

Denn für

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ii} \left(x_i + \sum_{j=i+1}^{n} q_{ij}\, x_j \right)^2$$

ist jeder einzelne Summand $\le C$!
Speziell:

$$q_{nn}\, x_n^2 \le C,$$

also

$$|x_n| \le \left(\frac{C}{q_{nn}} \right)^{1/2}$$

$\Rightarrow$ endlich viele Möglichkeiten für $x_n \in \mathbb{Z}$!
Für jedes solches x_n:

$$\begin{array}{lll} q_{n-1,n-1}\,(x_{n-1} + q_{n-1,n}\, x_n)^2 \le C - q_{nn}\, x_n^2 & \Rightarrow & \text{Schranke für } x_{n-1} \\ \text{für jedes mögliche Paar } (x_n,\, x_{n-1}) & \Rightarrow & \text{Schranke für } x_{n-2}, \text{ etc.} \end{array}$$

Insgesamt erhält man nur endlich viele Lösungstupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Falls A nur symmetrisch (nicht notwendig positiv definit) ist, funktioniert das beschriebene Verfahren solange, bis ein Diagonalelement $q_{ii} = 0$ auftritt. Danach sind geeignete Modifikationen vorzunehmen.

Kapitel 10: Multilineare Algebra

10.1 Definition

Es seien $V_1, \ldots, V_r$ ($r \in \mathbb{N}$) von $\{\underline{0}\}$ verschiedene K-Vektorräume. Dann wird

$$V := \prod_{i=1}^{r} V_i := V_1 \times \ldots \times V_r$$

(kartesisches Produkt) zu einem K-Vektorraum mittels

$$\begin{aligned} (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r) + (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_r) &= (\underline{x}_1 + \underline{y}_1, \ldots, \underline{x}_r + \underline{y}_r), \\ \lambda (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r) &= (\lambda \underline{x}_1, \ldots, \lambda \underline{x}_r). \end{aligned}$$

V heißt <u>direktes Produkt</u> der V_i $(1 \leq i \leq r)$.

(<u>Beweis:</u> durch Nachrechnen der Axiome (2.1).)

(Analog: direktes Produkt von Gruppen, Ringen und Moduln)

<u>Bemerkung:</u>

(i) Jeder Vektorraum V_i $(1 \leq i \leq r)$ läßt sich in V "<u>einbetten</u>", d.h. es existiert ein Monomorphismus $\iota_i : V_i \to V$. Hier leistet dies offenbar

$$\varepsilon_i : V_i \longrightarrow V : \underline{x}_i \longmapsto (\underline{0}, \ldots, \underline{0}, \underline{x}_i, \underline{0}, \ldots, \underline{0}),$$

$\underline{x}_i$ aus V_i wird auf die i-te Koordinate des Bildes abgebildet, alle andere Koordinaten sind 0.

(ii) Man hat andererseits auch natürliche Epimorphismen von V auf jedes V_i $(1 \leq i \leq r)$, sog. "<u>Projektionen</u>":

$$\pi_i : V \longrightarrow V_i : (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \longmapsto \underline{v}_i.$$

Hierfür ist

$$V = \prod_{i=1}^{r} \pi_i(V)$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_V &= \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \circ \pi_i, \\ \mathrm{id}_{V_i} &= \pi_i \circ \varepsilon_i. \end{aligned}$$

(iii) Gilt $\dim V_i = n_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq r)$, so ist

$$\dim V = \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Sind nämlich $\underline{x}_{i_1}, \ldots, \underline{x}_{i_n}$ Basen von V_i $(1 \leq i \leq r)$, so ist

$$B = \{ \varepsilon_i (\underline{x}_{ij}) \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n_i \}$$

eine Basis von V. Offenbar ist B ein Erzeugendensystem von V. Es bleibt zu zeigen, daß B

linear unabhängig ist.

Ist etwa

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}\, \varepsilon_i\,(\,\underline{x}_{ij}),$$

so wird daraus durch Anwendung von π_i:

$$\underline{0} = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}\; \underbrace{\pi_i \circ \varepsilon\,(\,\underline{x}_{ij})}_{=\,\underline{x}_{ij}},$$

also eine Darstellung der $\underline{0}$ in V_i. Es folgt $0 = \lambda_{ij}$ $(1 \leq j \leq n_i)$.

Da für π_i $(1 \leq i \leq r)$ der Index i beliebig war, müssen alle $\lambda_{ij} = 0$ sein. Also ist B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V, also eine Basis.

(iv) Zusammenhang zur direkten Summe:

Die direkte Summe von Unterräumen $V_1, \ldots, V_r$ eines Vektorraums V war

$$V = \dot{\sum_{i=1}^{r}}\, V_i.$$

Wir zeigen:

$$V \cong \prod_{i=1}^{r} V_i.$$

Betrachte dazu die Abbildung

$$\varphi \;:\; \prod_{i=1}^{r} V_i \longrightarrow V \;:\; (\,\underline{v}_1, \ldots, \,\underline{v}_r) \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \,\underline{v}_i.$$

Sie ist linear, injektiv und surjektiv, wie man leicht nachrechnet.

Es gilt jedoch Vorsicht vor einer Umkehrung!

Für $U_1, \ldots, U_r$ Unterräume von V mit

$$\prod_{i=1}^{r} U_i \cong V \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} U_i = V.$$

Es sei etwa $U = U_1 = \ldots = U_r$, eindimensional, dann ist $\prod_{i=1}^{r}$ r-dimensional, dagegen $\sum_{i=1}^{r} U_i$ ebenfalls eindimensional.

10.2 Satz (Charakteristisierung des direkten Produktes)

Es seien $V_1, \ldots, V_r$ K-Vektorräume mit

$$V = \prod_{i=1}^{r} V_i.$$

Ein K-Vektorraum W ist genau dann zu V isomorph, wenn es $\varphi_i \in \mathrm{Hom}\,(W, V_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ gibt mit der Eigenschaft, daß für jeden K-Vektorraum X und beliebige $\psi_i \in \mathrm{Hom}\,(X, V_i)$ $(1 \leq i \leq r)$

genau eine lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(X,\, W)$ mit $\varphi_i \circ \varphi = \psi_i$ $(1 \leq i \leq r)$ existiert. Die φ_i sind dann überdies surjektiv $(1 \leq i \leq r)$.

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
X \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V_i \\
 & W \arrow[uu, dashed, "\tau"] \arrow[ur, "\varphi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis:

I

Es sei W zu V isomorph, $\tau \in \mathrm{Hom}\,(W,\, V)$ ein Isomorphismus.
Zur Gewinnung der φ_i (und von φ) konstruiere zunächst $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} \;:\; X \longrightarrow V \;:\; \underline{x} \longmapsto (\psi_1(\,\underline{x}), \ldots, \psi_r(\,\underline{x})).$$

Zunächst ist $\tilde{\varphi}$ linear.
$\tilde{\varphi}$ ist eindeutig bestimmt, da ja die Werte in V für jedes $\underline{x} \in X$ vorgeschrieben sind.
Hieraus gewinnen wir φ_i, φ mittels τ: $\varphi = \tau^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, $\varphi_i = \pi_i \circ \tau$ $(1 \leq i \leq r)$.
Diese sind als Hintereinanderausführung linearer Abbildungen wieder linear.
$\psi_i = \varphi_i \circ \varphi$ ist erfüllt.
φ_i ist als Hintereinanderausführung von surjektiven Abbildungen surjektiv.
φ ist wegen $\tilde{\varphi} = \tau \circ \varphi$ eindeutig bestimmt.

II

Es sei W ein K-Vektorraum, $\varphi_i \in \mathrm{Hom}\,(W,\, V_i)$ mit:
$\forall$ Vektorräume X,
$\forall$ Homomorphismen $\psi_i \in \mathrm{Hom}\,(X,\, V_i)$,
$\dot{\exists}\; \varphi \in \mathrm{Hom}\,(X,\, W)$

$$\psi_i = \varphi_i \circ \varphi \quad (1 \leq i \leq r).$$

Es ist zu zeigen: $W \cong V$.

(i) Für $X = V$, $\psi_i = \pi_i$ $(1 \leq i \leq r)$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$\tau \;:\; V \longrightarrow W \text{ mit } \varphi_i \circ \tau = \pi_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

(ii) Teil I des Satzes liefert (für $V \cong V$) eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\psi \;:\; W \longrightarrow V \text{ mit } \pi_i \circ \psi = \varphi_i$$

$(X = W,\; \psi_i = \varphi_i)$.

(iii) Teil I des Satzes $(X = V,\; \psi_i = \pi_i)$ liefert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varepsilon \;:\; V \longrightarrow V \text{ mit } \pi_i \circ \varepsilon = \pi_i.$$

Wir wissen, daß dies auch von id_V geleistet wird, folglich muß $\varepsilon = \mathrm{id}_V$ sein.

(iv) Für $X = W$, $\psi_i = \varphi_i$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$\sigma \;:\; W \longrightarrow W \text{ mit } \varphi_i \circ \sigma = \varphi_i.$$

Dies wird auch durch id_W geleistet, also gilt $\sigma = \mathrm{id}_W$.

Insgesamt folgt aus (i) und (ii):

$$\begin{aligned} \pi_i = \varphi_i \circ \tau = \pi_i \circ (\psi \circ \tau) \quad (1 \le i \le r), \\ \varphi_i = \pi_i \circ \psi = \varphi_i \circ (\tau \circ \psi) \quad (1 \le i \le r). \end{aligned}$$

(Hierbei wurde (i) in (ii) eingesetzt bzw. umgekehrt.)
Nach (iii) und (iv) folgt:

$$\begin{aligned} \psi \circ \tau &= \mathrm{id}_V, \\ \tau \circ \psi &= \mathrm{id}_W\,. \end{aligned}$$

Beachte dazu den allgemeinen Sachverhalt: Für beliebige Abbildungen $\tau : V \to W$ und $\psi : W \to V$ mit

(1) $\psi \circ \tau = \mathrm{id}_V$,

(2) $\tau \circ \psi = \mathrm{id}_W$

folgt τ injektiv wegen (1), τ surjektiv wegen (2), also τ bijektiv mit $\tau^{-1} = \psi$.

τ ist also der behauptete Isomorphismus zwischen V und W.

□

10.3 Satz

$$\mathrm{Hom}\left(X, \prod_{i=1}^{r} V_i\right) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}\,(X,\, V_i)$$

Beweis:
Mittels (10.2) in der Rollenverteilung:

$$\begin{aligned} V_i &= \mathrm{Hom}\,(X,\, V_i) \quad (1 \le i \le r), \\ V &= \prod_{i=1}^{r} V_i, \\ W &= \mathrm{Hom}\left(X, \prod_{i=1}^{r} V_i\right). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: W erfüllt die Voraussetzungen von (10.2).

Die Abbildungen $\varphi_i : W \to V_i$ ergaben sich in natürlicher Weise wie folgt:

Ist $\sigma \in \mathrm{Hom}\left(X, \prod_{i=1}^{r} V_i\right)$ mit

$$\sigma\,(\underline{x}) = (\,\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r) \quad (\underline{x} \in X,\ \underline{x}_i \in V_i),$$

so definieren wir $\sigma_i \in \mathrm{Hom}\,(X,\, V_i)$ mittels $\sigma = \pi_i \circ \sigma$.
Damit wird

$$\varphi_i \,:\, W \longrightarrow V_i \,:\, \sigma \longmapsto \pi_i \circ \sigma.$$

Sei nun Z ein K-Vektorraum mit linearer Abbildung

$$\psi_i \,:\, Z \longrightarrow V_i \quad (1 \le i \le r).$$

Definiere

$$\varphi \,:\, Z \longrightarrow W \,:\, \underline{z} \longmapsto (\psi_1(\,\underline{z}), \ldots, \psi_r(\,\underline{z})) \quad (\in W\,!)$$

Zu zeigen bleibt:

(i) φ ist linear,

(ii) $\varphi_i \circ \varphi = \psi_i$ $(1 \leq i \leq r)$,

(iii) φ ist eindeutig.

(ii) ist nach Konstruktion erfüllt!
Dies liefert auch die Eindeutigkeit von φ, da die Bilder gemäß (ii) vorgegeben sind.
Zur Linearität:
Es seien $\lambda,\ \tilde{\lambda} \in K,\ \underline{z},\ \underline{\tilde{z}} \in Z$ vorgegeben. Dafür wird:

$$\begin{aligned}
\varphi\,(\lambda\,\underline{z} + \tilde{\lambda}\,\underline{\tilde{z}}) &= (\psi_1(\lambda\,\underline{z} + \tilde{\lambda}\,\underline{\tilde{z}}), \ldots, \psi_r(\lambda\,\underline{z} + \tilde{\lambda}\,\underline{\tilde{z}})) \\
&= (\lambda\,\psi_1(\,\underline{z}) + \tilde{\lambda}\,\psi_1(\,\underline{\tilde{z}}), \ldots, \lambda\,\psi_r(\,\underline{z}) + \tilde{\lambda}\,\psi_r(\,\underline{\tilde{z}})) \\
&= (\lambda\,\psi_1(\,\underline{z}), \ldots, \lambda\,\psi_r(\,\underline{z})) + (\tilde{\lambda}\,\psi_1(\,\underline{\tilde{z}}), \ldots, \tilde{\lambda}\,\psi_r(\,\underline{\tilde{z}})) \\
&= \lambda\,(\psi_1(\,\underline{z}), \ldots, \psi_r(\,\underline{z})) + \tilde{\lambda}\,(\psi_1(\,\underline{\tilde{z}}), \ldots, \psi_r(\,\underline{\tilde{z}})) \\
&= \lambda\,\varphi\,(\,\underline{z}) + \tilde{\lambda}\,\varphi\,(\,\underline{\tilde{z}}).
\end{aligned}$$

Damit erfüllt W die Vorraussetzungen von (10.2) und ist folglich zu V isomorph.

□

10.4 Definition

Es seien $V_1, \ldots, V_r, W$ K-Vektorräume.

$$\Phi\,:\,V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow W$$

heißt <u>multilineare Abbbildung</u>, falls Φ in jedem Argument linear ist, d.h.

$$\begin{aligned}
\Phi\,(\,\underline{v}_1, \ldots, \lambda\,\underline{v}_i + \tilde{\lambda}\,\underline{\tilde{v}}_i, \ldots, \,\underline{v}_r) &= \lambda\,\Phi\,(\,\underline{v}_1, \ldots, \,\underline{v}_r) + \tilde{\lambda}\,\Phi\,(\,\underline{v}_1, \ldots, \,\underline{\tilde{v}}_i, \ldots, \,\underline{v}_r) \\
&\quad \forall \lambda,\ \tilde{\lambda} \in K,\ \underline{v}_i,\ \underline{\tilde{v}}_i \in V,\ 1 \leq i \leq r.
\end{aligned}$$

Wie im Fall $r = 1$ bilden die multilinearen Abbildungen dann bzgl. Addition und skalarer Multiplikation einen K-Vektorraum $\operatorname{Hom}(V_1, \ldots, V_r;\, W)$. Man sagt auch, Φ sei <u>r-fach linear</u>; für $W = K$ heißt Φ r-fache <u>Linearform</u>.

<u>Beispiele:</u>

(i) Determinanten: $r = n = \dim V,\ V_i = V,\ W = K$;

(ii) Bilinearformen.

10.5 Satz

Zu K-Vektorräumen $V_1, \ldots, V_r$ gibt es einen — bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten — K-Vektorraum V und eine multilineare Abbildung $f\,:\,V_1 \times \ldots \times V_r \to V$, so daß zu jeder multilinearen Abbildung $g \in \operatorname{Hom}(V_1, \ldots, V_r;\, W)$ genau eine Abbildung $h \in \operatorname{Hom}(V,\, W)$ mit $g = h \circ f$ existiert.

<u>Beweis:</u>

I
Eindeutigkeit von V bis auf Isomorphie.
Annahme: $V,\ \tilde{V}$ leisten beide das Gewünschte:

$$\begin{aligned}
f &: V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow V, \\
\tilde{f} &: V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow \tilde{V}.
\end{aligned}$$

Hierfür existieren eindeutig bestimmte lineare Abbildungen

$$h\,:\,V \longrightarrow \tilde{V}, \quad \tilde{h}\,:\,\tilde{V} \longrightarrow V$$

mit

$$\begin{array}{rclcrcl} \tilde{f} & = & h \circ f & \qquad & f & = & \tilde{h} \circ \tilde{f} \\ & = & (h \circ \tilde{h}) \circ f & & & = & (\tilde{h} \circ h) \circ f, \end{array}$$

also

$$h \circ \tilde{h} = \mathrm{id}_{\tilde{V}} \qquad \tilde{h} \circ h = \mathrm{id}_V$$

wegen der Eindeutigkeit der linearen Abbildung aus dem Satz. Wie in (10.2) (Beweisende) erhält man h, $\tilde{h}$ bijektiv, $\tilde{h} = h^{-1}$, h ist V Isomorphismus.

II
Existenz von V.
Setze $U = V_1 \times \ldots \times V_r$ und

$$X = \left\{ \sum_{\underline{u} \in U} \lambda_{\underline{u}}\, \underline{u} \;\middle|\; \lambda_{\underline{u}} \in K,\ \text{nur endlich viele } \lambda_{\underline{u}} \neq \underline{0} \right\}.$$

X wird mittels

$$\sum_{\underline{u} \in U} \lambda_{\underline{u}}\, \underline{u} = \sum_{\underline{u} \in U} \mu_{\underline{u}}\, \underline{u} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{\underline{u}} = \mu_{\underline{u}}\ \forall\, \underline{u} \in U,$$

$$\begin{array}{rcl} + : X \times X \longrightarrow X & : & \left(\sum_{\underline{u} \in U} \lambda_{\underline{u}}\, \underline{u}, \sum_{\underline{u} \in U} \chi_{\underline{u}}\, \underline{u} \right) \longmapsto \sum_{\underline{u} \in U} (\lambda_{\underline{u}} + \chi_{\underline{u}})\, \underline{u}, \\ \cdot : K \times X \longrightarrow X & : & \left(\lambda, \sum_{\underline{u} \in U} \lambda_{\underline{u}}\, \underline{u} \right) \longmapsto \sum_{\underline{u} \in U} (\lambda\, \lambda_{\underline{u}})\, \underline{u} \end{array}$$

zu einem K-Vektorraum mit neutralen Element

$$\underline{0} = \sum_{\underline{u} \in U} 0\, \underline{u}.$$

Beachte:
$\underline{u} \longmapsto 1\, \underline{u}$ ist injektive Abbildung von U nach X. Diese Abbildung ist nicht linear, da wir in X die Vektoren $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_r)$, $(\tilde{\underline{u}}_1, \ldots, \tilde{\underline{u}}_r)$ <u>nicht</u> zu $(\underline{u}_1 + \tilde{\underline{u}}_1, \ldots, \underline{u}_r + \tilde{\underline{u}}_r)$ addieren können.
Y bezeichne denjenigen Unterraum von X, der von allen Elementen der Form

$$(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \tilde{\underline{v}}_i, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_r) - (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) - (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \tilde{\underline{v}}_i, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_r),$$

$$(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \lambda\, \underline{v}_i, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_r) - \lambda\, (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \quad (1 \le i \le r)$$

aufgespannt wird. Hierzu betrachten wir den kanonischen Epimorphismus:

$$\varphi : \longrightarrow X/Y \ : \ \underline{x} \longmapsto \underline{x} + Y.$$

Setze $V := X/Y$ sowie $f = \varphi \circ \iota$ für ι:

$$\begin{array}{l} \iota : U \longrightarrow X \ : \ (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \longmapsto 1 \cdot (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \\ \varphi : X \longrightarrow X/Y \ : \ \underline{x} \longmapsto \underline{x} + Y \quad \text{kanonischer Epimorphismus.} \end{array}$$

Dann ist f multilinear als direkte Konsequenz der Definition von Y.
Existenz von h:
Zu beliebigem $g \in \mathrm{Hom}\,(V_1, \ldots, V_r;\, W)$ definieren wir $\tilde{h} : X \to W$ mittels

$$\tilde{h}(\iota \cdot (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r)) = g(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r)$$

und linearer Fortsetzung. Damit ist $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}\,(X,\, W)$ mit $g = \tilde{h} \circ \iota$. Da g multilinear ist, folgt $\tilde{h}|_Y = \mathcal{O}$.
Definiere folglich:

$$h : V = X/Y \longrightarrow W \ : \ \underline{x} + Y \longmapsto \tilde{h}(\underline{x}).$$

h ist wohldefiniert, wegen $\tilde{h}|_Y = \mathcal{O}$
h ist linear:

$$\begin{aligned} h(\alpha\,\underline{x} + Y + \underline{\tilde{x}} + Y) &= h((\alpha\,\underline{x} + \underline{\tilde{x}}) + Y) \\ &= \tilde{h}(\alpha\,\underline{x} + \underline{\tilde{x}}) \\ &= \tilde{h}(\alpha\,\underline{x}) + \tilde{h}(\underline{\tilde{x}}) \\ &= \alpha\, h(\underline{x} + Y) + h(\underline{\tilde{x}} + Y) \\ & \quad \forall \alpha \in K \ \forall\, \underline{x},\, \underline{\tilde{x}} \in X. \end{aligned}$$

Ferner ist $g = h \circ f$ wegen:

$$\begin{aligned} h \circ f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_r) &= (h \circ \varphi)\,\iota\,(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r) \\ &= h(\iota \cdot (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r) + Y) \\ &= \tilde{h}(\iota \cdot (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r)) \\ &= g(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r). \end{aligned}$$

h ist eindeutig, weil die Werte von h auf einem Erzeugendensystem von V vorgegeben sind:

$$\begin{aligned} h(\iota \cdot (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r) + Y) &= \tilde{h}(\iota \cdot (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r)) \\ &= g(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r). \end{aligned}$$

□

<u>Beispiel:</u>
$r = 2,\ V_1 = \mathbb{F}_2 = \{\underline{0},\, \underline{1}\},\ V_2 = \mathbb{F}_2^2 = \{\overline{\underline{0}},\, \overline{\underline{1}},\, \overline{\underline{2}},\, \overline{\underline{3}}\}$
mit $\overline{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{\underline{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{\underline{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
$V_1 \times V_2$ hat 8 Elemente $(\underline{i},\, \overline{\underline{j}})$ mit $i \in \{0, 1\},\ j \in \{0, 1, 2, 3\}$.
X hat dann $2^8 = 256$ Elemente, nämlich

$$\alpha_1(\underline{0},\, \overline{\underline{0}}) + \alpha_2(\underline{0},\, \overline{\underline{1}}) + \alpha_3(\underline{0},\, \overline{\underline{2}}) + \alpha_4(\underline{0},\, \overline{\underline{3}}) + \alpha_5(\underline{1},\, \overline{\underline{0}}) + \alpha_6(\underline{1},\, \overline{\underline{1}}) + \alpha_7(\underline{1},\, \overline{\underline{2}}) + \alpha_8(\underline{1},\, \overline{\underline{3}})$$

mit $\alpha_i \in \{0, 1\}\ (1 \le i \le 8)$.
Berechnung von Y ($\dim Y = 6\,!$):

$$1 \cdot (\lambda\,\underline{x},\, \underline{y}) - \lambda\,(\underline{x},\, \underline{y}) \quad (\underline{x} \in V_1,\ \underline{y} \in V_2,\ \lambda = 0, 1).$$

Für $\lambda = 1$ erhält man $\underline{0} \in X$.
$\lambda = 0$:

$$1 \cdot (\underline{0},\, \underline{y}) - 0 \cdot (\underline{x},\, \underline{y}) = 1 \cdot (\underline{0},\, \underline{y}),$$

$$Y \ni \{1 \cdot (\underline{0},\, \overline{\underline{0}}), 1 \cdot (\underline{0},\, \overline{\underline{1}}), 1 \cdot (\underline{0},\, \overline{\underline{2}}), 1 \cdot (\underline{0},\, \overline{\underline{3}})\};$$

analog für λ in der 2. Komponenten:

$$Y \ni\ 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{\underline{0}}) = 1 \cdot (\underline{1}, 0 \cdot\, \overline{\underline{1}}) - 0 \cdot (\underline{1},\, \overline{\underline{1}})$$

$(1 \cdot (\underline{x},\, \underline{y}) \in X$ entspricht $(\underline{x},\, \underline{y}) \in U)$;

$$1 \cdot (\underline{x} + \underline{\tilde{x}},\, \underline{y}) - 1 \cdot (\underline{\tilde{x}},\, \underline{y}),$$

$\underline{x} = \underline{\tilde{x}}$:

$$1 \cdot (\underline{0},\, \underline{y}) \underbrace{-1 \cdot (\underline{x},\, \underline{y}) - 1 \cdot (\underline{\tilde{x}},\, \underline{y})}_{\underline{0} \text{ in } X}$$

liefert wegen $2 = 0$ nichts Neues;
$\underline{x} \neq \underline{\tilde{x}}$:
O.B.d.A. $\underline{x} = \underline{0},\ \underline{\tilde{x}} = \underline{1}$

$$1 \cdot (\underline{0} + \underline{1},\, \underline{y}) - 1 \cdot (\underline{0},\, \underline{y}) - 1 \cdot (\underline{1},\, \underline{y}) = 1 \cdot (\underline{0},\, \underline{y})$$

wie gehabt.

Schließlich:

$$1 \cdot (\underline{x},\, \underline{y} + \underline{\tilde{y}}) - 1 \cdot (\underline{x},\, \underline{y}) - 1 \cdot (\underline{x},\, \underline{\tilde{y}});$$

$\underline{x} = \underline{0}$ liefert nichts Neues,
$\underline{x} = \underline{1}$ und $\underline{y} = \underline{\tilde{y}}$:

$$1 \cdot (\underline{1},\, \overline{0}) - 1 \cdot (\underline{1},\, \underline{y}) - 1 \cdot (\underline{1},\, \underline{y}) = 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{0}) \ \in Y$$

wurde bereits erkannt,
$\underline{y} = \underline{0}$ (bzw. $\underline{\tilde{y}}$) dito.

$$\underline{y} \neq \underline{\tilde{y}} \begin{cases} \underline{y} = \overline{1} & \underline{\tilde{y}} \in \{\overline{2}, \overline{3}\} \\ \underline{y} = \overline{2} & \underline{\tilde{y}} = \overline{3} \end{cases}$$

liefert stets

$$1 \cdot (\underline{1},\, \overline{1}) + 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{2}) + 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{2}).$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$Y = [1 \cdot (\underline{0},\, \overline{0}),\, 1 \cdot (\underline{0},\, \overline{1}),\, 1 \cdot (\underline{0},\, \overline{2}),\, 1 \cdot (\underline{0},\, \overline{3}),\, 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{0}),\, 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{1}) + 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{2}) + 1 \cdot (\underline{1},\, \overline{3})]$$

Es folgt $V = X/Y$ hat die Dimension 2 (d.h. 4 Elemente).
Eine Basis von V ist etwa

$$1 \cdot (\underline{1},\, \underline{1}) + Y, \quad 1 \cdot (\underline{1},\, \underline{3}) + Y.$$

10.6 Definition

Der in (10.5) konstruierte Vektorraum V heißt Tensorprodukt $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ von $V_1, \ldots, V_r$. Für $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \in \prod_{i=1}^{r} V_i$ schreibt man

$$\begin{aligned} f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) &= \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r \quad (= 1 \cdot (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) + Y) \\ &= \underline{v}_1 \otimes_K \ldots \otimes_K \underline{v}_r \quad \text{(falls wichtig, siehe (10.14))}. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von V gilt:

$$\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \lambda (\underline{v}_i + \underline{\tilde{v}}_i) \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r = \lambda \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r + \lambda \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{\tilde{v}}_i \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r.$$

10.7 Hilfssatz

Es gibt genau einen Isomorphismus

$$\psi \,:\, (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

mit

$$\psi((\underline{x} \otimes \underline{y}) \otimes \underline{z}) = \underline{x} \otimes (\underline{y} \otimes \underline{z}).$$

Beweis:
Die Eindeutigkeit von ψ ergibt sich daraus, daß die Werte von ψ auf einem Erzeugendensystem von $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ vorgeschrieben werden.

Existenz:
Setze $W = V_1 \otimes V_2$. Dann ist die Abbildung

$$g \,:\, V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \,:\, (\underline{x},\, \underline{y},\, \underline{z}) \longrightarrow (\underline{x} \otimes \underline{y}) \otimes \underline{z}$$

3-fach linear. Nach (10.5) entspricht ihr eine lineare Abbildung

$$h_3 \,:\, V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \longrightarrow W \otimes V_3$$

mit

$$\begin{aligned} h_3(\,\underline{x}_1\otimes\,\underline{y}\otimes\,\underline{z}) \quad &= \quad (\,\underline{x}\otimes\,\underline{y})\otimes\,\underline{z} \\ (\overset{!}{=} \quad & g(\,\underline{x},\,\underline{y},\,\underline{z})). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & V_1\otimes V_2 \arrow[d, equal] \\
V_1\times V_2\times V_3 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\text{nach (10.5)}\ f_3"'] & & W\otimes V_3 \arrow[dl, shift left, "\tilde H"] \\
 & V_1\otimes V_2\otimes V_3 \arrow[ur, shift left, "h_3"] & \\
V_1\times V_2 \arrow[ur, "g_{\underline{z}}"'] \arrow[dr, "f_{\underline{z}}"'] & & \\
 & & W\times V_3 \arrow[ul, "H"'] \arrow[uuu, "\tilde f_2"'] \\
 & V_1\otimes V_2 \arrow[uuu, "h_{\underline{z}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Bei festem $\underline{z}\in V_3$ definiert

$$g_{\,\underline{z}}\;:\;V_1\times V_2\longrightarrow V_1\otimes V_2\otimes V_3\;:\;(\,\underline{x},\,\underline{y})\longmapsto\,\underline{x}\otimes\,\underline{y}\otimes\,\underline{z}$$

eine bilineare Abbildung, und nach (10.5) existiert hierzu eine lineare Abbildung

$$h_{\,\underline{z}}\;:\;V_1\otimes V_2\longrightarrow V_1\otimes V_2\otimes V_3\;:\;\underline{x}\otimes\,\underline{y}\longmapsto\,\underline{x}\otimes\,\underline{y}\otimes\,\underline{z}.$$

Für $h_{\,\underline{z}}$ gilt nach Konstruktion

$$h_{\,\underline{z}}+h_{\,\underline{\tilde z}}=h_{\,\underline{z}+\,\underline{\tilde z}},\quad h_{\lambda\,\underline{z}}=\lambda\,h_{\,\underline{z}}.$$

Zu der bilinearen Abbildung

$$H\;:\;W\times V_3\longrightarrow V_1\otimes V_2\otimes V_3\;:\;(\,\underline{v}_1\otimes\,\underline{v}_2,\,\underline{v}_3)\longmapsto\,\underline{v}_1\otimes\,\underline{v}_2\otimes v_3$$

gehört nach (10.5) wiederum eine lineare Abblidung

$$\tilde H\;:\;W\otimes V_3\longrightarrow V_1\otimes V_2\otimes V_3\;:\;(\,\underline{v}_1\otimes\,\underline{v}_2)\otimes\,\underline{v}_3\longmapsto\,\underline{v}_1\otimes\,\underline{v}_2\otimes v_3.$$

Nach Konstruktion ist nun

$$\tilde H\circ h_3=\mathrm{id}_{V_1\otimes V_2\otimes V_3},\quad h_3\circ\tilde H=\mathrm{id}_{W\otimes V_3},$$

also $\tilde H^{-1}=h_3$ bzw.

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\cong V_1\otimes V_2\otimes V_3.$$

Analog erfolgt Konstruktion eines Isomorphismus

$$V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\cong V_1\otimes V_2\otimes V_3.$$

Beide zusammen liefern dann die Behauptung.

□

10.8 Hilfssatz

Es gibt genau einen Isomorphismus

$$\psi\;:\;V_1\otimes V_2\longrightarrow V_2\otimes V_1\text{ mit }\psi\,(\,\underline{x}\otimes\,\underline{y})=\,\underline{y}\otimes\,\underline{x}.$$

<u>Beweis:</u> Übungen.

Tensorprodukt bei Abbildungen

Gegeben seien Vektorräume V_i, W_i $(1 \leq i \leq r)$, sowie $\varphi_i \in \mathrm{Hom}\,(V_i, W_i)$. Hierzu gehört multilineare Abbildung

$$\varphi := \prod_{i=1}^{r} \varphi_i \in \mathrm{Hom}\,(V_1 \times \ldots \times V_r;\, W_1 \times \ldots \times W_r)$$

mittels

$$\varphi\,(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) = (\varphi_1(\underline{v}_1), \ldots, \varphi_r(\underline{v}_r)).$$

Zum Tensorprodukt $W_1 \otimes \ldots \otimes W_r$ gehört gemäß (10.5) Abbildung f, und damit erhält man multilineare Abbildung

$$f \circ \varphi\,:\; V_1 \times \ldots \times V_r \longrightarrow W_1 \otimes \ldots \otimes W_r.$$

Hierzu existiert nach (10.5) eine lineare Abbildung

$$T(\varphi)\,:\; V_1 \otimes \ldots \otimes V_r \longrightarrow W_1 \otimes \ldots \otimes W_r$$

mit

$$T(\varphi)\,(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r) = (\varphi_1(\underline{v}_1)) \otimes \ldots \otimes (\varphi_r(\underline{v}_r)).$$

Bemerkung:
$T(\varphi) = T(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ heißt tensorielles Produkt der Abbildungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$.
Schreibweise manchmal: $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_r$. Strengenommen ist dies inkorrekt. Denn

$$T(\varphi) \in \mathrm{Hom}\,(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r;\, W_1 \otimes \ldots \otimes W_r),$$

wohingegen

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_r \in \mathrm{Hom}\,(V_1, W_1) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Hom}\,(V_r, W_r)$$

ist. Es gibt jedoch einen Monomorphismus

$$\mathrm{Hom}\,(V_1, W_1) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Hom}\,(V_r, W_r) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r;\, W_1 \otimes \ldots \otimes W_r)$$

mit

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_r \longmapsto T\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$$

(ohne Beweis). Vergleiche (10.13) in endlich dimensionalen Fall.

10.8.1 Eigenschaften von $T\,(\varphi)$

(i) $T\,(\mathrm{id}_{V_1}, \ldots, \mathrm{id}_{V_r}) = \mathrm{id}_{V_1 \otimes \ldots \otimes V_r}$.

(ii) Für $\psi_i \in \mathrm{Hom}\,(U_i, V_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ und $\sigma_i = \varphi_i \circ \psi_i$ gilt dann

$$T\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = T\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \circ T\,(\psi_1, \ldots, \psi_r).$$

(iii)

$$T\,:\; \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}\,(V_i, W_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^{r} V_i; \bigotimes_{i=1}^{r} W_i\right)$$

ist selbst multilinear.

$$T\,(\varphi_1, \ldots, \lambda\,\varphi_i + \tilde{\lambda}\,\tilde{\varphi}_i, \ldots \varphi_r)\,(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r)$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_1(\underline{v}_1) \otimes \ldots \otimes (\lambda\,\varphi_i + \tilde{\lambda}\,\tilde{\varphi}_i)\,(\underline{v}_i) \otimes \ldots \otimes \varphi_r(\underline{v}_r) \\
&= \lambda\,\varphi_1(\underline{v}_1) \otimes \ldots \otimes \varphi_r(\underline{v}_r) + \tilde{\lambda}\,\varphi_1(\underline{v}_1) \otimes \ldots \otimes \tilde{\varphi}_i(\underline{v}_i) \otimes \ldots \otimes \varphi_r(\underline{v}_r) \\
&= \lambda\,T\,(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r) + \tilde{\lambda}\,T\,(\varphi_1, \ldots, \tilde{\varphi}_i, \ldots, \varphi_r)\,(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r) \\
&= (\lambda\,T\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) + \tilde{\lambda}\,T\,(\varphi_1, \ldots, \tilde{\varphi}_i, \ldots, \varphi_r))\,(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r).
\end{aligned}$$

Da $T\,(\varphi)$ linear war, genügt der Nachweis für die Werte auf einem Erzeugendensystem.

10.9 Satz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\,(U,\, \mathrm{Hom}\,(V,\, W)) &\cong \mathrm{Hom}\,(U,\, V;\, W) \\ &\cong \mathrm{Hom}\,(U \otimes V,\, W). \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u>

(i) Gemäß

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & U \otimes V \arrow[dl, "h"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

nach (10.5)

setzt man an

$$\Phi \;:\; \mathrm{Hom}\,(U,\, V;\, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(U \otimes V,\, W) \;:\; g \longmapsto h.$$

h ist dabei durch die Werte von g auf den Paaren $(\,\underline{u},\, \underline{v})$ festgelegt, da die Elemente $\underline{u} \otimes \underline{v}$ ja $U \otimes V$ aufspannen.

Φ ist linear: $\lambda\, g + \mu\, \tilde{g}$ entspricht $\lambda\, h + \mu\, \tilde{h}$.

Φ ist injektiv: $h = 0 \;\Rightarrow\; g(\,\underline{u},\, \underline{v}) = \underline{o}$ für zugehöriges g und <u>alle</u> $(\,\underline{u},\, \underline{v}) \in U \times V \;\Rightarrow\; g = 0$.

Φ ist surjektiv:

Zu jedem $h \in \mathrm{Hom}\,(V \otimes V,\, W)$ bilde $g = h \circ f$, dies ist bilineare Abbildung von $U \times V$ nach W.

(ii)

$$\psi \;:\; \mathrm{Hom}\,(U,\, V;\, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(U,\, \mathrm{Hom}\,(V,\, W)) \;:\; B \longmapsto \psi\,(B)$$

mit $\psi\,(B)\,(\,\underline{u}) = B\,(\,\underline{u},\;\;)$

ψ ist linear:

$$\begin{aligned} \psi\,(\lambda\, B + \mu\, \tilde{B})\,(\,\underline{u}) &= (\lambda\, B + \mu\, \tilde{B})\,(\,\underline{u},\;\;) \\ &= \lambda\, B\,(\,\underline{u},\;\;) + \mu\, \tilde{B}\,(\,\underline{u},\;\;) \\ &= \lambda\, \psi\,(B)\,(\,\underline{u}) + \mu\, \psi\,(\tilde{B})\,(\,\underline{u}) \\ &= (\lambda\, \psi\,(B) + \mu\, \psi\,(\tilde{B}))\,(\,\underline{u}) \quad \forall\, \underline{u} \in U. \end{aligned}$$

Andererseits bilde

$$\varphi \;:\; \mathrm{Hom}\,(U,\, \mathrm{Hom}\,(V,\, W)) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(U,\, V;\, W) \;:\; F \longmapsto \varphi\,(F)$$

Für $\underline{u} \in U$ ist $F(\,\underline{u}) \in \mathrm{Hom}\,(V,\, W)$ und wir erklären $\varphi\,(F)$ durch

$$\varphi\,(F)\,(\,\underline{u},\, \underline{v}) := F(\,\underline{u})\,(\,\underline{v}).$$

$\varphi\,(F)$ ist bilinear:

$$\begin{aligned} \varphi\,(F)\,(\lambda\, \underline{u} + \mu\, \underline{\tilde{u}},\, \underline{v}) &= F\,(\lambda\, \underline{u} + \mu\, \underline{\tilde{u}})\,[\,\underline{v}] \\ &\overset{F \text{ linear}}{=} (\lambda\, F(\,\underline{u}) + \mu\, F(\,\underline{\tilde{u}}))\,(\,\underline{v}) \\ &= \lambda\, F(\,\underline{u})\,(\,\underline{v}) + \mu\, F(\,\underline{\tilde{u}})\,(\,\underline{v}) \\ &= \lambda\, \varphi\,(F)\,(\,\underline{u},\, \underline{v}) + \mu\, \varphi\,(F)\,(\,\underline{\tilde{u}},\, \underline{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\,(F)\,(\,\underline{u},\, \lambda\, \underline{v} + \mu\, \underline{\tilde{v}}) &= F(\,\underline{u})\,(\lambda\, \underline{v} + \mu\, \underline{\tilde{v}}) \\ &\overset{F(\,\underline{u}) \text{ linear}}{=} \lambda\, F(\,\underline{u})\,(\,\underline{v}) + \mu\, F(\,\underline{u})\,(\,\underline{\tilde{v}}) \\ &= \lambda\, \varphi\,(F)\,(\,\underline{u},\, \underline{v}) + \mu\, \varphi\,(F)\,(\,\underline{u},\, \underline{\tilde{v}}) \\ & \quad \forall \lambda,\, \mu \in K \;\; \forall\, \underline{u},\, \underline{\tilde{u}} \in U \;\; \forall\, \underline{v},\, \underline{\tilde{v}} \in V. \end{aligned}$$

$$\psi(B) : U \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W) : \underline{u} \longmapsto B(\underline{u}, \ )$$

und

$$\varphi(F) : U \times V \longrightarrow W : (\underline{u}, \underline{v}) \longmapsto F(\underline{u})(\underline{v})$$

leisten

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi &= \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V,W))} \quad \text{und} \\ \varphi \circ \psi &= \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}(U, V; W)} \, . \end{aligned}$$

Wie früher ist also ψ bijektiv mit $\varphi = \psi^{-1}$.

□

Bemerkung:
Ist V eindimensional, $V = K\,\underline{v}$, so gilt:

$$\forall\, \underline{u} \in U : \ \underline{u} \otimes \underline{v} = \underline{0} \iff \underline{u} = \underline{0} \, .$$

Beweis:
Ist $\underline{u} = \underline{0}$, so ist

$$\begin{aligned} \underline{u} \otimes \underline{v} &= (\underline{u} + \underline{u}) \otimes \underline{v} \\ &= \underline{u} \otimes \underline{v} + \underline{u} \otimes \underline{v}, \end{aligned}$$

also $\underline{u} \otimes \underline{v} = \underline{0} \in U \otimes V$.
Für jedes $\underline{w} \in U \otimes V$ ist $\underline{w}$ Linearkombination von Elementen der Form $\underline{u} \otimes \underline{\tilde{v}}$ mit $\underline{u} \in U$, $\underline{\tilde{v}} \in V$ etwa

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \sum_{i=1}^{r} \underline{u}_i \otimes \underline{v}_i \qquad (\underline{v}_i = \lambda_i\, \underline{v}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \underline{u}_i \otimes \lambda_i\, \underline{v} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, (\underline{u}_i \otimes \underline{v}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, \underline{u}_i \right) \otimes \underline{v} \\ &= \underline{u}_{\underline{w}} \otimes \underline{v} \quad \text{für passendes } \underline{u}_{\underline{w}} \in U. \end{aligned}$$

Betrachte bilineare Abbildung

$$g : U \times V \longrightarrow U : \underline{u}_{\underline{w}} \otimes \underline{v} \longmapsto \underline{u}_{\underline{w}}.$$

Nach (10.5) existiert hierzu eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$h : U \otimes V \longrightarrow U : \underline{u}_{\underline{w}} \otimes \underline{v} \longmapsto \underline{u}_{\underline{w}}.$$

Ferner ist

$$\tau : U \longrightarrow U \otimes V : \underline{u} \longmapsto \underline{u} \otimes \underline{v}$$

eine lineare Abbildung mit $\tau = h^{-1}$, also $U \cong U \otimes V$. Damit läßt sich jedes Element aus $U \otimes V$ <u>eindeutig</u> in der Form $\underline{u}_{\underline{w}} \otimes \underline{v}$ schreiben.
h bijektiv $\Rightarrow$ $(\underline{u} \otimes \underline{v} = \underline{0} \ \Rightarrow\ \underline{u} = \underline{0})$.

10.10 Hilfssatz

Für $V = \prod_{i=1}^{r} V_i$ gilt:

$$U \otimes V \cong \prod_{i=1}^{r} U \otimes V_i$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & U \otimes V \arrow[dl, "h"] \\ & W = \prod_{i=1}^{r} U \otimes V_i & \end{tikzcd}$$

Setze g an mittels

$$g(\underline{u}, (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r)) = (u \otimes \underline{v}_1, \ldots, \underline{u} \otimes \underline{v}_r);$$

g ist bilinear, da das Tensorprodukt in beiden Argumenten linear ist.
Das ermöglicht den Ansatz:

$$h : U \otimes V \longrightarrow W = \prod_{i=1}^{r} U \otimes V_i \;:\; \underline{u} \otimes (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \longmapsto (\underline{u} \otimes \underline{v}_1, \ldots, \underline{u} \otimes \underline{v}_r)$$

(h ist die zu g nach (10.5) gehörige lineare Abbildung).
h ist surjektiv, denn die erzeugenden Elemente von $\prod_{i=1}^{r} U \otimes V_i$ sind von der Form

$$(\underline{u}_1 \otimes \underline{v}_1, \ldots, \underline{u}_r \otimes \underline{v}_r),$$

besitzen demnach als Urbilder etwa

$$\sum_{i=1}^{r} \underline{u}_i \otimes \varepsilon_i\,(\underline{v}_i)$$

(vergleiche Bemerkung nach (10.1) zur Definition von ε_i).
Statt den Nachweis zu führen, daß h injektiv ist, geben wir einfach die Umkehrabbildung zu h an:

$$\psi : \prod_{i=1}^{r} U \otimes V_i \longrightarrow U \otimes V \;:$$

$$\left(\sum_{m_1=1}^{n_1} \underline{u}_{m_1} \otimes \underline{v}_{m_1}, \ldots, \sum_{m_r=1}^{n_r} \underline{u}_{m_r} \otimes \underline{v}_{m_r} \right) \longmapsto \sum_{m_1=1}^{n_1} \underline{u}_{m_1} \otimes \varepsilon_1\,(\underline{v}_{m_1}) + \ldots + \sum_{m_r=1}^{n_r} \underline{u}_{m_r} \otimes \varepsilon_r\,(\underline{v}_{m_r}).$$

Hierfür gilt $\psi \circ h = \mathrm{id}_{U \otimes V}$ und wegen h surjektiv folgt, daß h Isomorphismus ist.

□

10.11 Hilfssatz

Ist V endlich dimensional mit Basis $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, so besitzt jedes Element aus $U \otimes V$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i \otimes \underline{v}_i$$

für passende $\underline{u}_i \in U$.

Beweis:

$$V = \dot{\sum_{i=1}^{n}} K\,\underline{v}_i \;\; (V_i := K\,\underline{v}_i) \quad \longrightarrow \quad V \cong \prod_{i=1}^{n} V_i,$$

folglich

$$U \otimes V \cong U \otimes \prod_{i=1}^{r} V_i \cong \prod_{i=1}^{r} U \otimes V_i .$$

Nach obiger Bemerkung besitzt jedes Element von $U \otimes V$, eine eindeutige Darstellung der Form $\underline{u}_i \otimes \underline{v}_i$, damit folgt die Behauptung mit dem Isomorphismus ψ aus dem Beweis von (10.4).
(Beachte:

$$\tau \;:\; \prod_{i=1}^{r} V_i \longrightarrow V \;:\; (\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_r) \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \underline{w}_i$$

ist Isomorphismus! Damit wird $\mathrm{id}_U \otimes \tau = \tau\,(\mathrm{id}_U,\, \tau)$ Isomorphismus zwischen

$$U \otimes \prod_{i=1}^{n} V_i \;\text{ und }\; U \otimes V.)$$

□

Für $\dim V = \infty$ siehe Übungen.

10.12 Korollar

Sind U, V beide endlich dimensional mit Basen $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k$ sowie $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m$, so ist

$$\{\, \underline{u}_i \otimes \underline{v}_j \mid (1 \le i \le k),\, (1 \le j \le m)\}$$

Basis von $U \otimes V$.
Speziell gilt $\dim U \otimes V = \dim U \,\dim V$.

Beweis: Konsequenz von (10.11) und (10.8).

□

10.13 Hilfssatz

Unter der Voraussetzung von (10.12) existiert ein Isomorphismus

$$\sigma \;:\; \mathrm{End}\,(U) \otimes \mathrm{End}\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}\,(U \otimes V)$$

mittels

$$f \otimes g \longmapsto T(f,\, g).$$

Beweis:
Zu jedem Paar $(j,\, \nu)$ $(1 \le j \le l,\ 1 \le \nu \le n)$ existiert ein eindeutig bestimmter Endomorphimus

$$\begin{array}{ll} f_{ij} \in \mathrm{End}\,(U) & (1 \le i \le k), \\ g_{\mu\nu} \in \mathrm{End}\,(V) & (1 \le \mu \le n) \end{array}$$

mittels:

$$\begin{array}{lll} f_{ij}(\underline{u}_i) = \underline{u}_j, & f_{ij}(\underline{u}_\chi) = \underline{0} & 1 \le \chi \le k,\ \chi \ne i, \\ g_{\mu\nu}(\underline{v}_\mu) = \underline{v}_\nu, & g_{\mu\nu}(\underline{v}_\kappa) = \underline{0} & 1 \le \kappa \le n,\ \kappa \ne \mu. \end{array}$$

Gemäß (3.10) sind

$$\{f_{ij} \mid 1 \le i,\, j \le k\}, \quad \{g_{\mu\nu} \mid 1 \le \mu,\, \nu \le n\}$$

Basen von $\mathrm{End}\,(U)$ bzw. $\mathrm{End}\,(V)$. Hierfür gilt:

$$T(f_{ij},\, g_{\mu\nu})\,(\underline{u}_\chi \otimes \underline{v}_\varrho) = \begin{cases} \underline{u}_j \otimes \underline{v}_\nu & \text{für } (i,\, \mu) = (\chi,\, \varrho) \\ \underline{0} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Danach bilden die $T(f_{ij},\, g_{\mu\nu})$ gemäß (3.10) und (10.12) eine Basis von $\mathrm{End}\,(U \otimes V)$.

□

Bemerkung:
Im endlich dimensionalen Fall lassen sich $f \otimes g$ und $T(f,\, \varrho)$ identifizieren!

10.13.1 Erweiterung des Grundkörpers

Es sei V ein K-Vektorraum und L ein Oberkörper von K (d.h. L Körper mit $L \supseteq K$).

Wie macht man V zu L-Vektorraum (unter Beibehaltung der Dimension)?

Zunächst ist L auch K-Vektorraum. Damit $L \otimes_K V$ bildbar!
Betrachte die 3-fach lineare Abbildung

$$L \times L \times V \longrightarrow L \otimes_K V \;:\; (\alpha,\, \beta,\, \underline{x}) \longmapsto (\alpha\, \beta) \otimes_K \underline{x}.$$

Diese induziert eine k-bilineare Abbildung

$$L \times (L \otimes_K V) \longrightarrow L \otimes_K V \;:\; (\alpha,\, \beta \otimes_K V) \longmapsto (\alpha\, \beta) \otimes_K \underline{x}.$$

Diese macht $L \otimes_K V$ zur einem L-Vektorraum, den wir zur Unterschiedung V_L nennen.
Betrachte, daß die skalare Multiplikation mit Elementen aus L nur mit der ersten Komponente des Tensorprodukts zweier Elemente möglich ist!

10.14 Hilfssatz

Ist $(\underline{v}_i)_{i \in I}$ eine Basis des K-Vektorraums V, so ist $(1 \otimes_K \underline{v}_i)_{i \in I}$ eine Basis des L-Vektorraum V_L.

<u>Beweis:</u>
Ist $(\underline{l}_j)_{j \in J}$ eine Basis des K-Vektorraums L, so erzeugen die $\underline{l}_j \otimes_K \underline{v}_i$ $(j \in J,\, i \in I)$ den L-Vektorraum V_L.
(Beachte: $L \otimes_K V$ und V_L besitzen die selben Elemente, nur die skalare Multiplikation ist in beiden Räumen verschieden erklärt!)
In V_L ist $\underline{l}_j \otimes_K \underline{v}_i = \underline{l}_j\, (1 \otimes_K \underline{v}_i)$, also bilden die $1 \otimes_K \underline{v}_i$ ein Erzeugendensystem von V_L.
Zur linearen Unabhängigkeit:
Aus

$$\begin{aligned}
\underline{0} \quad &= \quad \sum_{i \in I} \lambda_i\, (1 \otimes_K \underline{v}_i) \qquad (\lambda_i \in L,\ \text{nur endlich viele} \neq 0) \\
&\overset{\text{in } V_L}{=} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i \otimes_K \underline{v}_i \\
&\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \quad \lambda_i \otimes_K \underline{v}_i = 0 \quad \forall i \in I,
\end{aligned}$$

also $\lambda_i = 0$ nach Bemerkung Seite 58.

□

(<u>Warnung:</u> Für $l \in L \backslash K$ gilt <u>nicht</u> $l \otimes \underline{v}_i = 1 \otimes l\, \underline{v}_i$, letztes ist nicht erklärt!)

<u>Bemerkung:</u>
Sind $K \subseteq L \subseteq M$ Körper und V ein K-Vektorraum, so gilt:

$$M \otimes_K V \cong M \otimes_K (L \otimes_K V)$$

(Isomorphie als M-Vektorräume).
Zum Beweis bilde man $1 \otimes_K \underline{v}_i$ auf $1 \otimes_L (1 \otimes_K \underline{v}_i)$ ab für eine Basis $\{\underline{v}_i\}_{i \in I}$ von V über K.

10.15 Definition

Es sei V ein K-Vektorraum und für $p,\, q \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ sei

$$\begin{aligned}
V_1 = \ldots = V_p \quad &= \quad V, \\
V_{p+1} = \ldots = V_{p+q} \quad &= \quad V^*.
\end{aligned}$$

Dann heißen die Elemente des Tensorprodukts

$$V_p^q := V_1 \otimes \ldots \otimes V_p \otimes V_{p+1} \otimes \ldots \otimes V_{p+q}$$

<u>p-fache kontravariante</u> und <u>q-fache kovariante Tensoren</u> bzw. <u>Tensoren der Stufe</u> (p, q). Tensoren der Stufe $(0,0)$ werden als Elemente von K definiert.

Im folgenden sei stets

$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ eine Basis von V, also V endlich dimensional,
$\underline{v}_1^*, \ldots, \underline{v}_n^*$ die zugehörige duale Basis von V^*.

$$V_i \ni \quad \underline{x}_i = \sum_{\nu_i=1}^{n} \xi_i^{(\nu_i)} \underline{v}_{\nu_i} \qquad (1 \leq i \leq p),$$

$$V_{p+j} \ni \quad \underline{x}^{(j)} = \sum_{\mu_j=1}^{n} \xi_{\mu_j}^{(j)} \underline{v}^{(\mu_i)} \qquad (\underline{v}^{(\mu_i)} := \underline{v}_{\mu_j}^*,\ 1 \leq j \leq q).$$

10.15.1 Summationskonvention (nach Einstein)

Tritt in einem Produkt ein variabler Index in einem Faktor als unterer, in einem anderen als oberer Index auf, so ist hierüber gemäß dem Wertebereich des Index zu summieren.
Folglich schreibt man:

$$\underline{x}_i = \xi_i^{(\nu_i)} \underline{v}_{\nu_i} \qquad \underline{x}^{(j)} = \xi_{\mu_i}^{(j)} \underline{v}^{(\mu_j)}.$$

Für den Tensor

$$\eta = \underline{x}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{x}_p \otimes x^{(i)} \otimes \ldots \otimes x^{(q)} \ \in V_p^q$$

liefert dies

$$\eta = \underbrace{\xi_1^{(\nu_1)} \cdot \ldots \cdot \xi_p^{(\nu_p)} \xi_{\mu_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot \xi_{\mu_p}^{(q)}}_{=:\ \xi_{(\mu_1 \ldots \mu_q)}^{(\nu_1 \ldots \nu_p)}} \underline{v}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\nu_p} \otimes \underline{v}^{(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{(\mu_q)},$$

wobei über die Indizes

$$\nu_1, \ldots, \nu_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$$

unabhängig von 1 bis n zu summieren ist.
Damit wird $V_p^q = [B_p^q]$ für

$$B_p^q = \{\, \underline{v}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\nu_p} \otimes \underline{v}^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{\mu_q}\ (1 \leq \nu_i \leq n,\ 1 \leq \mu_j \leq n,\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)\}$$

und $\dim V_p^q = n^{p+q} = \sharp B_p^q$ lehrt, daß B_p^q linear unabhängig ist, also eine Basis von V_p^q.

Auf V_p^q erklärt man eine Multiplikation (Tensormultiplikation) mittels:

$$F \ :\ V^p \times V^{*\,q} \times V^r \times V^{*\,s} \longrightarrow V_{p+r}^{q+s} \ :$$

$$(\,\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p, \underline{x}^{(1)}, \ldots, \underline{x}^{(q)}, \underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_r, \underline{y}^{(1)}, \ldots, \underline{y}^{(s)})$$

$$\longmapsto (\,\underline{x}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{x}_p \otimes \underline{y}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{y}_r \otimes \underline{x}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{x}^{(p)} \otimes \underline{y}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{y}^{(s)}) =: \zeta.$$

F ist eine $(p+q+r+s)$-fache lineare Abbildung. Hierzu erklärt man die Abbildung

$$\psi \ :\ V_p^q \times V_r^s \longrightarrow V_{p+r}^{q+s} \ :$$

$$(\,\underline{x}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{x}_p \otimes \underline{x}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{x}^{(q)}, \underline{y}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{y}_r \otimes \underline{y}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{y}^{(s)}) \longmapsto \zeta.$$

Mittels (10.5), (10.7), (10.8) folgt, daß ψ eindeutig (durch F) bestimmte bilineare Abbildung ist. ψ heißt Tensorprodukt. Für $a \in V_p^q$, $b \in V_r^s$ heißt $\psi\,(a, b)$ das <u>Produkt</u> von a und b, kurz $a\,b$. Für $p = q = 0$ bzw. $r = s = 0$ soll das Produkt mit der üblichen skalaren Multiplikation übereinstimmen.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a\,(b+c) &= a\,b + a\,c, \\ (a+b)\,c &= a\,c + b\,c, \\ (\lambda\,a)\,b &= a\,(\lambda\,b) = \lambda\,(a\,b), \\ (a\,b)\,c &= a\,(b\,c). \end{aligned}$$

Insbesondere läßt sich nun ein Tensor $\eta \in V_p^q$ auch in der Form

$$\underline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{x}_p \cdot \underline{x}^{(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{x}^{(q)} \;\text{ mit }\; \underline{x}_i \in V_1^0 \;(1 \le i \le p),\;\; \underline{x}_j \in V_0^1 \;(1 \le j \le q)$$

schreiben.

Produktformel für allgemeine Tensoren

$$\Big(\xi^{(\nu_1)\ldots(\nu_p)}_{\mu_1\ldots\mu_q}\; \underline{v}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\nu_p} \otimes \underline{v}^{(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{(\mu_q)}\Big)\Big(\eta^{(\sigma_1)\ldots(\sigma_r)}_{\varrho_1\ldots\varrho_s}\; \underline{v}_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\sigma_r} \otimes \underline{v}^{(\varrho_1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{(\varrho_s)}\Big)$$

$$= \xi^{(\nu_1)\ldots(\nu_p)}_{\mu_1\ldots\mu_q}\; \eta^{(\sigma_1)\ldots(\sigma_r)}_{\varrho_1\ldots\varrho_s}$$
$$\underline{v}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\nu_p} \otimes \underline{v}_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\sigma_r} \otimes \underline{v}^{(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{(\mu_q)} \otimes \underline{v}^{(\varrho_1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{(\varrho_s)}.$$

Bemerkung:
Tensormultiplikation erhöht i.a. die Stufe (außer bei Multiplikation mit Skalaren).

Erniedrigen der Stufe durch Verjüngung:
Bei festen Indizes $i \in \{1, \ldots, p\},\; k \in \{1, \ldots, q\}$ setzt man

$$\gamma_i^k \;:\; V_p^q \longrightarrow V_{p-1}^{q-1}$$

mittels

$$\underline{x}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{x}_p \otimes \underline{x}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{x}^{(q)} \longmapsto \underline{x}^k(\,\underline{x}_i)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \underline{x}_j\right)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{q} \underline{x}^{(j)}\right)$$

und linearer Fortsetzung.
γ_i^k heißt Verjüngung (Kontraktion) über die Indizes (i, k).

Bemerkung:
Es ist $p\,q > 0$ erforderlich.
γ_i^k hängt von der Vorgabe V_p^q ab, jedoch wird dies i.a. nicht gekennzeichnet. Man schreibt

$$\gamma_i^{(k)}\,(V_p^q)\;(\subseteq V_{p-1}^{q-1}), \quad \gamma_i^{(k)}\,(\gamma_i^{(k)}\,(V_p^q))\;(\subseteq V_{p-2}^{q-2}) \quad \text{etc..}$$

Bei fester Basis folgt wegen $\underline{v}^{(k)}\,(\,\underline{v}_i) = \delta_{ik}$ für die Kontraktion

$$\gamma_i^k\,\big(\xi^{(\nu_1)\ldots(\nu_p)}_{\mu_1\ldots\mu_q}\; \underline{v}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\nu_p} \otimes \underline{v}^{(\mu_1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}^{(\mu_q)}\big)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \gamma^{(\nu_1)\ldots(\nu_{k-1})\,(\lambda)\,(\nu_{i+1})\ldots(\nu_p)}_{\mu_1\ldots\mu_{k-1}\,\lambda\,\mu_{k+1}\ldots\mu_q} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \underline{v}_{\nu_j}\right)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{q} \underline{v}^{(\mu_i)}\right)$$

Beispiel:
Es sei $K = \mathbb{R},\; V = \mathbb{R}\,\underline{v}_1 + \mathbb{R}\,\underline{v}_2$ mit zugehöriger dualer Basis $\underline{v}^{(1)},\, \underline{v}^{(2)}$. Es seien

$$\begin{aligned} a &= 2\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} + 3\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} - \underline{v}_2 \otimes \underline{v}^{(1)} + 4\,\underline{v}_2 \otimes \underline{v}^{(2)} \quad &\in V_1^1, \\ b &= 5\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} - 2\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} \quad &\in V_2^1. \end{aligned}$$

Dann wird

$$\begin{aligned}
ab \;=\;& 10\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} \otimes \underline{v}^{(1)} && (\longrightarrow \underline{v}^{(1)}(\underline{v}_1) = 1)\\
&+ 15\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} \otimes \underline{v}^{(1)}\\
&- 5\,\underline{v}_2 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} \otimes \underline{v}^{(1)}\\
&+ 20\,\underline{v}_2 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} \otimes \underline{v}^{(1)} && (\longrightarrow \underline{v}^{(1)}(\underline{v}_2) = 0)\\
&- 4\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} \otimes \underline{v}^{(2)}\\
&- 6\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} \otimes \underline{v}^{(2)}\\
&+ 2\,\underline{v}_2 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} \otimes \underline{v}^{(2)}\\
&- 8\,\underline{v}_2 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} \otimes \underline{v}^{(2)} && \in V_3^2;
\end{aligned}$$

und hierfür berechnet man

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2(ab) \;=\;& 10\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)}\\
&+ 15\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)}\\
&+ 2\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)}\\
&- 8\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)}\\
=\;& 12\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(1)} + 7\,\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 \otimes \underline{v}^{(2)} && \in V_2^1,
\end{aligned}$$

sowie

$$\gamma_1^1(\gamma_1^2(a\,b)) = 12\,\underline{v}_1 \qquad \in V_1^0\ (\cong V).$$

Abbildungen von Tensorprodukten (und deren Matrizen)

Es seien $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ eine Basis von V, $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ eine Basis von W, $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_r$ eine Basis von X und $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_s$ eine Basis von Y.
Den Abbildungen $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\psi \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ sollen bzgl. dieser Basen die Matrizen $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m\times n}$, $B = (\beta_{ij}) \in K^{s\times r}$ zugeordnet sein.
Nach (10.12) sind

$$\{\,\underline{v}_i \otimes \underline{x}_j \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r\}$$

bzw.

$$\{\,\underline{w}_\mu \otimes \underline{y}_\nu \mid 1 \le \mu \le m,\ 1 \le \nu \le s\}$$

Basen von $V \otimes X$ bzw. $W \otimes Y$.
Gesucht ist nun die zugehörige Matrix $C = (\gamma_{ij}) \in K^{(sm)\times(rn)}$ für $\varphi \circ \psi = T(\varphi, \psi)$.

$$\begin{aligned}
T(\varphi, \psi)(\underline{v}_i \otimes \underline{x}_j) &= \varphi(\underline{v}_i) \otimes \psi(\underline{x}_j)\\
&= \left(\sum_{\mu=1}^{m} \alpha_{\mu i}\,\underline{w}_\mu\right) \otimes \left(\sum_{\nu=1}^{s} \beta_{\nu j}\,\underline{y}_\nu\right)\\
&= \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_{\mu i}\,\beta_{\nu j}\ \underline{w}_\mu \otimes \underline{y}_\nu \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r)
\end{aligned}$$

Gemäß obiger Anordnung der Basen der Tensorprodukte gehört zu

$$T(\varphi, \psi)(\underline{v}_i \otimes \underline{x}_j)$$

die $((i-1)\,r + j)$-te Spalte von C:
$\underline{v}_1 \otimes \underline{x}_1, \dots, \underline{v}_1 \otimes \underline{x}_r, \underline{v}_2 \otimes \underline{x}_1, \dots, \underline{v}_2 \otimes \underline{x}_r, \dots, \underline{v}_n \otimes \underline{x}_1, \dots, \underline{v}_n \otimes \underline{x}_r$.
(Im Bildbereich:
$\underline{w}_1 \otimes \underline{y}_1, \dots, \underline{w}_1 \otimes \underline{y}_s, \underline{w}_2 \otimes \underline{y}_1, \dots, \underline{w}_2 \otimes \underline{y}_s, \dots, \underline{w}_m \otimes \underline{y}_1, \dots, \underline{w}_m \otimes \underline{y}_s$)
Zeilenanordnung in C wird damit zu

$$\gamma_{(\mu-1)\,s+\nu,\,(i-1)\,r+j} = \alpha_{\mu i}\,\beta_{\nu j}\ (1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r,\ 1 \le \mu \le m,\ 1 \le \nu \le s).$$

Die so definierte Matrix C heißt Kroneckerprodukt der Matrizen A, B.
Schreibweise: $C = A \otimes B$ mit

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|ccc} \begin{array}{ccc} \alpha_{11}\,\beta_{11} & \cdots & \alpha_{11}\,\beta_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{11}\,\beta_{s1} & \cdots & \alpha_{11}\,\beta_{sr} \end{array} & \alpha_{12}\,B & \cdots & \alpha_{1n}\,B \\ \hline \alpha_{21}\,B & \alpha_{22}\,B & \cdots & \alpha_{2n}\,B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}\,B & \alpha_{m2}\,B & \cdots & \alpha_{mn}\,B \end{array} \right).$$

Beispiele für Kroneckerprodukte werden in den Übungen behandelt.

10.16 Definition

$f : V^r \to W$ multilinear heißt alternierend, falls

$$f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_r) = \underline{0}$$

gilt, sobald 2 gleiche Argumente auftreten.

Beispiel:

$$\det : (K^{n\times 1})^n \longrightarrow K.$$

Im folgenden bezeichnet U_r denjenigen Unterraum von

$$T_r(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \quad (= V_r^0),$$

der von allen r-gliedrigen Tensoren $\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r$ mit $\underline{v}_i = \underline{v}_j$ für mindestens 2 Indizes $1 \le i, j \le r$ aufgespannt wird.

10.17 Definition

$$\Lambda_r(V) := T_r(V)/U_r$$

heißt r-te äußere Potenz von V.

Bemerkung:
Nach Konstruktion haben wir eine kanonische Abbildung

$$F : V^r \longrightarrow \Lambda_r(V)$$

mittels

$$V^r \xrightarrow{f} T_r(V) \xrightarrow{\pi} T_r(V)/U_r.$$

10.18 Satz

Ist $G : V^r \to W$ eine alternierende multilineare Abbildung, so existiert hierzu eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$H : \Lambda_r(V) \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad G = H \circ F.$$

<u>Beweis:</u>

$$
\begin{tikzcd}
V_r \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "F=\pi\circ f"] \arrow[dr, "G"'] & T_r(V) \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "h"] & \Lambda_r(V) \arrow[dl, "H"] \\
& W &
\end{tikzcd}
$$

Nach (10.5) existiert eine eindeutige bestimmte lineare Abbildung $h : T_r(V) \to W$ mit $G = h \circ f$. Da G alternierend ist, folgt $G(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) = \underline{0}$, falls $1 \leq i < j \leq r$ mit $\underline{v}_i = \underline{v}_j$ existieren. Hierfür ist

$$f(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) = \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r$$

mit $h(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r) = \underline{0}$. $h|_{U_r} = \mathcal{O}$.
Daher läßt sich $H : \Lambda_r(V) \to W$ erklären durch:

$$H(\underline{x} + U_r) := h(\underline{x}).$$

Wegen h linear mit $h|_{U_r} = 0$ ist H wohldefiniert. H ist linear, weil h es ist. H ist eindeutig, da die Bilder auf einem Erzeugendensystem von $\Lambda_r(V)$ vorgeschrieben sind:

$$
\begin{aligned}
G(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) &= H(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r + U_r) \\
&= h(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r).
\end{aligned}
$$

Damit gilt $G = H \circ F$.

□

<u>Bemerkung:</u>

(i) $\Lambda_r(V)$ ist bzgl. der in (10.18) angegebenen Eigenschaften bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u> Wie in (10.15)!

(ii) Das Bild von $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r) \in V^r$ unter f ist $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r + U_r$ und wird mit $\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r$ bezeichnet.

(iii) Aus

$$\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underset{i}{(\underline{v}_i + \underline{v}_j)} \wedge \ldots \wedge \underset{j}{(\underline{v}_i + \underline{v}_j)} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_n = \underline{0} \quad \text{mit } 1 \leq i < j \leq n$$

folgt

$$
\begin{aligned}
\underline{0} \quad = \quad & \underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_i \wedge \ldots \wedge \underline{v}_i \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r + \underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_i \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r \\
& + \underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \ldots \wedge \underline{v}_i \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r + \underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r,
\end{aligned}
$$

also

$$\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_i \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r = -\,\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \ldots \wedge \underline{v}_i \wedge \ldots \wedge \underline{v}_r.$$

<u>Beispiel:</u>
$V = \mathbb{F}_2^3$ mit Basis

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$T_2(V) = V \otimes V$ hat Basis $\underline{v}_i \otimes \underline{v}_j$ mit $(1 \leq i, j \leq 3)$.
Berechne $U_2 = [\underline{x} \otimes \underline{x} \mid \underline{x} \in V]$! Dazu sei

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \underline{v}_i,$$

also

$$\underline{x} \otimes \underline{x} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j \underline{v}_i \otimes \underline{v}_j.$$

Fallunterscheidung:

(i) Genau ein $\lambda_i = 1$, die übrigen 0, dann ist $\underline{v}_i \otimes \underline{v}_i \in U_2 \ (1 \leq i \leq 3)$.

(ii) Genau zwei $\lambda_i,\ \lambda_j = 1,\ \lambda_k = 0,\ \{i,\ j,\ k\} = \{1,\ 2,\ 3\}$, dann ist $\underline{v}_i \otimes \underline{v}_j + \underline{v}_j \otimes \underline{v}_i \ \in U_2$.

(iii) Für $\underline{x} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ ist $\underline{x} \otimes \underline{x}$ ist Linearkombination von Elementen aus (i) und (ii).

U_2 wird daher von den Elementen aus (i) und (ii) aufgespannt, dies sind 6 linear unabhängige Elemente aus $T_2(V)$. Folglich ist $\dim \Lambda_2(V) = 9 - 6 = 3$ mit Basis

$$\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 + U_2,\ \ \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_3 + U_2,\ \ \underline{v}_2 \otimes \underline{v}_3 + U_2.$$

10.19 Satz

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Für $r > n$ ist $\Lambda_r(V) = \{\underline{0}\}$. Ist $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ eine Basis von V, so bilden im Fall $1 \leq r \leq n$ die $\binom{n}{r}$ Elemente

$$\underline{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n)$$

eine Basis von $\Lambda_r(V)$. Demnach ist

$$\dim \Lambda_r(V) = \binom{n}{r} \ \text{ für } \ 1 \leq r \leq n.$$

<u>Beweis:</u>

(i) $r > n$:

Stets wird $\Lambda_r(V)$ von Elementen der Form $\underline{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{i_r}$ erzeugt. Hierbei müssen 2 gleiche Indizes auftreten! Also sind alle erzeugenden Elemente $\underline{0}$.

(ii) $r = n$:

Als erzeugendes Element verbleibt $\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_n \ \notin U_n$.

(iii) $1 \leq r < n$:

Die bilineare Abbildung

$$T_r(V) \times T_s(V) \longrightarrow T_{r+s}(V)$$

gegeben durch

$$(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r, \underline{w}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{w}_s) \longmapsto \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r \otimes \underline{w}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{w}_s$$

induziert eine bilineare Abbildung

$$\psi\ :\ T_r(V)/U_r \times T_s(V)/U_s \longrightarrow T_{r+s}(V)/U_{r+s}$$

mittels

$$(\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r + U_r, \underline{w}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{w}_s + U_s) \longmapsto \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_r \otimes \underline{w}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{w}_s + U_{r+s}.$$

(Beachte, daß ψ wohldefiniert ist!)

Wir benutzen als abkürzende Schreibweise:

$$\underline{j} = (j_1, \ldots, j_r) \ \ (1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n).$$

Offenbar wird $\Lambda_r(V)$ von $\underline{v}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{j_r}$ erzeugt.

Es ist noch deren lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

Dazu betrachte Linearkombination

$$\underline{0} = \sum_{\underline{j}} \lambda_{\underline{j}}\, \underline{v}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{j_r}.$$

Für festes $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ bilde

$$\{1, \ldots, n\} = \{i_1, \ldots, i_r\} \,\dot\cup\, \{i_{r+1}, \ldots, i_n\}$$

mit $i_{r+1} < i_{r+2} < \ldots < i_n$.
Dann folgt

$$\begin{aligned}
\underline{0} &= \psi\,(\underline{0},\, \underline{v}_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{i_n}) \\
&= \psi\left(\sum_{\underline{j}} \lambda_{\underline{j}}\, \underline{v}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{j_r},\, \underline{v}_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{i_n}\right) \\
&= \sum_{\underline{j}} \lambda_{\underline{j}}\, \underline{v}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{j_r} \wedge \underline{v}_{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{i_n} \\
&= \lambda_{\underline{i}}\, \underline{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{i_n} \\
&= \pm\lambda_{\underline{i}}\, \underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_n
\end{aligned}$$

$\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}$ $\lambda_{\underline{i}} = 0$.

□

Bemerkung:
Die Abbildung ψ aus dem Beweis (für $r < n$) heißt äußeres Produkt.

10.19.1 Rechenregeln

Für $a,\, b \in \Lambda_r(V),\ c,\, d \in \Lambda_s(V),\ e \in \Lambda_t(V),\ \lambda \in K$ und $a \wedge b := \psi\,(a,\, b)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(a \wedge c) \wedge e &= a \wedge (c \wedge e), \\
(a + b) \wedge c &= a \wedge c + b \wedge c, \\
a \wedge (c + d) &= a \wedge c + a \wedge d, \\
(\lambda\, a) \wedge c &= a \wedge (\lambda\, c) = \lambda\, (a \wedge c), \\
a \wedge c &= (-1)^{r\,s}\, c \wedge a.
\end{aligned}$$

10.20 Hilfssatz

(i) Für $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r) \in V^r$ und $\pi \in \mathcal{S}_r$ gilt:

$$\underline{x}_{\pi(1)} \wedge \ldots \wedge \underline{x}_{\pi(n)} = \operatorname{sign}(\pi)\; \underline{x}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{x}_r.$$

(ii) Für $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p \in V$ gilt:

$$\underline{x}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{x}_p \neq \underline{0} \;\Leftrightarrow\; \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis:

(i) Folgt aus Bemerkung (iii) nach (10.18) und der Tatsache, daß sich π als Produkt von k Transpositionen schreiben läßt mit $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^k$.

(ii) Sind $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p$ linear abhängig, so existiert $j \in \{1, \ldots, p\}$ mit:

$$\underline{x}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \lambda_i\, \underline{x}_i$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{x}_p &= \underline{x}_1 \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \lambda_i \, \underline{x}_i \right) \wedge \ldots \wedge \underline{x}_p \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \lambda_i \, \tilde{\underline{x}}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\underline{x}}_p \end{aligned}$$

mit $\tilde{\underline{x}}_\nu = \underline{x}_\nu$ für $\nu \neq j$, $\tilde{\underline{x}}_j = \underline{x}_i$, also verschwinden alle Summanden.

Sind $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_p$ linear unabhängig, so lassen sie sich zu einer Basis $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ von V ergänzen. Also ist $\underline{x}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{x}_p \neq \underline{0}$ wegen $\underline{x}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{x}_n \neq \underline{0}$ (vergleiche (10.19)).

□

I Anwendungen im $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{M}$ sei die Menge aller Basen des $\mathbb{R}^n$. Definiere hierauf Äquivalenzrelation:
Für $B_1,\, B_2 \in \mathcal{M}$ sei

$$B_1 \sim B_2 \;:\Leftrightarrow\; \exists A \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R}) \,:\, B_1 = B_2\, A \text{ und } \det(A) > 0,$$

dadurch wird $\mathcal{M}$ in 2 Äquivalenzklassen zerlegt. Basen derselben Äquvalenzklasse heißen <u>gleich orientiert</u>.

$\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ heißt <u>positiv orientiert</u>, allgemein ist eine Basis $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ positiv orientiert, falls $\det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) > 0$ ist.
(Im $\mathbb{R}^3$ ist $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ positiv orientiert, $\underline{e}_3, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ dito, $\underline{e}_3, \underline{e}_2, \underline{e}_1$ jedoch nicht.)

II Vektorprodukt

V sei 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.
Erkläre alternierende multilineare Abbildung

$$\Psi \,:\, V \times V \longrightarrow W$$

mittels

$$\Psi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = (-1)^{k-1}\, \underline{v}_k$$

für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. (Beachte $\Psi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \underline{0}$, $\Psi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = -\Psi(\underline{v}_j, \underline{v}_i)$ sowie lineare Fortsetzung.)
Ψ ist in Wahrheit basisunabhängig:
Es sei $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ weitere Basis von V mit

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)\, A$$

und $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{GL}\,(3, \mathbb{R})$.
Ist $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ Orthonormalbasis, so ist $A \in \mathrm{O}\,(3)$ (vergleiche (7.19)). Dann ist

$$\delta_{ij} = B(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{\mu i}\, \alpha_{\mu j}\; B(\underline{v}_\mu, \underline{v}_\mu).$$

Falls $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ zu $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ gleich orientiert ist, ist $\det(A) > 0$, d.h. $A \in \mathrm{SO}\,(3)$.
Damit wird dann

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{u}_i, \underline{u}_j) &= \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \alpha_{\mu i}\, \alpha_{\nu j}\; \Psi(\underline{v}_\mu, \underline{v}_\nu) \\ &= (\alpha_{1i}\, \alpha_{2j} - \alpha_{2i}\, \alpha_{1j})\; \Psi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \\ &\quad + (\alpha_{1i}\, \alpha_{3j} - \alpha_{3i}\, \alpha_{1j})\; \Psi(\underline{v}_1, \underline{v}_3) \\ &\quad + (\alpha_{2i}\, \alpha_{3j} - \alpha_{3i}\, \alpha_{2j})\; \Psi(\underline{v}_2, \underline{v}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^{3} (-1)^{\mu-1} \det(A_{\mu k})\, \underline{v}_\mu \\
&= \sum_{\mu=1}^{3} (-1)^{k-1} \operatorname{Adj}(\alpha_{\mu k})\, \underline{v}_\mu \\
&\overset{(5.18)}{=} (-1)^{k-1} \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \operatorname{Adj}(\alpha_{\mu k})\, \alpha_{\mu\nu}\, \underline{u}_\nu \\
&= (-1)^{k-1} \det(A)\, \underline{u}_k \\
&= (-1)^{k-1}\, \underline{u}_k .
\end{aligned}$$

Also ist Ψ allein durch V und eine vorgegebenen Orientierung festgelegt.
Ψ heißt <u>Vektorprodukt</u> auf V.

Schreibweise: $\underline{x} \wedge \underline{y} := \Psi(\underline{x}, \underline{y})$.

Die Multilinearität von Ψ liefert

$$\begin{aligned}
(\underline{u} + \underline{v}) \times \underline{w} &= \underline{u} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{w}, \\
\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) &= \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}, \\
(\lambda \underline{u}) \times \underline{v} &= \underline{u} \times (\lambda \underline{v}) = \lambda(\underline{u} \times \underline{v}).
\end{aligned}$$

Ψ alternierend liefert

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u} \quad \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Im folgenden sei $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ positiv orientierte Orthonormalbasis von V, bzgl. der $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$, die Koordinaten ζ_i, η_i, ξ_i $(1 \le i \le 3)$ besitzen.

Dann gilt:

(i)
$$\underline{x} \times \underline{y} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

(formale Berechnung der Determinante, etwa mittels Entw. 1. Zeile);

(ii)
$$\underline{x} \times \underline{y} = 0 \ \Leftrightarrow\ \underline{x}, \underline{y} \text{ linear abhängig;}$$

(iii)
$$B(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{z}) = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix};$$

(iv)
$$\begin{aligned}
B(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{z}) &= B(\underline{y} \times \underline{z}, \underline{x}) = B(\underline{z} \times \underline{x}, \underline{y}), \\
B(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{x}) &= B(\underline{x} \times \underline{y}, \underline{y}) = 0;
\end{aligned}$$

(v)
$$\|\underline{x} \times \underline{y}\| = \|\underline{x}\|\, \|\underline{y}\|\, |\sin(\underline{x}, \underline{y})|$$

<u>Beweis:</u>

(i) Per Nachrechnen!

(ii)
$$\begin{aligned}
\underline{x} \times \underline{y} = \underline{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle 2-reihigen Unterdeterminanten von} \\
& \quad A = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \text{ verschwinden} \\
&\overset{(5.20)}{\Longleftrightarrow} \quad \operatorname{rg}(A) \le 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \underline{x}, \underline{y} \text{ linear abhängig.}
\end{aligned}$$

(iii) Per Ausrechnen! Entwickle Determinante nach 3 Zeile.

(iv) Die Determinante aus (iii) ändert bei zyklischer Zeilenpermutation das Vorzeichen nicht; sie verschwindet, falls 2 gleiche Zeilen auftreten.

(v) Mittels

$$\sin^2(\underline{x}, \underline{y}) + \cos^2(\underline{x}, \underline{y}) = 1$$

und

$$\cos(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{B(\underline{x}, \underline{y})}{\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|}$$

wird damit (v) äquivalent zu $\|\underline{x} \times \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2\,\|\underline{y}\|^2 - B(\underline{x}, \underline{y})^2$.
Hierin ist die linke Seite

$$(x_2\,y_3 - x_3\,y_2)^2 + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)^2 + (x_1\,y_3 - x_3\,y_1)^2$$

nach (i), die rechte Seite ist

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3)^2,$$

also sind beide Seiten gleich, und die Behauptung folgt.

□

Kapitel 11: Analytische Geometrie

11.1 Definition

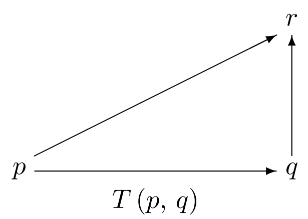
Es sei $A \neq \emptyset$ und V_A ein K-Vektorraum. Ferner sei eine Abbildung

$$T : A \times A \to V_A$$

gegeben mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall p \in A \, \forall \underline{x} \in V_A \;\; \dot{\exists}\, q \in A : T(p, q) = \underline{x}$,

(ii) $\forall p, q, r \in A : T(p, q) + T(q, r) = T(p, r)$.



A bzw. (A, V_A, T) heißt dann affiner Raum, die Elemente von A heißen Punkte. $\dim A := \dim V_A$ heißt Dimension von A. $A = \emptyset$ ist stets affiner Raum mit $\dim \emptyset = -1$, ihr ist kein Vektorraum zugeordnet.

Beispiel:
$A = \{p\}$ und $V_A = \{\underline{0}\}$ mit $T(p, p) = \underline{0}$.

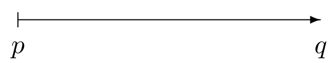
Bemerkung:

(i) Eigenschaft (11.1)(i) bedeutet, daß T (bei festem 1. Argument) im 2. Argument injektiv und surjektiv ist.

(ii) Wählt man $p \in A$ fest (Ursprung), so ist

$$V_A = \{T(p, q) \mid q \in A\},$$

V_A läßt sich dann als Menge der Ortsvektoren der Punkte aus A auffassen.



(iii) Für alle $p, q \in A$ gilt:

$T(p, p) = \underline{0}$, denn $T(p, p) + T(p, p) \overset{(11.1)(\text{ii})}{=} T(p, p)$,

$T(p, q) = -T(q, p)$, wegen $\underline{0} = T(p, p) = T(p, q) + T(q, p)$.

11.2 Definition

$\emptyset \neq U \subseteq A$ heißt affiner Unterraum des affinen Raumes A, falls ein Unterraum V_U von V_A existiert, für den $(U, V_U, T|_{U \times U})$ selbst affiner Raum ist.

11.3 Hilfssatz

Es sei (A, V_A, T) ein affiner Raum und $\emptyset \neq U \subseteq A$. U ist genau dann affiner Unterraum von A, falls für alle $p \in U$ die Menge

$$V_p = \{T(p, q) \mid q \in U\}$$

ein Unterraum von V_A ist.

<u>Beweis:</u>
"$\Rightarrow$"
Für $p \in U$ bilde

$$V_p = \{T(p, q) \mid q \in U\}.$$

Dann gilt:

(i) $\underline{0} = T(p, p) \in V_p$,

(ii) $\forall T(p, q), T(p, r) \in V_p, \forall \lambda, \mu \in K : \underline{x} := \lambda T(p, q) + \mu T(p, r) \in V_U$,

folglich existert $s \in U$ mit $T(p, s) = \underline{x}$ (nach (11.1)(i) für $T|_{U\times U}$), damit ist $\underline{x} = T(p, s) \in V_p$, also V_p linearer Teilraum von V_A.
"$\Leftarrow$"
Zeige zunächst: $V_p = V_{\tilde{p}} \;\; \forall p, \tilde{p} \in U$, dann setze $V_U = V_p$.
Für beliebig fest gewählte $p, \tilde{p} \in U$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrcl} \forall q \in U : & T(p, q) & = & T(p, \tilde{p}) + T(\tilde{p}, q) \\ & & = & -T(\tilde{p}, p) + T(\tilde{p}, q) \\ & & & \in V_{\tilde{p}}, \end{array}$$

also $V_p \subseteq V_{\tilde{p}}$. Analog zeigt man $V_{\tilde{p}} \subseteq V_p$.
Zu zeigen bleiben noch die Eigenschaften von (11.1)(i) und (ii) für $(U, V_U, T|_{U\times U})$.

(ii) Klar, da dies für T gilt.

(i) Injektivität im 2. Argument folgt aus der von T; die Surjektivität von $T|_{U\times U}$ auf V_U ist ebenfalls klar wegen

$$V_U = V_p = \{T(p, q) \mid q \in U\}.$$

□

11.4 Hilfssatz

Es seien $(A_i)_{i\in I}$ affine Teilräume von A. Dann ist

$$D := \bigcap_{i\in I} A_i$$

affiner Teilraum von A mit

$$V_D = \bigcap_{i\in I} V_{A_i}$$

für $D \neq \emptyset$.

<u>Beweis:</u>
Ist D leer, so ist nicht zu zeigen.
Ansonsten wähle $p \in D$ und setze

$$V_p = \{T(p, q) \mid q \in D\}.$$

Hierfür ist

$$\begin{array}{rcl} V_p & = & \bigcap_{i\in I} \{T(p, q) \mid q \in A_i\} \\ & \overset{(11.3)}{=} & \bigcap_{i\in I} V_{A_i}, \end{array}$$

also ist nach (11.3) damit $(D,\, V_p,\, T|_{D\times D})$ ein affiner Unterraum.

$\square$

Zu jeder Teilmenge M von A existiert danach ein kleinster affiner Unterraum U von A, der M enthält, nämlich gerade der Durchschnitt aller affinen Teilräume von A, die M enthalten.

Schreibweise: $D = [M]$,
Bezeichnung: affine Hülle.

Für affine Unterräume A_i $(i \in I)$ von A heißt

$$\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right]$$

der Verbindungsraum der A_i.

Vergleiche analoge Ausführungen über Vektorräume in Lineare Algebra I.
Beachte allerdings: $[\emptyset] = \emptyset$ (affin), jedoch $[\emptyset] = \{\,\underline{o}\,\}$ (linear).

Beispiele:

(i) Für Vektorräume V ist $(V,\, V,\, -)$ affiner Raum mit $T\,(\underline{x},\, \underline{y}) = \underline{x} - \underline{y}$.

(11.1)(i) und (ii) sind offenbar erfüllt!

Es sei U ein affiner Unterraum von $(V,\, V,\, -)$.

Dann gilt für festes $\underline{x} \in U$:

$$\forall\, \underline{y} \in U \;\; \dot{\exists}\; \underline{z} \in V_U \;:\; \underline{y} - \underline{x} = \underline{z} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} \in \underline{x} + V_U,$$

also $U \subseteq \underline{x} + V_U$.

Ist umgekehrt $\underline{y} = \underline{x} + \underline{z} \in \underline{x} + V_U$, so folgt $\underline{y} - \underline{x} \in V_U$ und damit $\underline{y} \in U$, also $\underline{x} + V_U \subseteq U$.
Die affinen Teilräume U sind also gerade die Elemente des Faktorraums V/V_U.

(ii) Es sei A affiner Raum, $A \neq \emptyset$.

Dann ist $\{p\} \subseteq A$ affiner Teilraum mit $V_{\{p\}} = \{\,\underline{o}\,\}$.

Ist andererseits $U \subseteq A$ affiner Teilraum mit $V_U = \{\,\underline{o}\,\}$, so ist $\sharp U = 1$ wegen (11.1)(i).

(iii) Affine Unterräume der Dimension $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right.$ heißen $\left\{ \begin{smallmatrix} \underline{\text{Geraden}} \\ \underline{\text{Ebenen}} \end{smallmatrix} \right.$.

Ist $U \subset A$ affiner Unterraum mit $[U \cup \{p\}] = A$ für ein $p \in A \backslash U$, so heißt U Hyperebene.

(iv) Ist V_A ein Euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, so heißt der affine Raum A Euklidisch-affin bzw. unitär-affin. In diesem Fall definert man als Abstand zweier Punkte $p,\, q \in A$:

$$\overline{p\,q} := \|\, T\,(p,\, q)\| = (B\,(T\,(p,\, q),\, T\,(p,\, q)))^{1/2}.$$

Der Kosinus des von drei verschiedenen Punkten $q \neq p \neq r \neq q$ aus A bestimmten Winkels mit Scheitel p wird definiert durch

$$\cos\,(p;\, q,\, r) := \cos\,(T\,(p,\, q),\, T\,(p,\, r)).$$

Bemerkungen:
Es seien ein A affiner Raum, U_1, U_2 affine Unterräume. Dann gilt:

(i) $U_1 \subseteq U_2 \;\Rightarrow\; V_{U_1} \subseteq V_{U_2}$.

Beachte dazu: Für jedes $p \in U_1$ ist

$$\begin{aligned} V_{U_1} = V_p \;&=\; \{T\,(p,\, q) \mid q \in U_1\} \\ &\subseteq\; \{T\,(p,\, q) \mid q \in U_2\} \\ &=\; V_{U_2}. \end{aligned}$$

(ii) $U_1 \supseteq U_2 \;\wedge\; V_{U_1} \subseteq V_{U_2} \;\Rightarrow\; U_1 = U_2$.
(Für $q_1 \in U_1 \backslash U_2$ und beliebiges $q_2 \in U_2$ existiert eindeutig $\underline{x} \in V_{U_1}$ mit $T(q_1, q_2) = \underline{x}$. Da U_2 affiner Unterraum ist, folgt $q_1 \in U_2$. Widerspruch!)

(iii) Es sei $p \in A$ fest und $\tilde{V}$ Unterraum von V_A; dann ist

$$W := \{q \in A \mid T(p, q) \in \tilde{V}\}$$

ein affiner Unterraum von A.
(Denn: Für $r, s \in W$ beliebig ist

$$T(r, s) = -T(p, r) + T(p, s) \;\in \tilde{V},$$

also $T|_{W \times W}$ Abbildung nach $\tilde{V}$.
Die Injektivität im 2. Argument ist wiederum klar.
Zur Surjektivität im 2. Argument, beachte man, daß zu $p \in W$ und $\underline{x} \in \tilde{V}$ eindeutig ein $q \in A$ mit $T(p, q) = \underline{x}$ existiert.)

11.5 Satz

Sind U_1, U_2 endlich dimensionale Unterräume eines affinen Raumes A, so gilt:

(i) $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim [U_1 \cup U_2] + \dim (U_1 \cap U_2)$
für $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$ oder $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$,

(ii) $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim [U_1 \cup U_2] + \dim (U_1 \cap U_2) + \dim (V_{U_1} \cap V_{U_2})$
für $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

<u>Beweis:</u>
Die Fälle $U_1 = \emptyset$ (bzw. $U_2 = \emptyset$) sind trivial.
Sei nun $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
Nach (11.4) ist $V_{U_1 \cap U_2} = V_{U_1} \cap V_{U_2}$.
Außerdem gilt (vergleiche Bemerkung)

$$V_{U_i} \subseteq V_{[U_1 \cup U_2]} \; (i = 1, 2), \text{ damit } V_{U_1} + V_{U_2} \subseteq V_{[U_1 \cup U_2]}.$$

Wähle nun $p \in U_1 \cap U_2$ und setze

$$W := \{q \in A \mid T(p, q) \in V_{U_1} + V_{U_2}\}.$$

Nach voranstehender Bemerkung ist W affiner Unterraum mit $U_i \subseteq W$ $(i = 1, 2)$ und damit

$$W = [U_1 \cup U_2], \quad V_W = V_{U_1} + V_{U_2}.$$

Satz (2.20) (Dimensionssatz) lehrt dann:

$$\begin{aligned} \dim [U_1 \cup U_2] + \dim (U_1 \cap U_2) &= \dim (V_{U_1} + V_{U_2}) + \dim (V_{U_1} \cap V_{U_2}) \\ &\overset{(2.20)}{=} \dim V_{U_1} + \dim V_{U_2} \\ &= \dim U_1 + \dim U_2. \end{aligned}$$

Schließlich sei $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Nach Definition ist $\dim (U_1 \cap U_2) = -1$.
Fixiere $p_i \in U_i$ $(i = 1, 2)$.
Hierfür gilt:

$$V_{U_1} + V_{U_2} + [T(p_1, p_2)] \subseteq V_{[U_1 \cup U_2]}$$

Setze

$$W := \{q \in A \;\mid\; T(p_1, q) \in V_{U_1} + V_{U_2} + [T(p_1, p_2)]\};$$

nach Bemerkung ist W affiner Teilraum von A mit $U_1 \subseteq W$.

Wegen $T(p_1, q) = T(p_1, p_2) + T(p_2, q)$ ist auch $U_2 \subseteq W$.
Insgesamt folgt demnach:

$$W = [U_1 \cup U_2], \quad V_W = V_{U_1} + V_{U_2} + [T(p_1, p_2)].$$

Hierbei ist $T(p_1, p_2) \notin V_{U_1} + V_{U_2}$, sonst gäbe es $q_i \in U_i$ $(i = 1, 2)$ mit $T(p_1, p_2) = T(p_1, q_1) - T(p_2, q_2)$, also

$$\begin{aligned} T(q_1, q_2) &= T(q_1, p_1) + T(p_1, p_2) + T(p_2, q_2) \\ &= \underline{0}, \end{aligned}$$

also $q_1 = q_2$ im Widerspruch zu $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Dimensionssatz (2.20) liefert:

$$\begin{aligned} \dim [U_1 \cup U_2] &= \dim \big(V_{U_1} + V_{U_2} + [T(p_1, p_2)]\big) \\ &= \dim (V_{U_1} + V_{U_2}) + 1 \\ &= \dim V_{U_1} + \dim V_{U_2} - \dim (V_{U_1} \cap V_{U_2}) - \dim (U_1 \cap U_2). \end{aligned}$$

$\square$

<u>Bemerkung:</u>
Sind p, q verschidene Punkte von A, so gilt:

$$\dim [\{p\} \cup \{q\}] = 1.$$

Ist $\dim A = n$, so hat eine Hyperebene U von A die Dimension $n - 1$, für Punkte $p_0, \ldots, p_k \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} \dim [U \cup \{p_0\}] &\leq \dim U + 1, \\ \dim [\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_k\}] &\leq k. \end{aligned}$$

(Dies folgt unmittelbar aus (11.5).)

11.6 Definition

Zwei nicht leere Unterräume U_1, U_2 eines affinen Raumes A heißen parallel ($U_1 \parallel U_2$), falls $V_{U_1} \subseteq V_{U_2}$ oder $V_{U_2} \subseteq V_{U_1}$ gilt.

<u>Beispiel:</u>
In $A = \mathbb{R}^3$ seien g_1, g_2 zwei Geraden.
Wir betrachten $\dim [g_1 \cup g_2]$ in Abhängigkeit von der Lage der Geraden zueinander.

$g_1 \neq g_2$?	$g_1 \cap g_2 = \emptyset$?	$g_1 \parallel g_2$? *)	Konfiguration	$\dim [g_1 \cup g_2]$
ja	ja	nein	'/, **)	3
ja	nein	nein	X	2
ja	ja	ja	//	2
nein	nein	ja	/	1

∗) vergleiche Definition (11.6)

∗∗) windschief

11.7 Hilfssatz

Es sei A ein affiner Raum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $U \neq \emptyset$ Unterraum von A und H eine Hyperebene von A. Dann sind U und H parallel oder es gilt

$$\dim U \cap H = \dim U - 1.$$

Beweis:
Aus $U \subseteq H$ folgt $V_U \subseteq V_H$, also $U \parallel H$.
Also sei im folgenden $U \not\subseteq H$ und somit $[U \cup H] = A$.
(11.5) liefert wegen $\dim H = n - 1$:

(a) Für $U \cap H \neq \emptyset$:
$$\dim U + (n-1) = n + \dim (U \cap H),$$
also $\dim (U \cap H) = \dim U - 1$.

(b) Für $U \cap H = \emptyset$:
$$\dim U + (n-1) = n - 1 + \dim (V_U \cap V_H),$$
also $\dim (V_U \cap V_H) = \dim U = \dim V_U$,
also $V_U \cap V_H = V_U$,
also $V_U \subseteq V_H$,
also $U \parallel H$.

□

Speziell: $n = 2$
2 Geraden in einer Ebene sind entweder parallel, oder sie besitzen einen Schnittpunkt.

11.8 Definition

Es sei A ein affiner Raum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Ein geordnetes Tupel $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in A^{n \times 1}$ heißt Koordinatensystem von A, wenn die Vektoren $T(p_0,\, p_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ linear unabhängig sind. p_0 heißt n diesem Fall Anfangspunkt (Ursprung) des Koordinatensystems.

Bemerkung:
$$(p_0, p_1, \ldots, p_n) \text{ Koordinatensystem } \Leftrightarrow\ [\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_n\}] = A$$

(Beweis:
Setze $[\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_i\}] =: U_i$. Für affine Unterräume U von A und $p \in A$ betrachte $k := \dim [U \cup \{p\}]$.
1. Fall: $U \cap \{p\} \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ p \in U$:
$$\begin{aligned} k &= \dim U + \dim\{p\} - \dim\,(U \cap \{p\}) \\ &= \dim U. \end{aligned}$$
2. Fall: $U \cap \{p\} = \emptyset \ \Leftrightarrow\ p \notin U$:
$$\begin{aligned} k &= \dim U + \underbrace{\dim\{p\}}_{=0} - \underbrace{\dim\,(U \cap \{p\})}_{=-1} - \underbrace{\dim\,(V_U \cap V_{\{p\}})}_{=0} \\ &= \dim U + 1. \end{aligned}$$
Speziell folgt daraus stets $\dim [\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_i\}] \leq i$, und wir erhalten
$$\begin{aligned} p_0, p_1, \ldots, p_n \text{ Koordinatensystem von } A &\Leftrightarrow T\,(p_0,\, p_i)\ (1 \leq i \leq n) \text{ linear unabhängig} \\ &\Leftrightarrow p_\nu \notin [\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_{\nu-1}\}]\ \ (1 \leq \nu \leq n) \\ &\Leftrightarrow \dim [\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_\nu\}] = \nu\ \ (1 \leq \nu \leq n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ \dim\left[\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_n\}\right] = n \\ &\Leftrightarrow \ \left[\{p_0\} \cup \ldots \cup \{p_n\}\right] = A \end{aligned}$$

□)

Ist $(p_0, \ldots, p_n)$ ein Koordinatensystem von A und $q \in A$ beliebig, so läßt sich q durch Koordinaten $q_1, \ldots, q_n \in K$ beschreiben, die sich eindeutig aus der Darstellung

$$T(p_0, q) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, T(p_0, p_i)$$

ergeben.

Analog folgt für $r \in A \ : \ T(p_0, r) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, T(p_0, p_i)$ und damit

$$\begin{aligned} T(q, r) &= T(q, p_0) + T(p_0, r) \\ &= -T(p_0, q) + T(p_0, r) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (r_i - q_i) \, T(p_0, p_i). \end{aligned}$$

Sind nun $(p_0, \ldots, p_n)$, $(q_0, \ldots, q_n)$ zwei Koordinatensysteme, so liefert die Zuordnung

$$T(p_0, p_i) \longmapsto T(q_0, q_i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

mittels linearer Fortsetzung eine Basistransformation von V_A.
Die zugehörige Matrix sei etwa $T = (t_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, K)$, so daß

$$T(q_0, q_i) = \sum_{\mu=1}^{n} t_{\mu i} \, T(p_0, p_\mu) \quad (1 \leq i \leq n)$$

wird. Ferner existiert $\underline{s} \in K^n$ mit

$$T(p_0, q_0) = \sum_{i=1}^{n} s_i \, T(p_0, p_i).$$

Die Transformation zweier Koordinatensysteme wird daher beschrieben durch $\underline{s} \in K^n$, $T \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zu vorgebenen $\underline{s} \in K^n$, $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ erhält man in der angegebenen Weise auch aus $(p_0, \ldots, p_n)$ ein neues Koordinatensystem $(q_0, \ldots, q_n)$:

11.9 Satz

Einer Koordinatentransformation

$$(p_0, \ldots, p_n) \longrightarrow (q_0, \ldots, q_n)$$

entspricht eindeutig $T = (t_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, K)$, $\underline{s} \in K^n$. Für die Koordinaten $r_1, \ldots, r_n$ von $r \in A$ bzgl. $(p_0, \ldots, p_n)$ sind Koordinaten bzgl. $(q_0, \ldots, q_n)$ gegeben durch $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n$ mit

$$\underline{r} = \underline{s} + T \, \underline{\tilde{r}}.$$

Beweis:
1. Teil bereits erledigt.
2. Teil durch Nachrechnen!

□

Bemerkung:
Ist A überdies Euklidisch-affin bzw. unitär-affin und $T(p_0, p_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ eine Orthonormalbasis von V_A, so heißt $(p_0, \ldots, p_n)$ ein kartesisches Koordinatensystem.

11.10 Hilfssatz

Die Menge U aller Punkte von A deren Koordinaten bzgl. eines vorgegebenen Koordinatensystems $(p_0, \ldots, p_n)$ Lösungen des linearen Gleichungssystem $(\alpha_{\mu\nu})\,\underline{x} = \underline{b}$ $((\alpha_{\mu\nu}) \in K^{m\times n})$ sind, bilden einen Unterraum U von A. Für $U \neq \emptyset$ ist

$$\dim U = n - \mathrm{rg}\,(\alpha_{\mu\nu}).$$

Beweis:
Für $U = \emptyset$ ist nichts zu zeigen.
Andernfalls sei $x_1, \ldots, x_n$ Koordinatentupel eines Punktes von A, welches das Gleichungssystem löst. Für weitere solche Tupel $(y_1, \ldots, y_n)$ lösen dann

$$y_i - x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

das zugehörige homogene System. Damit ist

$$V_U := \{T\,(\underline{x},\, \underline{y}) \mid \underline{y} \in U\}$$

ein Unterraum von V_A, und zwar der Dimension $n - \mathrm{rg}\,(\alpha_{\mu\nu})$. Also ist U ein Unterraum von A von eben dieser Dimension.

$\square$

Speziell: $m = 1$ und $\mathrm{rg}\,(\alpha_{1\nu}) = 1$.
Hierfür ist

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\, x_i = b_1$$

die Gleichung einer Hyperebene.

Drei Punkte p, q, r eines affinen Raumes A heißen kollinear, wenn sei auf einer Geraden liegen. Für $p = q$ ist dies trivial, $p \neq q$ ist gleichwertig mit $T\,(p,\, r) = \lambda\, T\,(p,\, q)$ für passendes $\lambda \in K$. In diesem Fall heißt λ Teilverhältnis von p, q, r:

$$\lambda = TV\,(p,\, q,\, r).$$

Sind p_i, q_i, r_i Koordinaten $(1 \leq i \leq n)$ von p, q, r bzgl. irgendeinem festen Koordinatensystem von A, so gilt

$$r_i - p_i = \lambda\,(q_i - p_i) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Wegen $q_j \neq p_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ (wegen $p \neq q$) folgt

$$TV\,(p,\, q,\, r) = \frac{r_j - p_j}{q_j - p_j}.$$

Weitere Kennzeichnung affiner Räume

11.11 Hilfssatz

Gegeben sei eine (Punkt-)menge A, ein Vektorraum V_A, sowie Abbildungen

$$T\,:\, A \times A \longrightarrow V_A \quad \text{und} \quad F\,:\, A \times V_A \longrightarrow A,$$

die mittels

$$F\,(p,\, \underline{x}) = q \;\Leftrightarrow\; T\,(p,\, q) = \underline{x} \quad \forall p,\, q \in A,\; \forall \underline{x} \in V_A$$

zusammenhängen. Genau dann ist $(A,\, V_A,\, T)$ affiner Raum, wenn F die folgenden 2 Bedingungen erfühlt:

(i) $\forall p,\, q \in A\;\; \dot{\exists}\; \underline{x} \in V_A \;:\; F\,(p,\, \underline{x}) = q,$

(ii) $\forall p \in A\; \forall \underline{x},\, \underline{y} \in V_A \;:\; F\,(F\,(p,\, \underline{x}),\, \underline{y}) = F\,(p,\, \underline{x} + \underline{y}).$

Beweis:
"$\Rightarrow$"
Nach Vorraussetzung (T Abbildung) existiert zu $p,\, q \in A$ eindeutig $\underline{x} \in V_A$ mit $T\,(p,\, q) = \underline{x}$, und hierfür ist $F\,(p,\, \underline{x}) = q$. Weiter ist für

$$F\,(p,\, \underline{x}) = q = F\,(p,\, \underline{\tilde{x}})$$

dann

$$\underline{x} = T\,(p,\, q) = \underline{\tilde{x}}.$$

Ist schließlich
$$\begin{aligned} F\,(p,\, \underline{x}) &= q_1, \\ F\,(F\,(p,\, \underline{x}),\, \underline{y}) &= q_2, \\ F\,(p,\, \underline{x} + \underline{y}) &= q_3, \end{aligned}$$
so folgt wegen

$$q_2 = F\,(q_1,\, \underline{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y} = T\,(q_1,\, q_2)$$

und

$$q_1 = F\,(p,\, \underline{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x} = T\,(p,\, q_1)$$

sodann

$$\underline{x} + \underline{y} = T\,(p,\, q_1) + T\,(q_1,\, q_2) = T\,(p,\, q_2) \;\Leftrightarrow\; q_2 = F\,(p,\, \underline{x} + \underline{y}).$$

"$\Leftarrow$"
Es sei die Vorraussetzung für F erfüllt. Zu $p \in A,\ \underline{x} \in V_A$ existiert stets $q \in A$ mit

$$F\,(p,\, \underline{x}) = q \;\Leftrightarrow\; T\,(p,\, q) = \underline{x}.$$

Für $p,\, q,\, r \in A$ mit $T\,(p,\, q) = \underline{x},\ T\,(q,\, r) = \underline{y}$ gilt:

$$T\,(p,\, q) + T\,(q,\, r) = \underline{x} + \underline{y}$$

und außerdem

$$F\,(p,\, \underline{x} + \underline{y}) = F\,(F\,(p,\, \underline{x}),\, \underline{y}) = r \;\Leftrightarrow\; T\,(p,\, r) = \underline{x} + \underline{y}.$$

□

11.12 Definition

Zu zwei affinen Räumen $(A,\, V_A,\, T_A)$ bzw. $(B,\, V_B,\, T_B)$ heißt

$$\varphi\,:\; A \longrightarrow B$$

affine Abbildung, falls hierzu $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}\,(V_A,\, V_B)$ mit

$$T_B\,(\varphi\,(p),\, \varphi\,(q)) = \tilde{\varphi}\,(T_A\,(p,\, q)) \quad \forall p,\, q \in A$$

existiert. φ heißt Isomorphismus, falls $\varphi,\, \tilde{\varphi}$ beide bijektiv sind.

11.13 Satz

Jeder nicht leere affine Raum $(A,\, V_A,\, T)$ ist isomorph zum affinen Raum $(V_A,\, V_A,\, -)$.

Beweis:
Wähle $p \in A$ fest (als Urspung) und setze

$$\varphi = \varphi_p\,:\; V_A \longrightarrow A\;:\; \underline{x} \longmapsto F\,(p,\, \underline{x}), \quad \tilde{\varphi} = \mathrm{id}_{V_A}\,.$$

$\tilde{\varphi}$ ist bijektive lineare Abbildung!
φ injektiv:

$$\begin{aligned} \varphi\,(\,\underline{x}) = \varphi\,(\,\underline{y}) \quad &\Rightarrow \quad F\,(p,\, \underline{x}) = F\,(p,\, \underline{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad \underline{x} = \underline{y} \end{aligned}$$

φ surjektiv:
$$\forall p,\, q \in A \ \dot{\exists}\ \underline{x} \in V_A \ :\ F(p,\, \underline{x}) = q$$

$\forall\, \underline{x},\, \underline{y} \in V_A$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\,(T\,(\,\underline{x},\, \underline{y})) &= \tilde{\varphi}(\,\underline{y} - \underline{x}) \\ &= \underline{y} - \underline{x} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} T\,(\varphi\,(\,\underline{x}),\, \varphi\,(\,\underline{y})) &= T\,(\underbrace{F\,(p,\, \underline{x})}_{q},\, \underbrace{F\,(p,\, \underline{y})}_{r}) \\ &= -T\,(p,\, q) + T\,(p,\, r) \\ &= -\,\underline{x} + \underline{y}. \end{aligned}$$

□

<u>Bemerkung:</u>
$\varphi = \varphi_p$ hängt von der Wahl von $p \in A$ ab; also ist der angegebene Isomorphismus nicht kanonisch. Vektorräume entsprechen demnach affinen Räumen mit ausgezeichneten Punkten.

Der Einfachheit halber betrachten wir ab jetzt nur noch affine Räume der Form $(V,\, V, -)$.

Ist dann hierin

$$\begin{aligned} U &= [\{\,\underline{v}_0\} \cup \ldots \cup \{\,\underline{v}_n\}] \\ &= \underline{v}_0 + [\,\underline{v}_1 - \underline{v}_0, \ldots,\, \underline{v}_n - \underline{v}_0] \end{aligned}$$

Unterraum, also
$$U = \left\{ \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(\,\underline{v}_i - \underline{v}_0) \,\middle|\, \lambda_i \in K \right\},$$

so setzen wir $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, und erhalten

$$U = \left\{ \sum_{i=o}^{n} \lambda_i\, \underline{v}_i \,\middle|\, \lambda_i \in K,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

11.14 Definition

In einem affinen Teilraum U von $(V,\, V-)$ heißt $\underline{u} \in U$ <u>affine Linearkombination</u> von $\underline{v}_o, \ldots,\, \underline{v}_n \in U$, falls
$$\underline{u} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, \underline{v}_i \text{ mit } \lambda_i \in K,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$
ist.

11.15 Hilfssatz

Es sei $U \subseteq V$ und $1 + 1 \neq 0$ in K. Dann gilt:

$$U \text{ affiner Unterraum von } (V,\, V, -) \ \Leftrightarrow\ \forall\, \underline{u},\, \underline{v} \in U\ \forall \lambda \in K\ :\ (1 - \lambda)\,\underline{u} + \lambda\,\underline{v} \in U$$

("U bzgl. Geradenbildung abgeschlossen").

<u>Beweis:</u>
O.B.d.A. sei $U \neq \emptyset$.

"$\Rightarrow$"
U ist von der Form $U = \underline{x} + V_U$ für passendes $\underline{x} \in V$, V_U Teilraum von V:

$$U = \{\, \underline{x} + \underline{y} \mid \underline{y} \in V_U \}.$$

Seien also $\underline{x} + \underline{u}, \underline{x} + \underline{v} \in U$, $\lambda \in K$. Hierfür sind $\underline{u}, \underline{v} \in V_U$, und damit folgt

$$(1-\lambda)\,(\underline{x} + \underline{u}) + \lambda\,(\underline{x} + \underline{v}) \quad = \quad \underline{x} + \underbrace{((1-\lambda)\,\underline{u} + \lambda\,\underline{v})}_{=\,\underline{w} \in V_U} \in \underline{x} + V_U = U.$$

"$\Leftarrow$"
Fixiere $\underline{x} \in U$ und setze

$$V_U := \{\, \underline{y} - \underline{x} \mid \underline{y} \in U \}.$$

Hierfür ist "V_U Unterraum von V" zu zeigen (vergleiche (11.3)). Wegen $\underline{x} \in U$ ist

$$\underline{x} - \underline{x} = \underline{0} \ \in V_U.$$

Sei weiter $\underline{y} - \underline{x} \in V_U$, $\lambda \in K$, dann sind $\underline{y}, \underline{x} \in U$, also

$$(1-\lambda)\,\underline{x} + \lambda\,\underline{y} \ \in U,$$

also ist auch

$$\lambda\,(\underline{y} - \underline{x}) = (1-\lambda)\,\underline{x} + \lambda\,\underline{y} - \underline{x} \ \in V_U.$$

Seien schließlich $\underline{y} - \underline{x}, \underline{z} - \underline{x} \in V_U$, also $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in U$. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ (beachte die Voraussetzung $1 + 1 \neq 0$) folgt

$$\frac{1}{2}\,\underline{y} + \frac{1}{2}\,\underline{z} \ \in U,$$

damit für $\lambda = 2$ dann auch

$$-\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) \ \in U,$$

also

$$(\underline{y} - \underline{x}) + (\underline{z} - \underline{x}) \ \in V_U.$$

$\square$

11.16 Hilfssatz

Es sei U eine Teilmenge von $(V, V, -)$ und $1 + 1 \neq 0$ in K. Dann gilt für

$$U_0 := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\underline{x}_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in K,\ \underline{x}_i \in U,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}:$$

$[U] = U_0$.

Beweis:
O.B.d.A. sei $U \neq \emptyset$.
Wir zeigen: (i) U_0 ist affiner Unterraum,
(ii) $U \subseteq U_0$,
(iii) U_0 ist minimal mit Eigenschaften (i) und (ii).

(i) Es seien

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\underline{x}_i,\ \sum_{j=1}^{m} \mu_j\,\underline{y}_j \ \in U_0,\ \lambda \in K.$$

Betrachte gemäß (11.15)

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\underline{x}_i + \lambda \sum_{j=1}^{m} \mu_j\,\underline{y}_j = \sum_{k=1}^{m+n} \gamma_k\,\underline{z}_k$$

mit $\underline{z}_k = \begin{cases} \underline{x}_k & \text{für } k \leq n \\ \underline{y}_{k-n} & \text{für } k > n \end{cases}$, sowie $\gamma_k = \begin{cases} (1-\lambda)\,\lambda_k & \text{für } k \leq n \\ \lambda\,\mu_{k-n} & \text{für } n < k \leq m+n \end{cases}$. Hierin ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+n} \gamma_k &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_k + \sum_{k=n+1}^{m+n} \gamma_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda)\,\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda\,\mu_j \\
&= (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \lambda \sum_{j=1}^{m} \mu_j \\
&= (1-\lambda) + \lambda \\
&= 1.
\end{aligned}$$

U_0 ist folglich bzgl. Geradenabbildung abgeschlossen, also U_0 affiner Unterraum nach (11.15).

(ii) $U \subseteq U_0$, denn $\forall\, \underline{x} \in U$ ist $1 \cdot \underline{x} \in U_0$.

(iii) Dazu sei $\tilde{U}$ affiner Unterraum mit $U \subseteq \tilde{U}$, etwa $\tilde{U} = \underline{x} + V_{\tilde{U}}$. Wir zeigen: $U_0 \subseteq \tilde{U}$.
Ist etwa

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \underline{x}_i \in U_0,$$

so folgt zunächst $\underline{x}_i \in U \subseteq \tilde{U}$ $(1 \leq i \leq m)$, also $\underline{x}_i - \underline{x} \in V_{\tilde{U}}$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
V_{\tilde{U}} \ni \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,(\underline{x}_i - \underline{x}) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \underline{x}_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}_{=1}\, \underline{x} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \underline{x}_i - \underline{x},
\end{aligned}$$

also

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \underline{x}_i \in \underline{x} + V_{\tilde{U}}.$$

□

11.17 Definition

Elemente $\underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_n$ eines affinen Raumes $(V, V, -)$ heißen
<u>affin abhängig</u>, falls $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$, nicht alle 0, mit

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, \underline{x}_i = \underline{0}$$

existieren. Andernfalls heißen $\underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_n$ <u>affin unabhängig</u>.

11.18 Hilfssatz

$\underline{x}_o, \ldots, \underline{x}_k$ affin <u>abhängig</u> $\Leftrightarrow$ $\underline{x}_1 - \underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_k - \underline{x}_0$ linear abhängig.

<u>Beweis:</u>
$\underline{x}_1 - \underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_k - \underline{x}_0$ linear abhängig

$\Leftrightarrow$ $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$, nicht alle 0, mit $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,(\underline{x}_i - \underline{x}_0) = \underline{0}$

$\Leftrightarrow$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$, nicht alle 0, mit

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \underline{x}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i)}_{=: \, \alpha_0} \, \underline{x}_0$$

$\Leftrightarrow$ $\exists \alpha_0, \dots, \alpha_k$, nicht alle 0, mit

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, \underline{x}_i = \underline{0} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_k$ affin abhängig.

$\square$

Bemerkungen zu affinen Abbildungen

Gemäß (11.12) ist eine affine Abbildung $\varphi \,:\, A \to B$ gegeben durch eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} \,:\, V_A \to V_B$ mit

$$T_B \, (\varphi \, (p), \, \varphi \, (q)) = \tilde{\varphi} \, (T_A \, (p, \, q)).$$

Ist umgekehrt eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} \,:\, V_A \to V_B$ gegeben, so läßt sich $\varphi \, (a) = b$ für $(a, \, b) \in A \times B$ (beliebig fest) vorschreiben. Danach existiert dann genau eine affine Abbildung $\varphi \,:\, A \to B$ mit $\tilde{\varphi}$ als zugeordneter linearer Abbildung und $\varphi \, (a) = b$. Dies gilt wegen

$$\begin{aligned} T_B \, (b, \, \varphi(q)) &= T_B \, (\varphi \, (a), \, \varphi \, (q)) \\ &= \tilde{\varphi} \, (T_A \, (a, \, q)) \quad \forall q \in A \end{aligned}$$

und $T_B \, (b, \quad)$ injektiv! Damit haben wir das nachfolgende Resultat gezeigt:

11.19 Hilfssatz

Zu vorgegebenen Punkten $a \in A, \ b \in B$ entsprechen die $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom} \, (V_A, \, V_B)$ umkehrbar eindeutig den affinen Abbildungen $\varphi \,:\, A \to B$ mit $\varphi \, (a) = b$.

11.20 Hilfssatz

Es seien $A, \, B, \, C$ affine Räume und

$$\varphi \,:\, A \longrightarrow B, \quad \psi \,:\, B \longrightarrow C$$

affine Abbildungen. Dann gilt:

(i) φ $\begin{array}{c}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\end{array}$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ $\begin{array}{c}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv;}\end{array}$

(ii) U affiner Unterraum von $A \Rightarrow$ $\varphi \, (U)$ affiner Unterraum von B mit $V_{\varphi \, (U)} = \tilde{\varphi} \, (V_U)$;

(iii) $\tilde{U}$ affiner Unterraum von $B \Rightarrow$ $\varphi^{-1} \, (\tilde{U})$ affiner Unterraum von A mit $V_{\varphi^{-1} \, (\tilde{U})} = \tilde{\varphi}^{-1} \, (V_{\tilde{U}})$;

(iv) $\psi \circ \varphi \,:\, A \to C$ ist affine Abbildung mit $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}$;

(v) φ bijektiv $\Rightarrow$ φ^{-1} ist affine Abbildung mit $\widetilde{\varphi^{-1}} = \tilde{\varphi}^{-1}$.

Beweis:

(i) φ injektiv $\Leftrightarrow$ $(\forall q, r \in A : \varphi(q) = \varphi(r) \Rightarrow q = r)$

$\Leftrightarrow$ $(\forall p, q, r \in A : T_B(\varphi(p), \varphi(q)) = T_B(\varphi(p), \varphi(r)) \Rightarrow q = r)$

(T_B im 2. Argument injektiv)

$\Leftrightarrow$ $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V_A : \tilde{\varphi}(\underline{x}) = \tilde{\varphi}(\underline{y}) \Rightarrow \underline{x} = \underline{y}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ injektiv

φ surjektiv $\Leftrightarrow$ $\forall b \in B\ \exists a \in A : \varphi(a) = b$

$\Leftrightarrow$ $\forall p \in A\ \forall \underline{y} \in V_B\ \exists a \in A : T_B(\varphi(p), \varphi(a)) = \underline{y}$

(T_B im 2. Argument surjektiv)

$\Leftrightarrow$ $\forall \underline{y} \in V_B\ \exists \underline{x} \in V_A : \tilde{\varphi}(\underline{x}) = \underline{y}$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ surjektiv

(ii) Zu zeigen: $(\varphi(U), \tilde{\varphi}(V_U), T_B|_{\varphi(U)\times\varphi(U)})$ ist affiner Raum.

Dazu fixiere gemäß (11.3) $\varphi(p) \in \varphi(U)$, setze

$$W = \{T_B(\varphi(p), \varphi(q)) \mid q \in U\}.$$

Dies stimmt jedoch mit $\tilde{\varphi}(V_U)$ überein.

(iii) Fixiere $p \in \varphi^{-1}(\tilde{U})$, setze

$$W := \{T_A(p, q) \mid q \in \varphi^{-1}(\tilde{U})\}$$

und wende (11.3) an. W ist offenbar $\tilde{\varphi}^{-1}(V_{\tilde{U}})$.

(iv) Gilt wegen

$$\begin{aligned} T_C(\psi\varphi(p), \psi\varphi(q)) &= \tilde{\psi}(T_B(\varphi(p), \varphi(q))) \\ &= \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(T_A(p, q))). \end{aligned}$$

(v) Klar nach (i) und (iv).

□

11.21 Hilfssatz

Es sei $\varphi : A \to B$ affine Abbildung. Dann gilt:

(i) Sind U_1, U_2 parallele affine Unterräume von A, so ist $\varphi(U_1) \parallel \varphi(U_2)$.

(ii) Sind $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ parallele affine Unterräume von B, so ist $\varphi^{-1}(\tilde{U}_1) \parallel \varphi^{-1}(\tilde{U}_2)$.

(iii) $x, y, z \in A$ kollinear $\Rightarrow$ $\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)$ kollinear; für $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ ist

$$TV(x, y, z) = TV(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)).$$

Beweis:

(i) O.B.d.A. sei $V_{U_1} \subseteq V_{U_2}$; dann ist

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}(V_{U_1}) & \subseteq & \tilde{\varphi}(V_{U_2}), \quad \text{also } \varphi(U_1) \parallel \varphi(U_2). \\ {\scriptstyle (11.20)}\ \| & & \| \\ V_{\varphi(U_1)} & & V_{\varphi(U_2)} \end{array}$$

(ii) Analog zu (i).

(iii) x, y, z kollinear

$\Rightarrow$ $\dim U \leq 1$ für $U = [\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}]$

$\Rightarrow$ $\dim \varphi(U) = \dim \tilde{\varphi}(V_U) \leq 1$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$ kollinear.

Für $x \neq y$ sei $T_A(x, z) = \gamma T_A(x, y)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} T_B(\varphi(x), \varphi(z)) &= \tilde{\varphi}(T_A(x, z)) \\ &= \tilde{\varphi}(\gamma T_A(x, y)) \\ &= \gamma \tilde{\varphi}(T_A(x, y)) \\ &= \gamma T_B(\varphi(x), \varphi(y)). \end{aligned}$$

Zur Bildung von

$$TV(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z))$$

wird zusätzlich $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ benötigt.

□

11.22 Hilfssatz

Es sei $(p_0, \ldots, p_n)$ ein Koordinatensystem des affinen Raumes A, $(q_0, \ldots, q_n)$ eines des affinen Raumes B. Dann existiert genau eine affine Abbildung

$$\varphi : A \to B \text{ mit } \varphi(p_\nu) = q_\nu \ (1 \leq \nu \leq n).$$

φ ist genau dann injektiv, falls $(q_0, \ldots, q_n)$ ein Koordinatensystem von

$$\tilde{U} = \varphi(U) = [\{q_0\} \cup \ldots \cup \{q_n\}]$$

ist.

Beweis:
Zur Basis $T_A(p_0, p_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ von V_A existiert genau eine lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : V_A \longrightarrow V_B \text{ mit } \tilde{\varphi}(T_A(p_0, p_i)) = T_B(q_0, q_i).$$

$\tilde{\varphi}$ ist genau dann injektiv, falls die $T_B(q_0, q_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ linear unabhängig sind.
Der Rest folgt mit (11.19) und (11.20)(ii).

□

11.23 Definition

Eine bijektive affine Abbildung von A auf sich heißt Affinität. Bzgl. Hintereinanderausführung bilden die Affinitäten eine Gruppe, die sogenannte affine Gruppe von A. Eine Affinitität von A heißt Translation, falls

$$T(p, \varphi(p)) = T(q, \varphi(q)) \quad \forall p, q \in A$$

gilt. In diesem Fall heißt $T(p, \varphi(p)) \in V_A$ Translationsvektor.

11.24 Hilfssatz

Für Affinitäten φ von A sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) φ Translation,

(ii) $\forall p, q \in A : T(\varphi(p), \varphi(q)) = T(p, q)$,

(iii) $\tilde{\varphi} = \mathrm{id}_{V_A}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ Translation} &\Leftrightarrow \forall p,\, a \in A:\ T(p,\varphi(p)) = T(q,\varphi(q))\\
&\Leftrightarrow \forall p,\, q \in A:\ T(\varphi(p),\varphi(q)) = T(\varphi(p),p) + T(p,q) + T(q,\varphi(q)) = T(p,q)\\
&\Leftrightarrow \forall p,\, q \in A:\ \tilde{\varphi}(T(p,q)) = T(p,q)\\
&\Leftrightarrow \tilde{\varphi} = \mathrm{id}_{V_A}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel:
Es sei $A = (V, V, -)$ und φ Affinitität mit zugehöriger linearer Abbildung $\tilde{\varphi}$ (φ bijektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ bijektiv). Wähle $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ als Basis von V, $\underline{0} = \underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ als Koordinatensystem von V.
Es gilt für $\underline{x} \in A$:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \underline{x}_i \quad (\lambda_i \in K)$$

sowie

$$\begin{aligned}
T(\varphi(\underline{x}), \varphi(\underline{0})) &= \varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{0})\\
&= \tilde{\varphi}(\underline{x} - \underline{0})\\
&= \tilde{\varphi}(\underline{x})\\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \tilde{\varphi}(\underline{x}_i),
\end{aligned}$$

also

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{0}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \tilde{\varphi}(\underline{x}_i).$$

Da φ injektiv ist, ist $\tilde{\varphi}(\underline{x}_1), \dots, \tilde{\varphi}(\underline{x}_n)$ Basis von V und somit $\varphi(\underline{0}), \tilde{\varphi}(\underline{x}_1), \dots, \tilde{\varphi}(\underline{x}_n)$ Koordinatensystem von V. $\tilde{\varphi}$ wird bzgl. der Basen $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ bzw. $\varphi(\underline{x}_1), \dots, \varphi(\underline{x}_n)$ durch $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ beschrieben, und wir erhalten dann

$$\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{0}) + T\,\underline{x}.$$

Wir betrachten speziell die Ebene als 2-dimensionalen affinen Raum mit Koordinatensystem

$$p_0 = \underline{0}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist dann φ Affinität , so folgt

$$\varphi(\underline{x}) = \underline{s} + T\,\underline{x}, \quad \underline{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Für

$$p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Bilder

$$\begin{aligned}
\varphi(p) &= \begin{pmatrix} s_1 + t_{11}\,x_1 + t_{12}\,x_2 \\ s_2 + t_{21}\,x_1 + t_{22}\,x_2 \end{pmatrix},\\
\varphi(q) &= \begin{pmatrix} s_1 + t_{11}\,y_1 + t_{12}\,y_2 \\ s_2 + t_{21}\,y_1 + t_{22}\,y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wie sehen nun Affinitäten aus, für die $\overline{p\,q} \parallel \overline{\varphi(p)\,\varphi(q)}$ gilt (Dilatationen)?
Die Gerade durch $\varphi(p)$, die zu $\overline{p\,q}$ parallel ist, muß durch $\varphi(q)$ gehen:

$$\varphi(p) + \lambda \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix} = \varphi(q).$$

Dies ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s_1 + t_{11}\,x_1 + t_{12}\,x_2 + \lambda\,(y_1 - x_1) &= s_1 + t_{11}\,y_1 + t_{12}\,y_2 \\ s_2 + t_{21}\,x_1 + t_{22}\,x_2 + \lambda\,(y_1 - x_1) &= s_2 + t_{21}\,y_1 + t_{22}\,y_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lambda\,(y_1 - x_1) &= t_{11}\,(y_1 - x_1) + t_{12}\,(y_2 - x_2) \\ \lambda\,(y_2 - x_2) &= t_{21}\,(y_1 - x_1) + t_{22}\,(y_2 - x_2). \end{aligned}$$

Letzteres muß nun für beliebige $p \neq q$ gelten, speziell liefern die Werte

$y_1 = x_1 \wedge y_2 \neq x_2$ mittels 1. Gleichung: $t_{12} = 0$,
$y_2 = x_2 \wedge y_1 \neq x_1$ mittels 2. Gleichung: $t_{21} = 0$.

Folglich muß $\lambda = t_{11} = t_{22}$ gelten, d.h.

$$\varphi\,(\underline{x}) = \underline{s} + \lambda\,I_2\,\underline{x}.$$

Ist speziell $\lambda = 1$, so heißt φ <u>Translation</u> (Dilatation ohne Fixpunkt, oder Identität).
Denn $\varphi\,(p) \neq p \quad \forall p \in K^2$ führt auf

$$\begin{pmatrix} s_1 + \lambda\,x_1 \\ s_2 + \lambda\,x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overset{\forall \binom{x_1}{x_2} \in K^2}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} s_1 + (\lambda - 1)\,x_1 \\ s_2 + (\lambda - 1)\,x_2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}\,.$$

Für $\lambda = 1$ ist dies für alle $\underline{s} \neq \underline{0}$ erfüllt.
Für $\lambda \neq 1$ ist $x_1 = \dfrac{s_1}{1-\lambda}$, $x_2 = \dfrac{s_2}{1-\lambda}$ stets Fixpunkt!

<u>Weiters Beispiel:</u>
A affiner Raum über dem Körper K mit Koordinatensystem $(p_0, \ldots, p_n)$. Nach (11.22) existiert genau eine affine Abbildung

$$\varphi\,:\, K^n \longrightarrow A \text{ mit } \varphi\,(\underline{0}) = p_0 \text{ und } \varphi\,(\underline{e}_i) = p_i \;\; (1 \leq i \leq n).$$

Für $p \in A$ heißt dann $\varphi^{-1}(p) \in K^N$ <u>Koordinatenvektor</u> von p bzgl. $(p_0, \ldots, p_n)$.

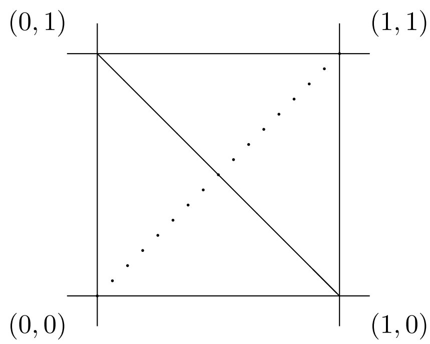
Sind etwa p_0, p_1, p_2 drei verschiedene Punkte von A, so spannen $T\,(p_0,\, p_1)$, $T\,(p_0,\, p_2)$ ein Parallelogramm auf. Bzgl. der obigen Abbildung φ besitzt dieses als Urbild in K^2 das Quadrat mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $1 + 1 \neq 0$ in K hat der Diagonalenschnittpunkt die Koordinaten $\binom{1/2}{1/2}$, d.h. die Diagonalen halbieren sich. Invarianz des Teilverhältnisses bei affinen Abbildungen ((11.21)) lehrt:

Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Betrachte jedoch $K = \mathbb{F}_2$!



Die Geraden durch (0, 0) und (1, 1) bzw. (0, 1) und (1, 0) sind offensichtlich nicht gleich und haben keinen Schnittpunkt, sind also parallel.

11.25 Definition

Im Euklidsch-affinen bzw. unitär-affinen Raum A heißt eine Affinität φ Kongruenz, wenn für alle $p,\, q \in A$ gilt:

$$\overline{\varphi\,(p)\,\varphi\,(q)} = \overline{p\,q}.$$

φ heißt ähnlich, falls es ein $c > 0$ mit

$$\overline{\varphi\,(p)\,\varphi\,(q)} = c\,\overline{p\,q} \quad \forall p,\, q \in A$$

gibt.

Bemerkung:

Kongruenzen sind spezielle Ähnlichkeiten ($c = 1$). Die Kongruenzen bilden eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung, die Ähnlichkeiten ebenso.

11.26 Hilfssatz

Eine Affinität φ des Euklidisch-affinen bzw. unitär-affinen Raumes A ist genau dann eine Kongruenz, wenn die zugehörige lineare Abbildung $\tilde{\varphi}$ orthogonal bzw. unitär ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ Kongruenz} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall p,\, q \in A \;:\; \overline{\varphi\,(p)\,\varphi\,(q)} = \overline{p\,q} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall p,\, q \in A \;:\; \|\,T\,(\varphi\,(p),\, \varphi\,(q))\| = \|\,T\,(p,\, q)\| \\
&\Leftrightarrow \quad \forall p,\, q \in A \;:\; \|\,\tilde{\varphi}\,(T\,(p,\, q))\| = \|\,T\,(p,\, q)\| \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, \underline{x} \in V_A \;:\; \|\,\tilde{\varphi}\,(\,\underline{x})\| = \|\,\underline{x}\| \\
&\overset{(7.18)}{\Longleftrightarrow} \quad \tilde{\varphi} \;\; \text{orthogonal bzw. unitär.}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Kongruenzen lassen Abstände und Winkel (bis auf Orientierung) invariant. Gemäß (7.21) und (11.26) ist φ für $\dim A < \infty$ genau dann eine Kongruenz, wenn ihr bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems eine orthogonale bzw. unitäre Matrix entspricht.

11.27 Hilfssatz

Eine Affinität φ ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn die zugehörige lineare Abbildung $\tilde{\varphi}$ die Form $\tilde{\varphi} = c\,\tilde{\psi}$ mit $c > 0$ und $\tilde{\psi}$ orthogonal bzw. unitär besitzt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ Ähnlichkeit} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall p,\, q \in A \;:\; \overline{\varphi\,(p)\,\varphi\,(q)} = c\,\overline{p\,q} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall p,\, q \in A \;:\; \|\,T\,(\varphi\,(p),\, \varphi\,(q))\| = c\,\|\,T\,(p,\, q)\| \\
&\Leftrightarrow \quad \forall p,\, q \in A \;:\; \|\,\tilde{\varphi}\,(T\,(p,\, q))\| = c\,\|\,T\,(p,\, q)\| \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, \underline{x} \in V_A \;:\; \|\,\tilde{\varphi}\,(\,\underline{x})\| = c\,\|\,\underline{x}\| \\
&\overset{(7.18)}{\Longleftrightarrow} \quad \left(\frac{1}{c}\right) \tilde{\varphi} \text{ orthogonal bzw. unitär.}
\end{aligned}$$

□

11.27.1 Beispiele zum Rechnen mit Koordinaten

Es seien α, β, γ, $c \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$,

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = c \right\}.$$

E ist Ebene im $\mathbb{R}^3$ (vergleiche (11.10)).
O.B.d.A. sei $\gamma \neq 0$, d.h.

$$E := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{\alpha}\, x + \tilde{\beta}\, y + z = \tilde{c} \}$$

für $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\gamma}$, $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, $\tilde{c} = \frac{c}{\gamma}$.
$\underline{x} \in E$ hat von $\underline{0}$ den Abstand

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{0}) &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= (x^2 + y^2 + (\tilde{c} - \tilde{\alpha}\, x - \tilde{\beta}\, y)^2)^{1/2} \\ &= \big((1+\tilde{\alpha}^2)\, x^2 + (1+\tilde{\beta}^2)\, y^2 + 2\,\tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}\, x\, y - 2\tilde{\alpha}\,\tilde{c}\, x - 2\,\tilde{\beta}\,\tilde{c}\, y + \tilde{c}^2\big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wir wollen

$$d(E, \underline{0}) := \inf_{\underline{x} \in E} d(\underline{x}, \underline{0}) \overset{\text{(Pythagoras)}}{\overset{!}{=}} \min_{\underline{x} \in E} d(\underline{x}, \underline{0})$$

berechnen. Beachte dazu, daß $\min d(\underline{x}, \underline{0})^2$ auch $\min d(\underline{x}, \underline{0})$ liefert, denn $f(x) = x^2$ ist für $x \geq 0$ streng monoton wachsend.

(i) <u>Methode:</u> Analysis.

Für das Vorliegen eines relativen Extremums ist das Verschwinden der partiellen Ableitungen. Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}: &\qquad (1+\tilde{\alpha}^2)\, x + \tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}\, y - \tilde{\alpha}\,\tilde{c} = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}: &\qquad \tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}\, x + (1+\tilde{\beta}^2)\, y - \tilde{\beta}\,\tilde{c} = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{aligned} D &= (1+\tilde{\alpha}^2)\,(1+\tilde{\beta}^2) - \tilde{\alpha}^2\,\tilde{\beta}^2 \\ &= 1 + \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also existiert eine eindeutige Lösung. Berechnung mit der Cramerschen Regel liefert:

$$x_0 = \frac{\tilde{\alpha}\,\tilde{c}}{D}, \quad y_0 = \frac{\tilde{\beta}\,\tilde{c}}{D}.$$

In $\binom{x_0}{y_0}$ liegt notwendig ein lokales Minimum vor (!).
Für die so bestimmten Werte von x_0, y_0 folgt

$$\begin{aligned} z_0 &= \tilde{c} - \tilde{\alpha}\, x_0 - \tilde{\beta}\, y_0 \\ &= \frac{1}{D}\,(\tilde{c} + \tilde{\alpha}^2\,\tilde{c} + \tilde{\beta}^2\,\tilde{c} - \tilde{\alpha}^2\,\tilde{c}^2 - \tilde{\beta}^2\,\tilde{c}) \\ &= \frac{\tilde{c}}{D} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} d(E, \underline{0})^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ &= \frac{1}{D^2}\,(\tilde{\alpha}^2\,\tilde{c}^2 + \tilde{\beta}^2\,\tilde{c}^2 + \tilde{c}^2) \\ &= \frac{\tilde{c}^2}{D} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} d(E, \underline{0}) &= \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{D}} \\ &= \frac{|c|}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

(ii) <u>Methode:</u> Fälle Lot von $\underline{0}$ auf E!
Aus 3 Punkten P_i der Ebene $(1 \le i \le s)$ mit Koordinaten

$$\begin{array}{ll} (0,\, 0,\, \tilde{c}) & (x = y = 0) \\ (1,\, 0,\, \tilde{c}-\tilde{\alpha}) & (x = 1,\, y = 0) \\ (0,\, 1,\, \tilde{c}-\tilde{\beta}) & (x = 0,\, y = 1) \end{array}$$

erhält man

$$E = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \tilde{c} \end{array} \right) + \lambda \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -\tilde{\alpha} \end{array} \right) + \mu \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -\tilde{\beta} \end{array} \right) \middle| \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach Pythagoras steht der Abstandsvektor senkrecht auf E, etwa der Vektor

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ 1 \end{array} \right)$$

erfüllt dies, wie man sofort sieht.

Schneide Gerade durch den Ursprung:

$$G := \left\{ \underline{0} + \nu \left(\begin{array}{c} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ 1 \end{array} \right) \middle| \nu \in K \right\}$$

mit E, dies liefert Gleichungsystem

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -\tilde{\alpha} \\ 0 & 1 & -\tilde{\beta} \\ -\tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\tilde{c} \end{array} \right)$$

mit Lösung $\nu = \dfrac{\tilde{c}}{1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2}$.
Der Schnittpunkt hat demnach die Koordinaten

$$\frac{1}{1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2} \left(\begin{array}{c} \tilde{\alpha}\,\tilde{c} \\ \tilde{\beta}\,\tilde{c} \\ \tilde{c} \end{array} \right),$$

er hat von $\underline{0}$ den Abstand

$$\left(\frac{\tilde{c}^2}{(1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2)^2} \, (\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2+1) \right)^{1/2} = \frac{|\tilde{c}|}{(1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2)^{1/2}}.$$

(iii) <u>Methode:</u> Minimumsbestimmung von $d(\underline{x}, \underline{0})^2$ als postiv definiter quadratischer Form in x, y!

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{0})^2 &= (1+\tilde{\alpha}^2)\, x^2 + (1+\tilde{\beta}^2)\, y^2 + 2\tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}\, x\, y - 2\,\tilde{c}\,(\tilde{\alpha}\, x + \tilde{\beta}\, y) + \tilde{c}^2 \\ &= (1+\tilde{\alpha}^2) \left(x + \frac{\tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}}{1+\tilde{\alpha}^2}\, y \right)^2 + \left(1 + \tilde{\beta}^2 - \frac{\tilde{\alpha}^2\,\tilde{\beta}^2}{1+\tilde{\alpha}^2} \right) y^2 \\ &\quad -2\,\tilde{c}\,\tilde{\alpha} \left(x + \frac{\tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}}{1+\tilde{\alpha}^2}\, y \right) - \left(2\,\tilde{c}\tilde{\beta} - 2\,\tilde{c}\, \frac{\tilde{\alpha}^2\,\tilde{\beta}}{1+\tilde{\alpha}^2} \right) y + \tilde{c}^2. \end{aligned}$$

Mittels $\tilde{x} := x + \dfrac{\tilde{\alpha}\,\tilde{\beta}}{1+\tilde{\alpha}^2}\, y$ wird dies zu

$$(1+\tilde{\alpha}^2)\left(\tilde{x} - \frac{\tilde{\alpha}\,\tilde{c}}{1+\tilde{\alpha}^2}\right)^2 + \frac{1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2}{1+\tilde{\alpha}^2}\left(y - \frac{\tilde{\beta}\,\tilde{c}}{1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2}\right)^2$$
$$+\tilde{c}^2\left(1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{1+\tilde{\alpha}^2} - \frac{\tilde{\beta}^2}{(1+\tilde{\alpha}^2)\,(1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2)}\right)$$

Dies ist offensichtlich minimal für

$$y_0 = \frac{\tilde{\beta}\,\tilde{c}}{1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2}, \qquad \tilde{x}_0 = \frac{\tilde{\alpha}\,\tilde{c}}{1+\tilde{\alpha}^2},$$

$$x_0 = \frac{\tilde{\alpha}\,\tilde{c}}{1+\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2},$$

und man erhält wiederum das alte Ergebnis.

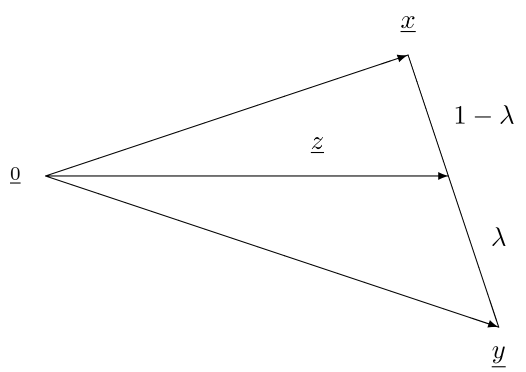
11.27.2 Beispiel: Winkelhalbierende

In einem Dreieck, welches im $\mathbb{R}^n$ durch linear unabhängige Vektoren $\underline{x}$, $\underline{y}$ aufgespannt wird, teilt die Winkelhalbierende

$$\underline{z} = \lambda\,\underline{x} + (1-\lambda)\,\underline{y}$$

die Strecke $\overline{\underline{x} - \underline{y}}$ im Verhältnis

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\|\,\underline{x}\|}{\|\,\underline{y}\|}$$



Beweis:
Winkelgleichheit zwischen $\underline{x}$ und $\underline{z}$, $\underline{y}$ und $\underline{z}$ liefert für das Skalarprodukt:

$$\frac{B\,(\,\underline{x},\,\underline{z})}{\|\,\underline{x}\|\,\|\,\underline{z}\|} = \frac{B\,(\,\underline{y},\,\underline{z})}{\|\,\underline{y}\|\,\|\,\underline{z}\|}$$

bzw.

$$\frac{B\,(\,\underline{x},\,\underline{z})}{\|\,\underline{x}\|} = \frac{B\,(\,\underline{y},\,\underline{z})}{\|\,\underline{y}\|}.$$

Setze hierin $\underline{z} = \lambda\,\underline{x} + (1-\lambda)\,\underline{y}$ ein:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\,\underline{x}\|}\left(B\,(\,\underline{x},\,\lambda\,\underline{x}) + B\,(\,\underline{x},\,(1-\lambda)\,\underline{y})\right) &= \frac{1}{\|\,\underline{y}\|}\left(B\,(\,\underline{y},\,\lambda\,\underline{x}) + B\,(\,\underline{y},\,(1-\lambda)\,\underline{y})\right)\\
\frac{1}{\|\,\underline{x}\|}\left(\lambda\,\|\,\underline{x}\|^2 + (1-\lambda)\,B\,(\,\underline{x},\,\underline{y})\right) &= \frac{1}{\|\,\underline{y}\|}\left(\lambda\,B\,(\,\underline{x},\,\underline{y}) + (1-\lambda)\,\|\,\underline{y}\|^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \,\|\underline{x}\| + (1-\lambda)\,\frac{B(\underline{x},\underline{y})}{\|\underline{x}\|} &= \lambda\,\frac{B(\underline{x},\underline{y})}{\|\underline{y}\|} + (1-\lambda)\,\|\underline{y}\| \\
(1-\lambda)\left(\frac{B(\underline{x},\underline{y})}{\|\underline{x}\|} - \|\underline{y}\|\right) &= \lambda\left(\frac{B(\underline{x},\underline{y})}{\|\underline{y}\|} - \|\underline{x}\|\right) \\
\frac{1}{\|\underline{x}\|}\,(1-\lambda)\,(B(\underline{x},\underline{y}) - \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|) &= \frac{1}{\|\underline{y}\|}\,\lambda\quad \underbrace{(B(\underline{x},\underline{y}) - \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|)}_{\substack{\neq 0 \text{ gemäß Cauchy-}\\ \text{Schwarzscher Ungleichung}}}\quad ,
\end{aligned}$$

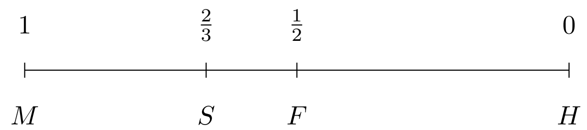
also

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|}\,(1-\lambda) = \frac{1}{\|\underline{y}\|}.$$

□

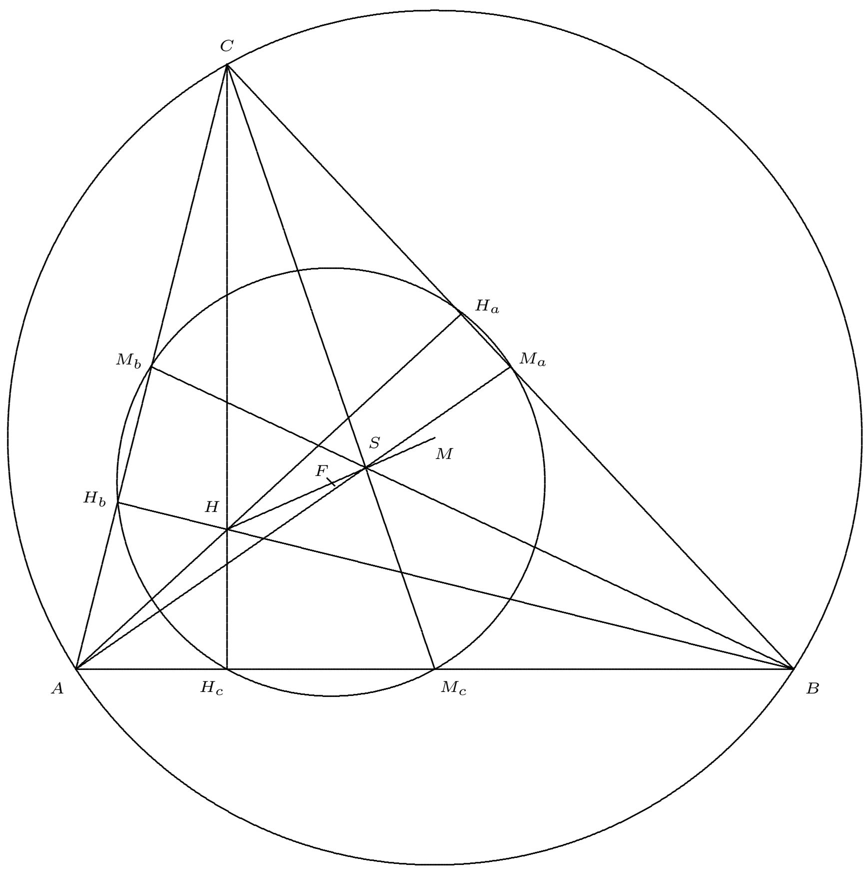
11.27.3 Beispiel: Feuerbachkreis und Eulerische Gerade.

"Im nicht ausgearteten Dreieck liegen die Mitten der Seiten, die Mitten der oberen Höhenabschnitte, und die Höhenfußpunkte auf einem Kreis (Mittelpunkt F, Radius ϱ), sog. Feuerbachkreis. Der Höhenschnittpunkt H, der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S, der Umkreismittelpunkt M und F liegen auf einer Geraden. Die Strecke $\overline{H\,M}$ wird von S und F im festen Verhältnis geteilt:



Der Radius des Feuerbachkreises ist halb so groß wie der des Umkreises."

Skizze:



Beweis:
Wähle H als Koordinatenursprung.

Es seien $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ von H ausgehende Vektoren in die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks. Diese liegen in einer Ebene, ferner gilt:

$$\underline{c} \perp (\underline{a} - \underline{b}), \quad \underline{b} \perp (\underline{c} - \underline{a}), \quad \underline{a} \perp (\underline{b} - \underline{c}).$$

Die Seitenmitten des Dreiecks sind

$$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}), \quad \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}), \quad \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}).$$

Die Mitten der oberen Höhenabschnitte sind:

$$\frac{1}{2}\underline{a}, \quad \frac{1}{2}\underline{b}, \quad \frac{1}{2}\underline{c}.$$

Bezeichne die Höhenfußpunkte mit

$$\underline{a}_0, \quad \underline{b}_0, \quad \underline{c}_0.$$

Betrachte Kreis mit Radius

$$\varrho = \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) - \frac{1}{2}\underline{c}\right\|,$$

der durch $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ und $\frac{1}{2}\underline{c}$ geht.
Für seinen Mittelpunkt F gilt:

$$\begin{aligned} \underline{f} &:= \overrightarrow{HF} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) + \frac{1}{2}\underline{c}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}). \end{aligned}$$

Für den Radius ϱ gilt:

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \left\|\frac{1}{2}\underline{c} - \underline{f}\right\|^2 \\ &= \left\|\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{f}\right\|^2. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen:

(1) Der Kreis geht durch $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$, $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\frac{1}{2}\underline{a}$, $\frac{1}{2}\underline{b}$.

(2) Der Kreis geht durch Höhenfußpunkte $\underline{a}_0$, $\underline{b}_0$, $\underline{c}_0$.

(3) $\underline{f} = \overrightarrow{HF}$, $\underline{s} := \overrightarrow{HS}$, $\underline{m} := \overrightarrow{HM}$ sind kollinear, d.h. $\underline{f} = \alpha\,\underline{m}$, $\underline{s} = \beta\,\underline{m}$; hierbei ist $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{2}{3}$.

(4) $\varrho = \frac{1}{2}\sigma$ für den Radius σ des Umkreises.

ad(1) $\underline{f} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ ist symmetrisch in $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ferner ist

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \left\|\tfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{f}\right\|^2 \\ &= \left\|\tfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) - \tfrac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})\right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}\,\|\underline{a} + \underline{b} - \underline{c}\|^2 \\ &= \tfrac{1}{16}\big(\|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 + \|\underline{c}\|^2 + 2B(\underline{a}, \underline{b}) - 2B(\underline{a}, \underline{c}) - 2B(\underline{b}, \underline{c})\big) \\ & \quad \left(\begin{array}{l} \left. \begin{array}{c} \underline{c} \perp (\underline{b} - \underline{a}) \\ \underline{b} \perp (\underline{a} - \underline{c}) \end{array} \right\} B(\underline{c}, \underline{b} - \underline{a}) = B(\underline{b}, \underline{a} - \underline{c}) = 0 \\ \Rightarrow B(\underline{a}, \underline{c}) = B(\underline{b}, \underline{c}) = B(\underline{a}, \underline{b}) \end{array} \right) \\ &= \tfrac{1}{16}(\|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 + \|\underline{c}\|^2 - 2B(\underline{b}, \underline{c})), \\ & \qquad\qquad\qquad \text{oder } -2B(\underline{a}, \underline{c})) \\ & \qquad\qquad\qquad \text{oder } -2B(\underline{a}, \underline{b})) \end{aligned}$$

d.h. ϱ ist ebenfalls symmetrisch in $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

Was also für $\underline{c}$ bzgl. ϱ und $\underline{f}$ gilt, gilt auch für $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bzgl. ϱ und $\underline{f}$. Damit folgt (1).

ad(2) Wegen der Symmetrie in $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ genügt es, die Behauptung für $\underline{c}_0$ zu beweisen!

$$\begin{aligned}
\|\underline{f}-\underline{c}_0\|^2 &= \left\|\frac{1}{4}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})-\underline{c}_0\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\|\frac{1}{2}\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}+\frac{1}{2}\underline{c}-2\underline{c}_0\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\|\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})-\underline{c}_0+\left(\frac{1}{2}\underline{c}-\underline{c}_0\right)\right\|^2 \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left\|\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})-\underline{c}_0-\left(\frac{1}{2}\underline{c}-\underline{c}_0\right)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\|\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})\right\|^2 \\
&= \varrho^2
\end{aligned}$$

Zu $(*)$ beachte

$$B\left(\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})-\underline{c}_0,\ \frac{1}{2}\underline{c}-\underline{c}_0\right)=0.$$

ad(3) Für den Radius σ des Umkreises ist

$$\begin{aligned}
\|\underline{m}-\underline{a}\| &= \|\underline{m}-\underline{b}\| \\
&= \|\underline{m}-\underline{c}\| \\
&= \sigma.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lcl} \underline{m} &=& \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})+\lambda\,\underline{c} \\ \underline{m} &=& \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{c})+\mu\,\underline{b} \end{array}\right\}\ \lambda=\mu \\ \underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})+\nu\,\underline{a} \end{array}\right\}\ \mu=\nu,$$

also

$$\underline{m}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}).$$

$\underline{c}-\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$ wird durch $\underline{s}$ im Verhältnis 2:1 geteilt.

$$\begin{aligned}
\underline{s} &= \underline{c}-\frac{2}{3}\left(\underline{c}-\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})\right) \\
&= \frac{1}{3}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}), \\
\underline{f} &= \frac{1}{4}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{f} &= \frac{1}{2}\underline{m}, \\
\underline{s} &= \frac{2}{3}\underline{m},
\end{aligned}$$

d.h. $\underline{m}$, $\underline{s}$, $\underline{f}$ sind kollinear mit den behaupteten Teilverhältnissen.

ad(4)

$$\begin{aligned}
\sigma &= \|\underline{m}-\underline{c}\| \\
&= \left\|\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}-\underline{c})\right\| \\
&= 2\,\varrho.
\end{aligned}$$

□

11.27.4 Spezielle Kegelschnitte im $\mathbb{R}^3$

Schneide Kegel(mantel)

$$K = \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$$

mit Ebene (O.B.d.A. $\gamma \neq 0$):

$$E := \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = c\}.$$

Die wichtigsten auftretenden Normalformen sind dabei

(i) Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0)$$

"Menge aller Punkte $(x,\, y)$, für die die Summe der Abstände von 2 Festpunkten $(\pm c,\, 0)$ konstant ist."

Es ist

$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0,$$

$$\begin{aligned}\left((x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \left((x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a}\,(c^2x^2 - 2\,a^2c\,x + a^4)^{\frac{1}{2}} + \ldots \\ &= \frac{1}{a}\,(a^2 - c\,x) + \frac{1}{a}\,(a^2 + c\,x) \\ &= 2\,a.\end{aligned}$$

(ii) Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

"Menge aller Punkte $(x,\, y)$, für die die Differenz der Abstände von 2 Festpunkten $(\pm c,\, 0)$ konstant ist."

Es ist

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad x^2 \geq a^2 > 0 \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned}-\left((x-c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \left((x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a}\,(c\,x - a^2) + \frac{1}{a}\,(c\,x + a^2) \\ &= 2\,a.\end{aligned}$$

(iii) Parabel:

$$x^2 - 4\,a\,y = 0$$

"Menge aller Punkte, deren Abstand zu einem Festpunkt $(0,\, a)$ gleich dem Abstand zu einer festen Geraden $(y = -a)$ ist."

$$\begin{array}{ccc}\left(x^2 + \left(\dfrac{x^2}{4\,a} - a\right)^2\right)^{1/2} & \stackrel{!}{=} & \dfrac{x^2}{4\,a} + a \\ \| & & \\ \left(\left(\dfrac{x^2}{4\,a} + a\right)^2\right)^{1/2} & & \end{array}$$

11.27.5 Kegelschnitte allgemein

Es sei $K\,[\underline{t}]$ der Polynomring in n Variablen $t_1, \ldots, t_n$ über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$. Ferner sei

$$P(\,\underline{t}\,) := \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, t_i t_j + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{0i}\, t_i + \alpha_{00}$$

mit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(0 \leq i < j \leq n)$ aus $K[\underline{t}]$ ein Polynom vom Grad 2. Die Spezialisierung

$$\underline{t} \longmapsto \underline{x} \quad \in K^n$$

liefert die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K \;:\; \underline{x} \longmapsto P(\,\underline{x}\,).$$

11.28 Definition

Eine Teilmenge Q von K^n heißt <u>Quadrik</u> (<u>Hyperfläche 2. Ordung</u>), falls es $P(\underline{t}) \in K[\underline{t}]$ vom Grad 2 mit

$$Q = \{\, \underline{x} \in K^n \mid P(\underline{x}) = 0\}$$

gibt.

<u>Beschreibung durch Matrizen:</u>
Es seien $\tilde{A} = (\alpha_{ij})_{0\le i,\, j\le n} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$, $A = (\alpha_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$, beide symmetrisch, $\underline{x} \in K^n$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{smallmatrix}\right) =: \tilde{\underline{x}} \in K^{n+1}$. Damit wird

$$P(\underline{x}) = \tilde{\underline{x}}^{\mathrm{tr}} \tilde{A}\, \tilde{\underline{x}}$$

bzw.

$$Q = \{\, \underline{x} \in K^n \mid \tilde{\underline{x}}^{\mathrm{tr}} \tilde{A}\, \tilde{\underline{x}} = 0\}.$$

Gesucht wird nun eine Basis des K^n bzgl. der $\tilde{A}$ möglichst einfache Gestalt annimmmt.

11.29 Hilfssatz

Q Quadrik, $\varphi\, :\, K^n \to K^n$ Affinität $\Rightarrow$ $\varphi\,(Q)$ Quadrik.

<u>Beweis:</u>
Bzgl. fester Basis des K^n existieren $\underline{s} \in K^n$, $T \in \mathrm{GL}\,(n,\, K)$ mit

$$\varphi\,(\,\underline{x}) = \underline{s} + T\, \underline{x} \quad \forall\, \underline{x} \in K^n.$$

Setze

$$\tilde{T} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ \underline{s} & & T & \\ & & & \end{array}\right),$$

damit wird

$$\tilde{T}\, \tilde{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi\,(\,\underline{x}) \end{pmatrix} \qquad \forall\, \underline{x} \in K^n.$$

Ferner ist

$$\tilde{T}^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & \\ -T^{-1}\, \underline{s} & & T^{-1} & \\ & & & \end{array}\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \underline{y} \in \varphi\,(Q) \quad &\Leftrightarrow \quad \underline{y} = \varphi\,(\,\underline{x}) \text{ für ein } \underline{x} \in Q \\ &\Leftrightarrow \quad \underline{y} = \varphi\,(\,\underline{x}) \text{ für } \underline{x} \in K^n \text{ mit } \tilde{\underline{x}}^{\mathrm{tr}} \tilde{A}\, \tilde{\underline{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \;=\; \tilde{\underline{x}}^{\mathrm{tr}} \tilde{A}\, \tilde{\underline{x}} \\ &\qquad\quad\;\; = \; (\tilde{T}^{-1}\, \tilde{\underline{y}})^{\mathrm{tr}} \tilde{A}\, (\tilde{T}^{-1}\, \tilde{\underline{y}}) \\ &\qquad\quad\;\; = \; \tilde{\underline{y}}^{\mathrm{tr}}\, (\tilde{T}^{-1^{\mathrm{tr}}} \tilde{A}\, \tilde{T}^{-1})\, \tilde{\underline{y}}. \end{aligned}$$

□

11.30 Definition

Zwei Quadriken Q_1, Q_2 des $\mathbb{R}^n$ heißen geometrisch äquivalent, falls es eine Affinität

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n mit$$

$\varphi(Q_1) = Q_2$ gibt.

Gesucht ist also eine Koordinatentransformation, die $\tilde{A}$ in möglichst einfache Gestalt überführt. Dies erfolgt in 3 Schritten.

I. Schritt
Gemäß (9.20) existiert $T_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} T_1^{\mathrm{tr}} A T_1 &= \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{q}) \\ &=: A_1. \end{aligned}$$

Setze

$$\tilde{T}_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Dann folgt

$$\tilde{A}_1 := \tilde{T}_1^{\mathrm{tr}} \tilde{A} \tilde{T}_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \beta_{00} & \beta_{01} & \ldots & \beta_{0n} \\ \hline \beta_{10} & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ \beta_{n0} & & & \end{array} \right)$$

mit $\beta_{i0} = \beta_{0i}$ $(1 \le i \le n)$.
Bzgl. der durch $\tilde{T}_1$ gelieferten Koordinaten $\underline{\tilde{z}} = \tilde{T}_1^{-1} \underline{\tilde{x}}$ ist demnach

$$Q = \{ \underline{z} \in \mathbb{R}^n \mid z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+r}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \beta_{0i} z_i + \beta_{00} = 0 \}.$$

Bemerkung:
Quadratische Ergänzung funktioniert i.a. nur für positiv definite Matrizen A. Unter Umständen muß man zunächst noch Substitutionen $x = y + \tilde{y}$, $\tilde{x} = y - \tilde{y}$ vornehmen, die $x \tilde{x}$ in $\underline{y}^2 - \underline{\tilde{y}}^2$ überführen.
Man beachte den Unterschied zu orthogonalen Transformationen!

II. Schritt
Reduktion der linearen Terme mittels

$$\tilde{T}_2 := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline -\beta_{10} & & & \\ \vdots & & & \\ -\beta_{p0} & & & \\ \beta_{p+1,0} & & & \\ \vdots & & I_n & \\ \beta_{p+r,0} & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_2 &= \tilde{T}_2^{\mathrm{tr}} \tilde{A}_1 \tilde{T}_2 \\
&= \tilde{T}_2^{\mathrm{tr}} \left(\begin{array}{c|ccc}
\tilde{\gamma}_{00} & \beta_{01} & \dots & \beta_{0n} \\ \hline
0 & & & \\
\vdots & & & \\
0 & & A_1 & \\
\beta_{r+p+1,0} & & & \\
\vdots & & & \\
\beta_{n,0} & & &
\end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|cccccc}
\gamma_{00} & 0 & \dots & 0 & \beta_{0,r+p+1} & \dots & \beta_{0,n} \\ \hline
0 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
0 & & & & A_1 & & \\
\beta_{r+p+1,0} & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
\beta_{n,0} & & & & & &
\end{array}\right).
\end{aligned}$$

Für $\underline{z} = \tilde{T}_2^{-1} \tilde{T}_1^{-1} \underline{\tilde{x}}$ ist dann

$$Q = \{ \underline{z} \in \mathbb{R}^n \mid z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+r}^2 + 2 \sum_{i=r+p+1}^{n} \beta_{0i}\, z_i + \gamma_{00} = 0 \}.$$

III. Schritt

Fall 1: $\gamma_{00} = \beta_{0i} = 0$ $(1 \le i \le n)$ mit

$$Q = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{p+r}^2 = 0 \}.$$

In diesem Fall ist Q ein Kegel.
(Übliche Definition eines Kegels in linearen Räumen mit Scheitel in $\underline{0}$:

$$\underline{x} \in Q \quad \Rightarrow \quad \lambda\, \underline{x} \in Q \quad \forall \underline{\lambda} \in K.)$$

Bemerkung:
O.B.d.A. läßt sich $p \ge r$ erreichen. Vergleiche dazu die entsprechende Transformation im Fall 2.

Fall 2: $\gamma_{00} \ne 0,\ \beta_{0i} = 0$ $(1 \le i \le n)$.
Für $\gamma_{00} > 0$ multipliziert man die Gleichung noch mit -1 und wendet die Transformation

$$\tilde{T}_3 = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline
0 & 0 & & 1 & & & \\
\vdots & & \iddots & & & 0 & \\
0 & 1 & & 0 & & & \\ \hline
0 & & & & & & \\
\vdots & & 0 & & & I_{n-r-p} & \\
0 & & & & & &
\end{array}\right)$$

an, die die z_i umnummeriert zu $z_i' = z_{p+r+1-i}$ $(1 \le i \le r)$. Für $\gamma_{00} < 0$ wird $\tilde{T}_3 = I_{n+1}$ gesetzt.
Anschließend wird noch

$$\tilde{T}_4 = \left(\begin{array}{c|c|c}
+1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \hline
0 & & \\
\vdots & \sqrt{-\gamma_{00}} I_r & 0 \\
0 & & \\ \hline
0 & & \\
\vdots & 0 & I_{n-r} \\
0 & &
\end{array}\right)$$

angewendet. Es folgt

$$\tilde A_4 = \tilde T_4^{\rm tr}\tilde T_3^{\rm tr}\tilde T_2^{\rm tr}\tilde T_1^{\rm tr}\tilde A\tilde T_1\tilde T_2\tilde T_3\tilde T_4 = (-\gamma_{00})\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & I_p & & & & & \\ \vdots & & & & & 0 & \\ 0 & & & -I_r & & & \\ \hline 0 & & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & 0 & \\ 0 & & & & & & \end{array}\right)$$

und für $\tilde z = \tilde T_4^{-1}\tilde T_3^{-1}\tilde T_2^{-1}\tilde T_1^{-1}\,\underline{x}$ demnach

$$Q = \{\,\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid z_1^2+\ldots+z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{r+p}^2 = 1\}.$$

Speziell gilt für den Fall

$0 = p < r+p$	:	$Q = \emptyset$;
$0 < p = r+p$	:	Q ist Einheitskugel (Ellipsoid);
$0 < p < r+p$	:	Q ist hyperbolische Fläche mit zugehörigem Kegel $z_1^2+\ldots+z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{r+p}^2 = 0$.

Fall 3: $\exists j \in \{p+r+1,\ldots,n\} : \beta_{0j} \neq 0$.
Mittels $\tilde T_3$ werden die Indizes j und $p+r+1$ vertauscht. Anschließend transformiert man

$$z_{i_{\rm neu}} \leftarrow z_i \ (1\le i\le r+p), \quad 2\,z_{p+r+1_{neu}} \leftarrow 2\sum_{j=p+r+1}^{n}\beta_{0j}\,z_j + \gamma_{00}$$

mittels

$$\tilde T_4 = \left(\begin{array}{c|ccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ \vdots & & I_{p+r} & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & \\ \hline -\frac{\gamma_{00}}{2\beta_{0\,p+r+1}} & & & & \frac{1}{\beta_{0\,r+p+1}} & -\frac{\beta_{0\,r+2}}{\beta_{0\,r+p+1}} & \dots & -\frac{\beta_{0\,n}}{\beta_{0\,r+p+1}} \\ 0 & & 0 & & & 1 & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{array}\right).$$

Für $\tilde z = \tilde T_4^{-1}\tilde T_3^{-1}\tilde T_2^{-1}\tilde T_1^{-1}\,\underline{\tilde x}$ folgt dann

$$Q = \{\,\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid z_1^2+\ldots+z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_{r+p}^2 + 2\,z_{p+r+1} = 0\}$$

("Paraboloid"). Wie im Fall 1 ist dabei $p \ge r$ erreichbar.

Bemerkung: Im Fall i $(1\le i\le 3)$ gilt offenbar $\operatorname{rg}\tilde A_i - \operatorname{rg} A_i = i-1$.

11.31 Geometrischer Klassifikationssatz

Es seien Q_1, $Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ Quadriken, die bezüglich der kanonischen Basis durch A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $\tilde A_1$, $\tilde A_2 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ (symmetrische Matrizen!) beschrieben werden in der Form

$$Q_i = \{\,\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \underline{\tilde x}^{\rm tr}\tilde A_i\,\underline{\tilde x} = 0\} \quad (i=1,\,2).$$

Sind Q_1, Q_2 beide nicht leer und keine Hyperebenen, so gilt: Für

$$\operatorname{rg}(A_1)=\operatorname{rg}(A_2),\ \operatorname{rg}(\tilde A_1)=\operatorname{rg}(\tilde A_2),\ |2p_1-\operatorname{rg}(A_1)| = |2p_2-\operatorname{rg}(A_2)|,\ |2\tilde p_1-\operatorname{rg}(\tilde A_1)| = |2\tilde p_2-\operatorname{rg}(\tilde A_2)|$$

sind Q_1 und Q_2 geometrisch äquivalent. (Die Umkehrung hiervon ist ebenfalls richtig, wird hier jedoch nicht gezeigt.)

Beweis:

Wie gezeigt existieren Matrizen $S_i \in \mathrm{GL}\,(n+1,\mathbb{R})$ mit $\tilde{S}_i^{\mathrm{tr}}\tilde{A}_i\tilde{S}_i = H(\tilde{A}_i)$ in Hauptachsenform ($i = 1,\, 2$). Hierbei ist $H(\tilde{A}_i)$ vom Typ j für

$$\mathrm{rg}(A_i) = \mathrm{rg}(\tilde{A}_i) - (j-1) \quad (1 \leq j \leq 3).$$

Bei den einzelnen (regulären!) Transformationen ändern sich die Ränge nicht, also gilt:

$$\mathrm{rg}(H(\tilde{A}_i)) = \mathrm{rg}(\tilde{A}_i) \quad \mathrm{rg}(H(A_i)) = \mathrm{rg}(A_i) \quad (i = 1,\, 2).$$

(Dabei entsteht $H(A_i)$ aus $H(\tilde{A}_i)$ durch Streichen von Zeile 0 und Spalte 0.)

Nach Voraussetzung gilt dann $\mathrm{rg}(H(A_1)) = \mathrm{rg}(H(A_2))$, $\mathrm{rg}(H(\tilde{A}_1)) = \mathrm{rg}(H(\tilde{A}_2))$, also sind $H(\tilde{A}_1)$, $H(\tilde{A}_2)$ vom selben Typ.

Sind sie vom Typ 1 oder 3, so gilt $p_i \geq r_i$, also $2p_i - \mathrm{rg}(A_i) = p_i - r_i > 0$; hierfür wird dann

$$2p_1 - \mathrm{rg}(A_1) = |2p_1 - \mathrm{rg}(A_1)| \overset{\text{n.Vor.}}{=} |2p_2 - \mathrm{rg}(A_2)| = 2p_2 - \mathrm{rg}(A_2),$$

also $p_1 = p_2$ und schließlich $r_1 = r_2$.

Schließlich seien $H(\tilde{A}_1)$ und $H(\tilde{A}_2)$ vom Typ 2. Wir nehmen zunächst zusätzlich $2p_1 > \mathrm{rg}(A_1)$ an. Unsere Voraussetzungen liefern dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} 2p_1 - \mathrm{rg}(A_1) &= |2p_2 - \mathrm{rg}(A_2)|, \\ 2p_1 - (\mathrm{rg}(A_1) + 1) &= |2p_2 - (\mathrm{rg}(A_2) + 1)|. \end{aligned}$$

Gilt dabei $2p_2 \geq \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(A_1)$, so erhält man unmittelbar $p_1 = p_2$ (und damit $r_1 = r_2$). Für $2p_2 < \mathrm{rg}(A_2)$ wird dagegen

$$2p_1 = 2\,\mathrm{rg}(A_1) - 2p_2 \quad \text{und} \quad 2p_1 = 2\,(\mathrm{rg}(A_1) + 1) - 2p_2,$$

offensichtlich ein Widerspruch. Der Fall $2p_1 \leq \mathrm{rg}(A_1)$ wird genauso abgehandelt. Ist zusätzlich $2p_2 \leq \mathrm{rg}(A_2)$, so folgt $p_1 = p_2$, im Fall $2p_2 > \mathrm{rg}(A_2$ ergibt sich wie zuvor ein Widerspruch.

Beachtet man schließlich, daß dem Übergang von $\tilde{A}_i$ nach $H(\tilde{A}_i)$ eine Affinität entspricht, so folgt die Behauptung.

□

11.31.1 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^2$

Typ	(p,r)	Gleichung	Geometrisches Gebilde
I	$(1,0)$	$z_1^2 = 0$	Gerade
	$(2,0)$	$z_1^2 + z_2^2 = 0$	Punkt
	$(1,1)$	$z_1^2 - z_2^2 = 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt
II	$(0,1)$	$-z_1^2 = 1$	$\emptyset$
	$(0,2)$	$-z_1^2 - z_2^2 = 1$	$\emptyset$
	$(1,0)$	$z_1^2 = 1$	paralleles Geradenpaar
	$(2,0)$	$z_1^2 + z_2^2 = 1$	Ellipse bzw. Kreis
	$(1,1)$	$z_1^2 - z_2^2 = 1$	Hyperbel
III	$(1,0)$	$z_1^2 + 2z_2 = 0$	Parabel

11.31.2 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^3$

Typ	(p, r)	Gleichung	Geometrisches Gebilde
I	$(1, 0)$	$z_1^2 = 0$	Ebene
	$(2, 0)$	$z_1^2 + z_2^2 = 0$	Gerade
	$(1, 1)$	$z_1^2 - z_2^2 = 0$	zwei sich schneidende Ebenen
	$(3, 0)$	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$	Punkt
	$(2, 1)$	$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$	Kegel
II	$(0, 1)$	$-z_1^2 = 1$	$\emptyset$
	$(0, 2)$	$-z_1^2 - z_2^2 = 1$	$\emptyset$
	$(0, 3)$	$-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 1$	$\emptyset$
	$(1, 0)$	$z_1^2 = 1$	parallele Ebenen
	$(2, 0)$	$z_1^2 + z_2^2 = 1$	Kreiszylinder
	$(1, 1)$	$z_1^2 - z_2^2 = 1$	hyperbolischer Zylinder
	$(3, 0)$	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$	Ellipsoid bzw. Kugel
	$(2, 1)$	$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 1$	einschaliges Hyperboloid
	$(1, 2)$	$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 1$	zweischaliges Hyperboloid
III	$(1, 0)$	$z_1^2 + 2z_2 = 0$	parabolischer Zylinder
	$(1, 1)$	$z_1^2 - z_2^2 + 2z_3 = 0$	hyperbolisches Paraboloid
	$(2, 0)$	$z_1^2 + z_2^2 + 2z_3 = 0$	elliptisches Paraboloid

Kapitel 12: Projektive Geometrie

Sie wird eingeführt, um “unschöne” Eigenschaften affiner Räume zu eliminieren. Betrachten wir beispielsweise den $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum, so besitzt darin eine Gerade G die Gestalt $G = \underline{x}_o + \mathbb{R}\underline{x}_1$ mit $\underline{x}_o, \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^2, \underline{x}_1 \neq \underline{o}$. Man sieht unmittelbar, daß sich 2 Geraden G und $\tilde{G} = \underline{y}_o + \mathbb{R}\underline{y}_1$ schneiden, falls $\underline{x}_1$ und $\underline{y}_1$ linear unabhängig sind. Andernfalls gilt $\underline{x}_1 = \lambda \underline{y}_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $G, \tilde{G}$ sind parallel. Im Fall der Parallelität besitzen G und $\tilde{G}$ für $G \neq \tilde{G}$ keinen Schnittpunkt in $\mathbb{R}^2$! Um auch für parallele Geraden $G \neq \tilde{G}$ Schnittpunkte zu erhalten, wird nun der affine Raum $\mathbb{R}^2$ erweitert zum sogenannten <u>projektiven Abschluß</u> $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Dazu betrachten wir auf $\mathcal{G} = \{G | G \text{ Gerade in } \mathbb{R}^2\}$ die Äquivalenzrelation (!) $G \sim \tilde{G} :\Leftrightarrow G \parallel \tilde{G}$. Die Äquivalenzklasse von G wird wie üblich mit K_G bezeichnet. Der projektive Abschluß besteht dann aus allen Punkten des affinen Raumes und allen Äquivalenzklassen $\mathcal{K}$ paralleler Geraden, letztere sozusagen als Vertreter für deren Schnittpunkte im Unendlichen. Als Modell hierfür nimmt man die eindimensionalen Unterräume (Geraden durch $\underline{0}$) des $\mathbb{R}^3$. Vektoren $x = \binom{x_1}{x_2}$ des $\mathbb{R}^2$ werden wie folgt eingebettet:

$$\iota : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Alle Bilder sind folglich von $\underline{0}$ verschieden. Wir können demnach jedem $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ die Gerade $C = \mathbb{R}\iota(\underline{x})$ durch $\underline{0}$ zuordnen:

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) : \underline{x} \mapsto \mathbb{R}\ \iota(\underline{x}).$$

(Dies ist eine injektive Abbildung des $\mathbb{R}^2$ in die Potenzmenge $\mathcal{P}$ $(\mathbb{R}^3)$, bzw. in die Menge der eindimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^3$.) Wir werden sehen, daß sich auch die Menge $\mathcal{K}$ der Äquivalenzklassen K_G injektiv in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ abbilden läßt. Dazu sei $\underline{z} \in G$, d.h. $\underline{z} = \underline{x}_o + \lambda_z \underline{x}_1$ für passendes $\lambda_z \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $\tau(\underline{z}) = \mathbb{R}\binom{1}{\underline{x}_o + \lambda_z \underline{x}_1}$. Im Fall $\lambda_z \neq 0$ gilt auch $\tau(\underline{z}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \lambda_z^{-1} \\ \lambda_z^{-1}\underline{x}_0 + \underline{x}_1 \end{pmatrix}$.

Ist $\tilde{\underline{z}} \in \tilde{G}$ für eine zu G parallele Gerade $\tilde{G} = \underline{y}_o + \mathbb{R}\underline{y}_1$, so erhalten wir für $\tilde{\underline{z}} = \underline{y}_o + \lambda_{\tilde{z}} \underline{y}_1$ im Fall $\lambda_{\tilde{z}} \neq 0 : \tau(\tilde{\underline{z}}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \lambda_{\tilde{z}}^{-1} \\ \lambda_{\tilde{z}}^{-1}\underline{y}_0 + \underline{y}_1 \end{pmatrix}$. Wenn man nun λ_z bzw. $\lambda_{\tilde{z}}$ beliebig groß macht, d.h. die Punkte auf den parallelen Geraden in unendliche Ferne rücken, so tendieren $\tau(\underline{z})$, $\tau(\tilde{\underline{z}})$ gegen $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ \underline{x}_1 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ \underline{y}_1 \end{pmatrix}$, welche wegen $\underline{x}_1 = \lambda \underline{y}_1$ übereinstimmen. Parallele Geraden erhalten dadurch einen “Schnittpunkt im Unendlichen”. Dies wird nun algebraisiert, indem man τ wie folgt erweitert:

$$\tilde{\tau} : \mathbb{R}^2 \cup \mathcal{K} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) : \left\{ \begin{array}{ccc} \underline{x} \in \mathbb{R}^2 & \mapsto & \tau(\underline{x}) \\ K_G \in \mathcal{K} & \mapsto & \mathbb{R}\binom{0}{\underline{x}_1} \end{array} \right\},$$

wenn $\underline{x}_1 \neq \underline{o}$ die Steigung von $G \in K_G$ ist. (Letztere ist nur bis auf einen Faktor aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ festgelegt, welcher für das Bild jedoch irrelevant ist.) Man sieht leicht, daß $\tilde{\tau}$ eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathbb{R}^2 \cup \mathcal{K}$ und den eindimensionalen Teilräumen des $\mathbb{R}^3$ ist.

Diese Konstruktion läßt sich ebenso für affine Räume K^2 über beliebigem Grundkörper K durchführen, wobei dann allerdings die Plausibilitätsbetrachtung über “Schnittpunkte im Unendlichen” entfällt. Eine Verallgemeinerung auf affine Räume K^n $(n \in \mathbb{N})$ ist unmittelbar möglich, der projektive Abschluß besteht dann aus allen eindimensionalen Teilräumen des K^{n+1}. Dies führt zur folgenden Definition.

12.1 Definition

Die Menge aller 1-dimensionalen Teilräme eines K-Vektorraums V heißt projektiver Raum $P = \mathbb{P}(V)$. $Q \subseteq P$ heißt projektiver Teilraum von P, falls V einen Unterraum $U = V_Q$ mit $Q = \{K\underline{x} \mid \underline{x} \in U \setminus \{\underline{0}\}\}$ besitzt. Die Dimension von P wird zu $\dim V - 1$ festgesetzt. (Speziell hat $P = \emptyset$ den zugehörigen Vektorraum $V = \{\underline{0}\}$ und somit die Dimension -1.)

Bemerkung :

(i) Es sei $P = \mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum, $\dim V = n$. Ein projektiver Teilraum Q mit $\dim Q = 0$ besteht demnach aus einem Element p (projektiver Punkt). Ein projektiver Teilraum Q mit

$$\dim Q = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ n-1 \end{array} \right\} \text{ heißt } \left\{ \begin{array}{c} \underline{\textit{Gerade}} \\ \underline{\textit{Ebene}} \\ \underline{\textit{Hyperebene}} \end{array} \right\}.$$

(ii) Für projektive Teilräume $Q_1,\ Q_2$ von P sind $Q_1 + Q_2,\ Q_1 \cap Q_2$ wiederum Teilräume von P, denn für $Q_i = \{K\underline{x} \mid \underline{x} \in U_i \setminus \{\underline{0}\}\}$ ist $Q_1 + Q_2 = \{K\underline{x} \mid \underline{x} \in U_1 + U_2 \setminus \{\underline{0}\}\},\ Q_1 \cap Q_2 = \{K\underline{x} \mid \underline{x} \in U_1 \cap U_2 \setminus \{\underline{0}\}\}$. Damit gilt für projektive Teilräume der Dimensionssatz: dim Q_1+ dim Q_2 = dim $(Q_1 + Q_2)$+ dim $(Q_1 \cap Q_2)$. (Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Definition und der analogen Aussage für Vektorräume). Zwei projektive Punkte $p_1 \neq p_2$ legen demnach eine Gerade fest.

(iii) $\mathbb{P}_n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ heißt kanonischer n-dimensionaler projektiver Raum. Seine Punkte p werden in der Form $p = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = K\underline{x}$ mit $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^{tr} \in K^{n+1}$ geschrieben.

Für $p = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K)$ heißen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$ homogene Koordinaten von p. Nach Definition gilt $x_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Für $\underline{x}, \underline{y} \in K^{n+1}$ mit $\underline{x} = \lambda\underline{y} \neq \underline{0}$ gilt offenbar $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (y_0 : y_1 \ldots : y_n)$. Ist umgekehrt $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$, so folgt $K\underline{x} = K\underline{y}$. Speziell ist dann $\underline{0} \neq 1\ \underline{x} = \lambda\underline{y}$ für passendes $\lambda \in K$. Homogene Koordinaten sind demnach nur bis auf einen konstanten Faktor festgelegt.

Im folgenden untersuchen wir den Zusammenhang zwischen projektiven Räumen und affinen Räumen genauer. Dazu sei V ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum mit zugehörigem projektiven Raum $P = \mathbb{P}(V)$. Eine Hyperebene H von P war als projektiver Teilraum erklärt, der zu einem Unterraum $V_H = U$ von V der Dimension $\dim U = \dim V - 1$ gehört. Ist dann $p \in P \setminus H$, so folgt $H + \{p\} = P$. Für $p = K\underline{x}$ ist nämlich $\underline{x} \notin U$, also $U + K\underline{x} = V$ der zu $H + \{p\}$ gehörige Vektorraum.

Wir zeigen: $A := P \backslash H$ ist affiner Raum der Dimension n. Dazu fixieren wir $(p,\ \underline{x}) \in A \times V$ mit $p = K\underline{x}$. Ist dann $q = K\underline{y} \in A$(also $\underline{y} \notin U$), so existieren eindeutig $\underline{\tilde{u}} \in U,\ \lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $\underline{y} = \underline{\tilde{u}} + \lambda\underline{x}$ wegen $V = U + K\underline{x}$. Also gilt auch $q = K\underline{y} = K\left(\frac{1}{\lambda}\underline{y}\right) = K(\underline{u}_q + \underline{x})$ für $\underline{u}_q = \frac{1}{\lambda}\underline{\tilde{u}} \in U$, und $\underline{u}_q \in U$ ist durch q und $\underline{x}$ eindeutig festgelegt. Damit ist $T : A \times A \to U : (q, \tilde{q}) \mapsto \underline{u}_q - \underline{u}_{\tilde{q}}$ eine Abbildung, mit der (A, U, T) zu einem affinen Raum wird: T ist surjektiv, da für beliebige $\underline{u} \in U$ stets $K(\underline{u} + \underline{x}) \in A$ ist; $T(q, \tilde{q}) + T(\tilde{q}, \hat{q}) = T(q, \hat{q})$ ist trivial.

Beispiel :

Für $V = K^{n+1},\ U = \{\underline{x} \in K^{n+1} \mid x_0 = 0\},\ H = \mathbb{P}(U)$ gilt

$$H = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid x_0 = 0\}.$$

Die Abbildung $\varphi : K^n \to \mathbb{P}_n(K) : (x_1, \ldots, x_n)^{tr} \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$ ist offensichtlich injektiv, und es gilt:

$$\varphi(K^n)\ \dot{\cup}\ H = \mathbb{P}_n(K).$$

Man erkennt auch, daß die zu Anfang dieses Kapitels durchgeführte Konstruktion des projektiven Abschlusses des projektiven Raums K^n gerade zu $\mathbb{P}_n(K)$ führt.

Eine wichtige Konsequenz aus dem Dimensionssatz für projektive Räume ist:

12.2 Proposition

Es sei P ein projektiver Raum mit Hyperebene H. Ist dann U ein projektiver Teilraum von P, der nicht in H enthalten ist, so gilt:

$$\dim(U \cap H) = \dim U - 1.$$

Gilt speziell $\dim P = 2$ (projektive Ebene) und sind U, H eindimensionale projektive Teilräume von P (projektive Geraden), so ist $U \cap H$ nicht leer, d.h. zwei projektive Geraden besitzen stets einen Schnittpunkt.

Beweis :

Wegen $U \not\subseteq H$ gilt $U + H = P$ und damit

$$\begin{aligned} \dim(U \cap H) &= -\dim(U+H) + \dim U + \dim H \\ &= -\dim P + \dim U + (\dim P - 1) \\ &= \dim U - 1. \end{aligned}$$

Für $\dim P = 2$ ist die projektive Dimension von $U \cap H$ unter den obigen Voraussetzungen 0, d.h. $U \cap H$ ist ein eindimensionaler Vektorraum zugeordnet und $U \cap H$ enthält somit genau ein Element.

□

Beispiel :

Für $K = GF(3)$ betrachten wir K^2 als affinen Raum. Als Geraden durch $\underline{0}$ in K^2 erhalten wir:

$$G_1 = K\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ G_2 = K\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ G_3 = K\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ G_4 = K\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

(Jede Gerade enthält 3 Punkte, K^2 enthält 9 Punkte, $\underline{0} \in G_i$ für $1 \le i \le 4$.) Der zugehörige projektive Raum $\mathbb{P}_2(K)$ enthält demnach $9 + 4 = 13$ Punkte p_i $(1 \le i \le 13)$:

$$\begin{aligned} &p_1 = K\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ p_2 = K\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ p_3 = K\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ p_4 = K\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\\ &p_5 = K\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ p_6 = K\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ p_7 = K\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ p_8 = K\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\\ &p_9 = K\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ p_{10} = K\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ p_{11} = K\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ p_{12} = K\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\\ &P_{13} = K\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Diese Anzahl ist natürlich gleich der der eindimensionalen Teilräume von $K^3 : (27-1)/2$.) Eine projektive Gerade G gehört zu einem Teilraum U von K^3 der Dimension 2. U enthält 9 Elemente, $\mathbb{P}(U)$ demnach $(9-1)/2 = 4$. Die Anzahl der 2-dimensionalen Teilräume U von K^3 ermittelt sich so:
Man erhält sie als $\binom{13}{2}$ direkte Summen von eindimensionalen Teilräumen. Ist dabei die zu U gehörige Gerade $G = \{p_i, p_j, p_k, p_l\}$ mit $1 \le i < j < k < l \le 13$, so erhält man G auf 6 Arten:
$\{p_i\} + \{p_j\} = \{p_i\} + \{p_k\} = \{p_i\} + \{p_l\} = \{p_j\} + \{p_k\} = \{p_j\} + \{p_l\} = \{p_k\} + \{p_l\}$.
Folglich ist die Anzahl der projektiven Geraden $\binom{13}{2}\frac{1}{6} = 13$. Der Vollständigkeit halber listen wir alle auf:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{p_1\} + \{p_2\} = \{p_1,p_2,p_3,p_{10}\},\\
G_2 &= \{p_1\} + \{p_4\} = \{p_1,p_4,p_5,p_{11}\},\\
G_3 &= \{p_1\} + \{p_6\} = \{p_1,p_6,p_9,p_{12}\},\\
G_4 &= \{p_1\} + \{p_7\} = \{p_1,p_7,p_8,p_{13}\},\\
G_5 &= \{p_2\} + \{p_4\} = \{p_2,p_4,p_9,p_{13}\},\\
G_6 &= \{p_2\} + \{p_5\} = \{p_2,p_5,p_7,p_{12}\},\\
G_7 &= \{p_2\} + \{p_6\} = \{p_2,p_6,p_8,p_{11}\},\\
G_8 &= \{p_3\} + \{p_4\} = \{p_3,p_4,p_8,p_{12}\},\\
G_9 &= \{p_3\} + \{p_5\} = \{p_3,p_5,p_6,p_{13}\},\\
G_{10} &= \{p_3\} + \{p_7\} = \{p_3,p_7,p_9,p_{11}\},\\
G_{11} &= \{p_4\} + \{p_6\} = \{p_4,p_6,p_7,p_{10}\},\\
G_{12} &= \{p_5\} + \{p_8\} = \{p_5,p_8,p_9,p_{10}\},\\
G_{13} &= \{p_{10}\} + \{p_{11}\} = \{p_{10},p_{11},p_{12},p_{13}\}.
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß je zwei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, wie es nach der Theorie sein muß.

Im folgenden stellen wir einen Zusammenhang zwischen projektiven und affinen Teilräumen her. Dazu seien P ein projektiver Raum (zum Vektorraum V), H eine Hyperebene von P (zum Teilraum V_H von V). Hierzu fixieren wir $\underline{x} \in V$ mit $V_H + K\underline{x} = V$. Wir wissen bereits, daß $A = P \setminus H$ zu einem affinen Teilraum (A, V_H, T) wird, in dem man $q \in A$ in der Form $q = K(\underline{u}_q + \underline{x})$ schreibt und $T : A \times A \to V_H : (q, \tilde{q}) \mapsto \underline{u}_q - \underline{u}_{\tilde{q}}$ setzt. Man beachte, daß A selbst natürlich kein projektiver Teilraum von P ist; die affinen bzw. projektiven Räumen zugeordneten Vektorräume sind auf verschiedene Weisen definiert!

12.3 Hilfssatz

Für jeden projektiven Teilraum Q von P ist $\hat{Q} := Q \cap A$ ein affiner Unterraum von A. Umgekehrt gibt es zu jedem affinen Unterraum $\hat{Q} \neq \emptyset$ von A genau einen projektiven Teilraum Q von P mit $\hat{Q} = Q \cap A$. In diesem Fall gilt
$\dim \hat{Q} = \dim Q$, und $V_Q \cap V_H$ ist der zu $\hat{Q}$ gehörige Vektorraum.

Beweis :

Für projektive Teilräume Q, H von P wissen wir bereits:

$$V_Q \cap V_H = V_{Q \cap H}.$$

Es sei nun Q ein projektiver Teilraum von P mit Vektorraum $V_Q \subseteq V$. Gilt dann $Q \subseteq H$, so ist $Q \cap A$ leer, also definitionsgemäß affiner Unterraum. Für $Q \not\subseteq H$ existiert ein $p = K(\underline{u}_p + \underline{x}) \in \hat{Q} = Q \cap A$, und wir bilden $\hat{U} = \{T(p,q) \mid q \in \hat{Q}\}$ mit $T(p,q) = \underline{u}_p - \underline{u}_q \in V_H$ für $q = K(\underline{u}_q + \underline{x})$. Wegen $K(\underline{u}_p + \underline{x})$, $K(\underline{u}_q + \underline{x}) \in Q$ ist auch $T(p,q) \in V_Q$, also gilt $\hat{U} \subseteq V_Q \cap V_H$. Ist andererseits $\underline{y} \in V_Q \cap V_H$, so ist wegen $p = K(\underline{u}_p + \underline{x}) \in \hat{Q}$ dann $q = K(\underline{u}_p + \underline{y} + \underline{x}) \in \hat{Q}$, also $T(p,q) = \underline{y} \in \hat{U}$. Also ist $\hat{Q}$ affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum $V_Q \cap H$.

Andererseits sei $\emptyset \neq \hat{Q}$ affiner Unterraum von A mit zugehörigem Vektorraum $\hat{U}$. Für festes $p \in \hat{Q}$ mit $p = K(\underline{u}_p + \underline{x})$ ist dann $\hat{U} = \{T(p,q) \mid q \in \hat{Q}\}$ sowie $\hat{Q} = \{q = K(\underline{u}_q + \underline{x}) \in A \mid T(p,q) = \underline{u}_p - \underline{u}_q \in \hat{U}\}$. Ferner ist $U = \hat{U} + p$ ein Teilraum von V, zu dem der projektive Unterraum $Q = \{K(\underline{u} + \underline{x}) \mid \underline{u} \in \hat{U}\} \dot{\cup} \{K\underline{u} \mid \underline{u} \in \hat{U} \setminus \{\underline{0}\}\}$ von P gehört. Dann ist aber offenbar $Q \cap A = \hat{Q}$. Ferner ist Q auch eindeutig bestimmt, da nach dem ersten Teil der zu $\hat{Q}$ gehörige Vektorraum gerade $V_{Q \cap H}$ ist. Schließlich ist

$$\dim \hat{Q} = \dim \hat{U} = \dim U - 1 = \dim Q.$$

□

12.4 Hilfssatz

Es seien $\hat{U}$ eine Hyperebene von A und $\hat{W} \neq \emptyset$ ein nicht in $\hat{U}$ enthaltener echter affiner Unterraum von A. Dann sind $\hat{U}$ und $\hat{W}$ genau dann parallel, wenn die zugehörigen projektiven Unterräme U bzw. W von P die Bedingung $U \cap W \subseteq H$ erfüllen, d.h. ihr Durchschnitt nur aus sogenannten uneigentlichen Punkten besteht. (Die in A enthaltenen Punkte heißen eigentliche Punkte).

Beweis :

„ $\Rightarrow$" Nach Voraussetzung ist $\hat{W}$ nicht in $\hat{U}$ enthalten, also muß $V_{\hat{u}} \subseteq V_{\hat{w}}$ gelten (nach (11.6)) sowie $\hat{U} \cap \hat{W} = \emptyset$ (nach (11.5)), und $U \cap W$ besteht demnach nur aus uneigentlichen Punkten.
„ $\Leftarrow$" Wegen $U \cap W \subseteq H$ gilt natürlich $V_{U \cap W} = V_U \cap V_W \subseteq V_H$. Wegen $\hat{W} \neq \emptyset$ existiert in $W \setminus U$ ein eigentlicher Punkt, d.h. V_W enthält einen Vektor $\underline{z}$ mit $\underline{z} \notin V_H$, $\underline{z} \notin V_U$. Aufgrund der Dimensionsaussage von (12.3) ist U eine Hyperebene von P, also gilt $V = V_U + K\underline{z}$.

Es sei nun $\underline{y} = \underline{u} + \lambda \underline{z} \in V_W \cap V_H$ mit $\underline{u} \in V_U$, $\lambda \in K$ passend. Wegen $\underline{y}, \underline{z} \in V_W$ folgt $\underline{u} \in V_W$, also $\underline{u} \in V_{U \cap W} \subseteq V_H$. Wegen $\underline{y} \in V_H$ folgt $\lambda \underline{z} \in V_H$, also $\lambda = 0$ bzw. $\underline{y} = \underline{u}$. Dies impliziert $V_W \cap V_H \subseteq V_U \cap V_H$. Da dies die $\hat{W}, \hat{U}$ zugeordneten Unterräume sind, erhält man nach (11.6): $\hat{W} \| \hat{U}$.

□

Bemerkung :

(12.3) und (12.4) gestatten es, aus Sätzen über projektive Räume entsprechende Sätze über affine Räume herzuleiten.

12.5 Definition

Ein geordnetes $(n+2)$-Tupel $(p_0, p_1, \ldots, p_{n+1})$ eines n-dimensionalen projektiven Raumes P heißt projektive Basis, wenn je $n+1$ unter diesen Punkten unabhängig sind, d.h. die projektive Dimension des von ihnen erzeugten Raumes n ist.

Bemerkung :

Ist $p_0, \ldots, p_{n+1}$ eine projektive Basis, so existieren in V l.u. Vektoren $V_0, \ldots, v_n$ mit $p_i = Kv_i (0 \leq i \leq n)$ und $p_{n+1} = K(v_0 = \ldots + v_n)$.

Sei zunächst $p_i = Kw_i (0 \leq i \leq n+1)$ mit $\{w_i \mid 0 \leq i \leq n+1\}\{w_k\}$ l.u. für alle k, $0 \leq k \leq n+1$. Dann ist $w_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i w_i$ und $\lambda_i \neq 0$ für alle i. Setze demgemäß $v_i = \lambda_i w_i$ $(0 \leq i \leq n)$.

12.6 Definition

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(w)$ heißt projektiv, falls hierzu eine injektive Abbildung $\hat{\varphi} \in$ Hom (V, w) mit $\varphi(Kv) = K\hat{\varphi}(v) \quad \forall v \in V,\ v \neq \underline{0}$, existiert. Bijektive projektive Abbildungen heißen Projektivitäten.

12.7 Hilfssatz

Zwei injektive Abbildungen $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \text{Hom}\ (V, w)$ induzieren genau dann dieselbe projektive Abbildung $\varphi = \psi$, falls $\lambda \in K^\times$ mit $\hat{\varphi} = \lambda\hat{\psi}$ existiert.

Beweis :

"$\Leftarrow$" klar wegen $\varphi(Kv) = K\hat{\varphi}(v) = K\frac{1}{\lambda}\hat{\varphi}(v) = K\hat{\psi}(v) = \psi(Kv)$.

"$\Rightarrow$" Zu $v \in V,\ v \neq 0$, existiert wegen $K\hat{\varphi}(v) = \varphi(Kv) = \psi(Kv) = K\hat{\psi}(v)\ \lambda_v \in K^\times$ mit $\hat{\varphi}(v) = \lambda_v\hat{\psi}(v)$. Im Fall $\dim V = 1$ ist man dann fertig. Für $\dim V > 1$ seien v, w l.u.. Man erhält dafür dann $\hat{\varphi}(v) = \lambda_v\ \hat{\psi}(v),\ \hat{\psi}(w) = \lambda_w\ \hat{\psi}(w),\ \hat{\varphi}(v+w) = \lambda_{v+w}\ \hat{\psi}(v+w)$, also $\underline{0} = \hat{\varphi}(v) + \hat{\varphi}(w) - \hat{\varphi}(v+w) = (\lambda_v - \lambda_{v+w})\hat{\psi}(v) + (\lambda_w - \lambda_{v+w})\ \hat{\psi}(w)$ und wegen $\hat{\psi}$ injektiv damit $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$.

□

Bemerkung :

Mit zwei Projektivitäten $\varphi, \psi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ ist auch $\psi\varphi$ Projektivität mit $\widehat{\psi\varphi} = \hat{\psi}\hat{\varphi}$. Desgleichen ist φ^{-1} Projektivität mit $(\widehat{\varphi^{-1}}) = \hat{\varphi}^{-1}$. Jede Projektivität bildet Unterräume auf Unterräume gleicher Dimension ab.

12.8 Satz

Es seien $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(w) n$-dimensionale projektive Räume mit projektiven Basen $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ bzw. $(q_0, \ldots, q_{n+1})$. Dann gibt es genau eine Projektivität $\varphi : \mathbb{P}(v) \to \mathbb{P}(w)$ mit $\varphi(p_i) = q_i\ (0 \leq i \leq n+1)$.

□

Beweis :

Wähle Basen $v_0, \ldots, v_n$ von V bzw. $w_0, \ldots, w_n$ von W mit $p_i = Kv_i,\ q_i = Kw_i\ (0 \leq i \leq n),\ p_{n+1} = K(\underbrace{v_0 + \ldots + v_n}_{v_{n+1}}),\ q_{n+1} = K(\underbrace{w_0 + \ldots + w_n}_{w_{n+1}})$.

(i) Definiere $\varphi : V \to w$ mittels $\hat{\varphi}(v_i) = w_i$ und setze $\varphi(K_v) = K\hat{\varphi}(v)$.
φ Abb.: $v = \lambda\tilde{v},\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \varphi(K\tilde{v}) = K\hat{\varphi}(\tilde{v}) = K\frac{1}{\lambda}\hat{\varphi}(v) = K\hat{\varphi}(v)$.

(ii) Seien φ, ψ Projektivitäten mit der gewünschten Eigenschaft.
$q_i = \varphi(p_i) = \varphi(Kv_i) = K\hat{\varphi}(v_i) = K\hat{\psi}(v_1)$
$\Rightarrow \hat{\varphi}(v_i) = \lambda_i\hat{\psi}(v_i),\ \lambda_i \in K^\times\ (0 \leq i \leq n+1)$
$\lambda_{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n} = \hat{\varphi}(v_{n+1}) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\hat{\psi}(v_i)$ l.u.
$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_{n+1}\ (0 \leq i \leq n) \Rightarrow \hat{\varphi} = \lambda_{n+1}\ \hat{\psi} \Rightarrow \varphi = \psi$.

Einführung projektiver Koordinaten für $\dim_{\,p} \mathbb{P}(V) = n$ mittels $\kappa : \mathbb{P}_n(K) \to \mathbb{P}(V) : (\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n) \mapsto p$. $(\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n)$ heißt homogener Koordinatenvektor von p. Er ist nur bis auf Faktor $\lambda \neq 0$ bestimmt. Ist $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$, so existiert gemäß (12.8) genau ein projektives Koordinatensystem mit

$$\begin{array}{rcll} p_i & \leftrightarrow & \kappa(0 : \ldots : 0 : 1 : 0 : \ldots : 0) & (0 \leq i \leq n) \\ p_{n+1} & \leftrightarrow & \kappa(1 : 1 : \ldots : 1) & \end{array}$$

Mittels Koordinaten lassen sich geometrische Probleme rechnerisch behandeln.
Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen:
Es sei $\varphi : \mathbb{P}_n(K) \to \mathbb{P}_n(K)$ mit $\hat{\varphi} : K^{n+1} \to K^{n+1}$. $\hat{\varphi}$ wird bezüglich kanonischer Basis beschrieben durch $A \in GL(n+1, K)$. $\hat{\varphi}$ bzw. A sind nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

$$\varphi(\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n) = z(A)_i\ \underline{\xi}^{tr} : z(A)_i\ \underline{\xi}^{tr}; \ldots : z(A)_{n+1}\underline{\xi}^{tr}$$

Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen erfolgt entsprechend mittels $S \in GL(n+1, K)$, welches ebenfalls nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt ist.

Allgemein :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n(K) & \overset{\kappa_V}{\to} & \mathbb{P}(V) \\ \psi\downarrow & & \downarrow\psi \\ \mathbb{P}_n(K) & \overset{\kappa_W}{\to} & \mathbb{P}(W) \end{array}$$

Beschreibung projektiver Unterräume durch lineare Gleichungsszsteme
Es sei $U \subseteq \mathbb{P}_n(K)$ projektiver Unterraum der Dimension $n-r$. Dann existiert hierzu $A \in K^{(n+1)}$ mit $rg(A) = r$, so daß $U = \mathbb{P}(\{\underline{x} \in K^{n+1} \mid A\underline{x} = \underline{0}\})$ gilt. Wegen $A\underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow A\lambda\underline{x} = \underline{0}\ \ \forall\lambda \in K^x$ läßt sich die Gleichung $A\underline{x} = \underline{0}$ auch als Gleichung für die hom. Koordinate von $P \in \mathbb{P}_n(K)$ deuten.

Der projektive Abschluß eines affinen Unterraums $Y \subseteq K^n$ erfolgt mittels "Homogenisierung des Gleichungssystems":
Es sei $Y = \{\underline{x} \in K^n \mid B\underline{x} = \underline{b}\}$ für passende $B \in K^{rxn}$, $\underline{b} \in K^r$.

Setze

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} -b_1 & & \\ \vdots & \vdots & B \\ -b_r & & \end{pmatrix}$$

dann erhält man für den projektiven Abschluß $\bar{Y}$:
$\bar{Y} = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) \mid \hat{A}\underline{x} = \underline{0}\}$. Setzt man hierzu $x_0 = 1$, so gewinnt man $Y = \bar{Y} \cap K^n$ zurück.
Beispiel :

$$\begin{aligned} Y &= (1,0,2) \cup (3,1,0) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in K \right\}. \end{aligned}$$

Für

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2\lambda, \\ x_2 &= +\lambda, \\ x_3 &= 2 - 2\lambda, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1, \\ x_1 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

also

$$Y = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann gilt für den projektiven Abschluß $\bar{Y} = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_3(K) \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \right\}.$

12.9 Satz

Jedes affine Koordinatensystem $(p_p, \dots, p_n)$ eines affinen Raumes A bestimmt eine projektive Basis $(p_0^*, \dots, P_{n+1}^*)$ des durch Hinzunahme einer uneigentlichen Hyperebene H entstehenden projektiven Raums P. Sind dann $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ die affinen Koordinaten eines Punktes $x \in A$, so sind $(1, \xi_1, \dots, \xi_n)$ die homogenen Koordinaten von X bezüglich des projektiven Koordinatenszstems. Sind umgekehrt $(\xi_0^*, \dots, \xi_n^*)$ die homogenen Koordinaten eines Punktes $x \in P$, so gilt: $x \in H \Leftrightarrow \xi_0^* = 0$. Für $\xi_0^* \neq 0$ sind $\left(\frac{\xi_1^*}{\xi_0^*}, \dots, \frac{\xi_n^*}{\xi_0^*}\right)$ die affinen Koordinaten von x.

$\square$

(i) $p_0^* = Kx_{p_0} = Ku_{p_0},\ p_\nu = K(x_{p_0} + u_{p_\nu}),\ T(p_0, p_\nu) = u_{p_\nu}$ l.u. $(1 \leq \nu \leq n)$, also Basis von V_H.

$$u_{p_\nu} \in V_H,\ x_{p_0} \notin V_H \quad \Rightarrow \quad x_{p_\nu} \text{ l.u.}$$

$$u_{p_{n+1}} := \sum_{i=1}^{n} u_{p_\nu} + x_{p_0}$$

$p_\nu^* := K\ u_{p_\nu}$ $(0 \leq \nu \leq n+1)$ ist damit projektive Basis.
(Affine Koordinaten von $u_{p_{n+1}} : (1, \dots, 1)$).
Eindeutigkeit dieser projektiven Basis durch diese Konstruktion!

(ii) $q \in A : T(p_0, q) = \sum_{i=1}^{n} \xi\ T(p_0, p_i)$
$q = K(x_{p_0} + u_q)$
$\Rightarrow x_{p_0} + u_q = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ u_{p_i} + x_{p_0}$
$\Rightarrow$ homogene Koordinaten sind $(1 : \xi_1 : \dots : \xi_n)$

(iii) <u>Umkehrung</u>
Sei $q \in P$ mit homogenen Koordinaten $(\xi_0^* : \xi_1^*; \dots : \xi_n^*)$.
Hierfür ist $q = K_v \in H \Leftrightarrow v \in V_H$
$\Leftrightarrow v = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^* u_{p_\nu},\ \lambda_0^* = 0.$
Ist dagegen $q \in A$, so folgt $\xi_0^* \neq 0$, und damit erhält man als homogene Koordinaten $(\xi_0^*, \xi_1^*; \dots : \xi_n^*) = (1 : \frac{\xi_1^*}{\xi_0^*} : \dots : \frac{\xi_n^*}{\xi_0^*})$ und mit dem Zusammenhang aus (i) die Behauptung.

$\square$

12.10 Satz

Jede Affinität ψ_0 von A läßt sich eindeutig zu einer Projektivität ψ von P fortsetzen. Umgekehrt induziert eine Projektivität ψ von P genau dann eine Affinität ψ_0 von A, falls $\psi(H) = H$ gilt.

<u>Beweis :</u>

(i) Es sei $(p_0, \dots, p_n)$ affines Koordinatensystem von A mit zugehöriger projektiver Basis $(p_0^*, \dots, p_{n+1}6*)$ gemäß (12.10). Diesbezüglich entsprechen ψ_0 eine Matrix $A_0 \in GL(n, K)$ und ein Vektor $\underline{s} \in K^n$, so daß die Koordinaten $\eta\prime_1, \dots, \eta\prime_n$ von $\psi_0(x)$ durch $\underline{\eta\prime} = \underline{s} + A_0\underline{\xi}$ gegeben sind. (Hierbei sind $\xi_1, \dots, \xi_n$ die Koordinaten von x bezüglich $p_0, \dots, p_{n_1}$). Für die homogenen Koordinaten erhält man $(\eta\prime_0^* = \xi_0^* = 1)$, also

$$\eta'_{erw}{}^* = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \underline{s} & A_0 \end{array}\right)}_{A_1} \xi_{erw}^*.$$

Folglich liefert $A_1 \in GL(n+1, K)$ eine Projektivität ψ von P mit $\psi\mid_A = \psi_0$. Wegen $\eta\prime_0^* = \xi_0^*$ ist $\psi(H) = H$. Gemäß Konstruktion ist ψ eindeutig!

(ii) Sei ψ Projektivität.
ψ induziert genau dann Affinität, falls $\psi(H) = H$ gilt. (Uneigentliche Punkte müßen auf ebensolche abgebildet werden.) Bezüglich $(P_0^*, \ldots, P_{n+1}^*$ habe ψ die Matrix $A_1 = (\alpha_{\mu\nu})$. Wegen $x \in H \Leftrightarrow \xi_0^* = 0$ folgt $\alpha_{01} = \ldots = \alpha_{0n} = 0$. Ferner ist $\alpha_{00} \neq 0$, da A_1 regulär ist. A_1 ist nur bis auf eine Konstante festgelegt, folglich ist $\alpha_{00} = 1$ wählbar. Damit erhält man

$$\underline{\eta}_{erw} = A_1\, \xi_{erw},$$

also

$$\underline{\eta}' = \underline{s} + A_0\xi \quad f\ddot{u}r$$

$$\begin{cases} \underline{s} = & \text{1. Spalte von } A_1 \text{ ohne Zeile 0} \\ A_0 = & A_1 \text{ ohne 1. Zeile bzw. Spalte} \end{cases}.$$

s,A_0 beschreiben damit eine Affinität von A.

□

Im folgenden sie stets $P = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = n+1$, $K = \mathbb{R}$. Auf V sei mittels einer symmetrischen Bilinearform B eine quadratische Form Q definiert: $Q(x) = B(x,x) \forall x \in V$. Ist $Q(x) = 0$, so auch $Q(\lambda x)\ \forall \lambda \in K = \lambda Q(x)$. Damit Läßt sich sinnvoll definieren:
$p \in P$ heißt Nullstelle von Q, falls $p = K_v$ und $Q(v) = 0$ gilt. Schreibweise: $Q(p) = 0$.

12.11 Definition

Eine Teilmenge F von P heißt Hyperfläche 2. Ordnung, falls $F = \{p \in P \mid Q(p) = 0\}$ für eine passende quadratische Form Q ist.

Bemerkung :

Verschiedene Formen können als Nullstellenmenge die gleiche Hyperfläche besitzen. Etwa $\lambda Q (\lambda \in K^\times)$ und Q tun das!

12.12 Hilfssatz

Es sei $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ und $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ ein Koordinatensystem von P, d.h. $x \in P$ habe Koordinaten $(x_0 : \ldots : x_n)^{tr}0 = \underline{x}^{tr}$

(i) $F = \{x \in P \mid \underline{x}^{tr} M \underline{x} = 0\}$ ist Hyperfläche.

(ii) Zu jeder Hyperfläche F existiert eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, so daß F (i) erfüllt.

Beweis :

Zu (i): Für $p_i = Kv_i$ $(0 \leq i \leq n)$ besitzt jedes $x \in V$ Koordinaten $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der Basis $v_0, \ldots, v_n$. Hierfür liefert $\underline{x}^{tr} M \underline{x}$ eine quadratische Form auf V.

Zu (ii): Es sei $v_0, \ldots, v_n$ Basis von V sowie $B(v_i, v_j) = \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.p \in P$ habe homogene Koordinaten $\xi_0, \ldots, |xi_n$, d.h. es gilt $p = Kx$ mit $x = \sum\limits_{i=0}^{n} \xi_i v_i$. Hierfür ist dann $Q(p) = q(x) = B(x,x) = \sum\limits_{i,j=0}^{n} \xi_i \xi_j \alpha_{ij} = \underline{\xi}^{tr} M \underline{\xi}$.

□

12.13 Definition

Zwei Hyperflächen $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ von P heißen projektiv äquivalent, $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$, wenn es eine Projektivität ψ von P mit $\psi(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1$ gibt.

Bemerkung :

$\sim$ ist Äquivalenzrelation; für die zugehörigen Äqivalenzklassen werden einfache Vertreter gesucht.

12.14 Hilfssatz

Es gehöre M_i zu $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2)$ im Sinne von (12.11). Falls $S \in GL(n+1, \mathbb{R})$ existiert, so daß $M_i = S^{tr}\ M_2 S$ die zu $\mathcal{F}_1$ gehörige Matrix ist, sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ äquivalent.

Beweis :

$0 = \underline{x}^{tr}\ M_2 \underline{x} = (S^{-1}\underline{x})^{tr}\ S^{tr} M_2 S (S^{-1}\underline{x})$.

□

Beispiel :

$n = 2$

(i) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$
Ist $x_0 = 0$ die uneigentliche Hyperebene H, so besitzen die Punkte auf $\mathcal{F}\ H$ die Koordinaten $(1 : x_1 : x_2)$ bzw. affin: $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Die eigentlichen Punkte von $\mathcal{F}$ liegen auf einer Hyperebene. Ist dagegen $x_2 = 0$ die eigentliche Hyperebene, so erhält man für die eigentlichen Punkte von $\mathcal{F}$ einen Kreis: $x_0^2 + x_1^2 = 1$.

(ii) $x_0^2 - x_1^2 = 0 \Rightarrow x_0 = x_1$ oder $x_0 = -x_1$ (Hyperebenenpaar).

(iii) $x_0^2 = \ldots + x_{\|}^2 = 0$ $(k \leq n) \Leftrightarrow x_0 = \ldots = x_k = 0 . \mathcal{F}$ ist $n - (k+1)$ dim Unterraum von P. $k = n \Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$, $k = -1 : \mathcal{F} = P$.

Bemerkung :

Für eine Hyperfläche $\mathcal{F}$ von P bezeichne $m = m(\mathcal{F}) := \max\ \{dim_P\ U | U$ Unterraum von P mit $U \subseteq \mathcal{F}\}$.

Beispiel :

(i) $m = 0$, (ii) $m = n - 1$, (iii) $m = n - (k+1)$.

Bemerkung :

$\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2 \Rightarrow m(\mathcal{F} - 1) = m(\mathcal{F}_2)$. (vgl. dazu die Bem. nach 12.7).

12.15 Definition

$x \in \mathcal{F}$ heißt Doppelpunkt, wenn für jede durch x gehende Gerade $\mathcal{G}$ von P entweder $G \subseteq \mathcal{F}$ oder $G \cap \mathcal{F} = \{x\}$ gilt.

Beispiel :

(i) keine, (ii) Doppelpunkte haben $x_0 = 0$, (iii) ganz $\mathcal{F}$.

12.16 Hilfssatz

Die Menge $D(\mathcal{F})$ aller Doppelpunkte von $\mathcal{F}$ ist Unterraum von P. x mit $\underline{\xi} \in D(\mathcal{F}) \leftrightarrow \underline{\xi}^{tr} M = \underline{0}$. Wir setzen $d(\mathcal{F}) := \dim_p D(\mathcal{F})$.

Beweis :

(i) Sei x mit $\underline{\xi}^{tr} M = \underline{0}$, $y \in \mathcal{F}$ mit $\underline{\eta}$. Speziell: $x \in \mathcal{F}$. $\lambda,\ \mu \in K : (\lambda\underline{\xi} + \mu\underline{\eta})^{tr} M (\lambda\underline{\xi} + \mu\underline{\eta}) = 0$, d.h. alle Punkte der Geraden durch $\underline{\xi}$ und $\underline{\eta}$ liegen in $\mathcal{F} \Rightarrow x \in D(\mathcal{F})$.

(ii) $x \in D(\mathcal{F}) \Rightarrow x \in \mathcal{F}$. $\lambda,\ \mu \in K,\ y \in P$ mit $\underline{\eta}$:

$$\begin{aligned}(\lambda\underline{\xi} + \mu\underline{\eta})^{tr} M(\lambda\underline{\xi} + \mu\underline{\eta}) &= \lambda\mu(\underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta}) + \underline{\eta}^{tr} M\underline{\xi}) + \mu^2\underline{\eta}^{tr} M\eta \\ &= 2\lambda\mu(\underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta})\mu^2\underline{\eta}^{tr} M\underline{\eta}.\end{aligned}$$

$\underline{\eta} \in \mathcal{F} \Rightarrow 0 = 2\lambda\mu\underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta} \quad \forall\lambda,\mu \in K \Rightarrow \underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta} = 0$.
(linke Seite $= 0$, da Gerade durch x, y in $\mathcal{F}$ enthalten.

$\underline{\eta} \notin \mathcal{F} \Rightarrow$ linke Seite verschwindet <u>nur</u> für $\mu = 0$;
(wäre $\underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta} \neq 0$, so existiert auch für $M = 1$ passendes λ mit $2\lambda\mu(\underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta}) + \mu^2\underline{\eta}^{tr} M\underline{\eta} = 0$).

<u>Also</u>: $\underline{\xi}^{tr} M\underline{\eta} = 0 \quad \forall y \in P \Rightarrow \underline{\xi}^{tr} M = \underline{0}$.

(iii) $\underline{\xi}^{tr} M = 0$ definiert Unterraum von P.

□

<u>Bemerkung :</u>

(i) $d(\mathcal{F}) \leq m(\mathcal{F})$

(ii) $d(\mathcal{F}) = 0$ Doppelpunkt
$d(\mathcal{F}) = 1$ Doppelgerade
$d(\mathcal{F}) = 2$ Doppelebene
$d(\mathcal{F}) = -1 \Leftrightarrow \mathcal{F}$ nicht ausgeartet
(Doppelpunkteigenschaft bleibt unter Projektivität erhalten.)

(iii) $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2 \Rightarrow d(\mathcal{F}_1) = d(\mathcal{F}_2)$.

12.17 Satz

Zwei Hyperflächen $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2$ sind genau dann projektiv äquivalent, wenn $m(\mathcal{F}_1) = m(\mathcal{F}_2)$ und $d(\mathcal{F}_1) = d(\mathcal{F}_2)$ gilt. Jede Hyperfläche $\mathcal{F}$ ist zu $x_o^2 = \ldots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0$ äquivalent, wobei $m(\mathcal{F}) = n - (t+1)$ und $d(\mathcal{F}) = n - (r+1)$ gilt. $(-1 \leq t \leq r \leq n,\ 2t+1 \geq r)$.

<u>Beweis :</u>

(i) $\mathcal{F}$ sei durch symmetrische Matrix $M_\mathcal{F}$ bestimmt. Hierzu existiert eine orthogonale Matrix S mit $N := S^{-1}M_\mathcal{F}S = \text{diag}\ (b_o, \ldots, b_t, b_{t+1}, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)$. Hierbei ist $b_i > 0$ für $0 \leq i \leq t$, $\quad b_i < 0$ für $b_{t+1} \leq i \leq b_r$ und $t+1 \geq p-t$. S orthogonal impliziert $S^{-1} = S^{tr}$, d.h.$N = SM_\mathcal{F}S^{tr}$. Die durch N bestehende Hyperfläche $\tilde{\mathcal{F}}$ ist daher zu $\mathcal{F}$ projektiv äquivalent. Mittels $S' := \text{diag}(1bd^{-1/2}, \ldots, 1br1^{-1/2}, 1, \ldots 1)$ ist $\tilde{N} := S'^{tr} M_\mathcal{F} S'$ Diagonalmatrix der Gestalt diag $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{t+1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r-t}, 0, \ldots, 0)$ $\quad (-1 \leq t \leq r \leq n,\ t+1 > r-t)$. Dabei ist $t = r = -1$ für $N = M = 0$.

(ii) $\tilde{N}$ hat Rang $r+1 \Rightarrow d(\mathcal{F}) = n - (r+1)$.

(iii) $\xi_i = \xi_{t+1+i} \quad (0 \leq i \leq r-t-1) \quad 0 = \xi_{r-t+\nu} \quad (0 \leq \nu \leq 2t-r)$ definiert Unterraum U von P der Dimension $n - (A+1)$.
Setze $\mathcal{F}_{t,r} := \{\xi \in K^{n+1} \mid \xi_0^2 + \ldots + \xi_t^2 - \xi_{t+1}^2 - \xi_r^2 = 0\}$.
$U \subset \mathcal{F}_{t,r}$ und $\underline{\xi} \in K^{r+1} \mid \xi_{t+1} = \ldots = \xi_n = 0\} = V$ mit $\dim_p V = t$ und $U \cap V = \emptyset$.
Es sei

$$\begin{aligned} W < \mathcal{F}_{t,r}\text{Unterraum} \quad &\Rightarrow \quad V \cap W = \emptyset \\ &\Rightarrow \quad \dim_p(V \cup W) \leq n. \\ &\Rightarrow \quad \dim_p W = \dim_p(V \cap W) - \dim_p V \leq n + (-1) - t. \\ &\Rightarrow \quad m(\mathcal{F}) = n - (t+1).\end{aligned}$$

$$m(\mathcal{F}),\ d(\mathcal{F}) \Leftrightarrow t, r$$

□

Projektive Normalformen von Quadriken

$\underline{n=2}$: 6 Typen

r	t	$d(\mathcal{F})$	$m(\mathcal{F})$	Normalform-Gleichung	Bezeichnung
-1	-1	2	2	$0=0$	proj. Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
0	0	1	1	$0=x_0^2$	Doppelgerade
1	0	0	1	$0=x_0^2-x_1^2$	Geradenpaar
1	1	0	0	$0=x_0^2+x_1^2$	Doppelpunkt
2	1	-1	0	$0=x_0^2+x_1^2-x_2^2$	nicht ausgeartete Kurve
2	2	-1	-1	$0=x_0^2+x_1^2+x_2^2$	$\emptyset$

$\underline{n=3}$: 9 Typen

r	t	$d(\mathcal{F})$	$m(\mathcal{F})$	Normalform-Gleichung	Bezeichnung
-1	-1	3	3	$0=0$	$\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$
0	0	2	2	$0=x_0^2$	Doppelebene
1	0	1	2	$0=x_0^2-x_1^2$	Ebenenpaar
1	1	1	1	$0=x_0^2+x_1^2$	Doppelgerade
2	1	0	1	$0=x_0^2+x_1^2-x_2^2$	Kegel
2	2	0	0	$0=x_0^2+x_1^2+x_2^2$	Doppelpunkt
3	1	-1	1	$0=x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2$	(Ringfläche)nicht ausgeartete Fläche, die Geraden enthäl
3	2	-1	0	$0=x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2$	(Ovalfläche)nicht ausgeartete Fläche, enthält keine Gerad
3	3	-1	-1	$0=x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2$	$\emptyset$.

Anhang A: Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $f = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg(f) = 2$. Zeige:

$$f \text{ irreduzibel} \iff b^2 - 4ac < 0.$$

Aufgabe 2

Zerlege $f = t^4 - 1 \in K[t]$ in Primfaktoren für $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

Sei

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimme sämtliche Eigenwerte von A.

(ii) Bestimme $m := \max\{k \mid A^k \neq 0\}$.

Aufgabe 4

Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Finde ein $f \in K[t]$ minimalen Grades mit $f(A) = 0$.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Zeige, daß $A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6

Man berechne $\mathrm{ggT}(f, g)$ von folgenden Polynomen.

(i) $f = t^3 - 1, \ g = t - 1$

(ii) $f = t^3 + t - 1, \ g = t^2 + 1$

(iii) $f = t^4 + t^3 - t^2 + 1, \ g = t^3 - t^2 + 2$

(iv) $f = t^n + 1, \ g = t + 1$, für $n \in \mathbb{N}$.

Blatt 2

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\pi \in \mathrm{End}(V)$ eine Projektion, also $\pi^2 = \pi$.

(i) Zeige, daß V die direkte Summe der π-invarianten Unterräume $V_1 := \mathrm{Kern}(\pi)$ und $V_2 := \mathrm{Bild}(\pi)$ ist.

(ii) Bestimme das Minimalpolynom von π.

(iii) Bestimme das charakteristische Polynom in Abhängigkeit von $r := \mathrm{Rang}(\pi)$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, $f = t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 \in K[t]$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne das charakteristische Polynom f_A und zeige $f_A(A) = 0$.

(ii) Bestimme das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 3

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne f_A, alle Eigenwerte von A in K und m_A.

Aufgabe 4

Sei $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\lambda \in K\backslash\{0\}$. Finde für $A := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$ alle A-invarianten Unterräume von K^2.

Aufgabe 5

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$. Bezeichne A das Bild des Einsetzungshomomorphismus $\varphi_\sigma : K[t] \to \mathrm{End}\,(V)$, also

$$A := \{f(\sigma) \mid f \in K[t]\} \subset \mathrm{End}\,(V).$$

(i) Überlege: A ist eine kommutative K-Algebra.

(ii) Zeige: m_σ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ A ist ein Körper.

(iii) Bestimme $\dim_K(A)$.

Blatt 3

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, $\beta \in K\backslash\{0\}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & -\beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimme das Minimalpolynom m_A.

(ii) Zeige, daß K^3 ein A-zyklischer Vektorraum ist und finde einen erzeugenden Vektor.

(iii) Finde reguläre Matrizen C, D mit

$$C \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} C^{-1} = A = D \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D^{-1}.$$

Aufgabe 2

Seien V, W K-Vektorräume und $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$. Sei $\dim_K(W) = k + l$ mit $k, l \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig über Kern$\,(\varphi)$, $w_1, \ldots, w_l \in W$ linear unabhängig über Bild$\,(\varphi)$. Zeige: $\varphi\,(v_1), \ldots, \varphi\,(v_k), w_1, \ldots, w_l$ ist eine Basis von W.

Aufgabe 3

Sei

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme jeweils über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{R}$:

(i) Das Minimalpolynom von A und seine Zerlegung in Primpolynome.

(ii) Eine 1. Normalform von A.

Aufgabe 4

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(i) Zeige: $m_A = p^k$ mit einem Primpolynom $p \in \mathbb{R}[t]$. Bestimme p und k.

(ii) Finde jeweils ein $v_j \in \operatorname{Kern}(p^j(A))$, v_j linear unabhängig über $\operatorname{Kern}(p^{j-1}(A))$ für $j = 1, \ldots, k$.

(iii) Ergänze $v_1, \ldots, v_k$ durch geeignete Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$, so daß der von $v_{k+1}, \ldots, v_4$ erzeugte Unterraum A-invariant ist.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Für $0 \leq k \leq n-1$ sei N_k die $n \times n$-Matrix

$$N_k := \sum_{j=1}^{n-k} E_{j,k+j} \quad \text{und} \quad N_k := 0 \text{ für } k \geq n.$$

Zum Beispiel für $n = 4$ und $k = 2$ die Matrix $N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Berechne $N_k \cdot N_s$ für $k, s \in \mathbb{N}$.

(ii) Bestimme das Minimalpolynom von N_k.

(iii) Sei $0 < k < n$. Finde N_k-zyklischen Unterraum von K^n mit $K^n = \operatorname{Kern}(N_k) \dot{+} U$ (direkte Summe) und gib einen erzeugenden Vektor für U an.

Bemerkung zur Notation insbesondere in den Aufgabe 1, 4 und 5.

Ist A eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ mit Einträgen im Körper K, so wird stillschweigend angenommen:
A definert einen Endomorphismus, etwa $\alpha \in \operatorname{End}(K^n)$, so daß A die α zugeordnete Matrix bzgl. der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$, $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$, von K^n ist. Also

$$\alpha(e_j) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i.$$

Blatt 4

Aufgabe 1

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ und $\sigma \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^3)$ eine Drehung um den Winkel α. Bestimme die 2. Normalform von σ über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2

Sei $f = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, t^i \in K[t]$ und

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(i) Gib das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A_f an.

(ii) Sei $p \in K[t]$ normiert und irreduzibel vom Grad k. Für ein $l \in \mathbb{N}$ sei $f = p^l$. Bestimme die 2. Normalform von A_f.

Aufgabe 3

Sei V ein K-Vektroraum mit $\dim_K(V) < \infty$ und $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$. Beweise die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) Es gibt eine Basis von V, so daß die zugehörige Matrix A_σ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(ii) Das Minimalpolynom von σ zerfällt über K in Linearfaktoren.

Sei $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ mit $\sigma^4 = \mathrm{id}$. Untersuche in den Fällen $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ob σ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 4

Sei $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ oder $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}.$$

(i) Für welche K ist $m_A = p^l$ mit einem Primpolynom $p \in K[t]$?

Berechne in diesen Fällen p, l und die 2. Normalform von A.

(ii) Berechne in den anderen Fällen die Jordansche Normalform von A.

Aufgabe 5

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$ mit Minimalpolynom $m_\sigma = p^l$. Dabei sei $p \in K[t]$ ein Primpolynom vom Grad k. Beweise, daß für die Funktion $r(\mu)$ aus dem Satz über die 2. Normalform gilt:

$$k \sum_{s=\mu}^{l} r(s) = \dim_K \mathrm{Kern}\ \left(p(\sigma)^\mu\right) - \dim_K \mathrm{Kern}\ \left(p(\sigma)^{\mu-1}\right)$$

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \mu - i & 0 & 1 \\ -2 & \mu + 1 & -2i \\ -1 & i & \mu - i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(i) Berechne die Jordansche Normalform J_A von A.

(ii) Finde eine reguläre 3×3-Matrix D, mit $D^{-1}AD = J_A$.

Aufgabe 2

Bestimme die Jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 1\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -1\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 2\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 3

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$. Bezüglich einer geeigneten Basis von V sei die zugehörige Matrix J_σ in Jordanscher Normalform. Bezeichne mit D_σ den diagonalen Anteil von J_σ. Zeige, daß für $\lambda \in K\backslash\{0\}$ gilt:

$$J_{\lambda\cdot\sigma} := \lambda \cdot D_\sigma + (J_\sigma - D_\sigma)$$

ist Jordansche Normalform von $\lambda \cdot \sigma \in \mathrm{End}\,(V)$.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V der Vektorraum der Polynome $f \in K[t]$ mit $\mathrm{grad}\,(f) \leq n$. Betrachte die Endomorphismen D, $T \in \mathrm{End}\,(V)$ mit

$$D \,:\, f \longmapsto f'$$

also

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1}\, t^k =: D(f)$$

und

$$T \,:\, f \longmapsto f(t+1)$$

also

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, (t+1)^k =: T(f).$$

Bestimme das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von D und T. Setze zur Vereinfachung $\mathrm{char}\,(K) = 0$ voraus.

Aufgabe 5

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\sigma \in \mathrm{End}\,(V)$. Beweise:

$$V \text{ ist } \sigma\text{-zyklisch} \quad \Longleftrightarrow \quad f_\sigma = m_\sigma.$$

Blatt 6

Aufgabe 1

Sei K ein Körper. Betrachte die Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$

$$A \sim B \;\; (A \text{ ähnlich } B) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt } T \in \mathrm{Gl}_n(K) \text{ mit } T^{-1}AT = B.$$

Seien $\lambda,\, \mu \in K$ und $k,\, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k + l = 5$. Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen von Matrizen $A \in K^{5\times 5}$ mit vorgegebenen charakteristischem Polynom $f_A = (t-\lambda)^k \cdot (t-\mu)^l \in K[t]$.

Aufgabe 2

(i) Seien $x,\, y \in \mathbb{R}$und $A := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Bestimme m_A und die Normalform von A über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$. Zeige

$$A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit geeigneten $d,\, \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit charakteristischem Polynom $f_A = t^2 + 2p\,t + q$ und $p^2 - q < 0$.

(a) Bestimme die Normalform von A über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.

(b) Zeige: Es gibt eindeutig durch A bestimmte $x,\, y \in \mathbb{R}$ und ein $T \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(T) > 0$ und

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $n,\, m \in |IN$ und $V := K^{n\times m}$, $W := K^{m\times n}$. Zeige:

$$B \,:\, V \times W \to K \quad \text{mit} \quad \mathrm{Spur}\,(AB)$$

ist eine Bilinearform des Raumpaares $(V,\, W)$. Mit B wird $(V,\, W)$ zum dualen Raumpaar.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $B \in K^{n\times n}$ und $V := K^n$.

Ist $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein Spaltenvektor, so bezeichne x^{tr} den Zeilenvektor $x^{\mathrm{tr}} := (x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)$. Betrachte die Bilinearform

$$b \,:\, V \times V \to K \quad \text{mit} \quad b(x,\, y) := x^{\mathrm{tr}}By.$$

Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $b(x,\, y) = 0$ für alle $x \in V \;\Rightarrow\; y = 0$.

(ii) $\det(B) \neq 0$.

Blatt 7

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $F := \{(b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \mid b_i \in K\}$ der K-Vektorraum der Folgen in K. Definiere $\Phi \,:\, F \to \mathrm{Hom}_K(K[t],\, K)$ vermöge

$$\Phi\left((b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}\right)(f) := \sum_{j=0}^{n} a_j\, b_j \;\text{ für jedes } f = \sum_{j=0}^{n} a_j\, t^j \in K[t].$$

Zeige, daß Φ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $V := K^{n\times 1} = K^n$ und $W := K^{1\times n}$. Definiere eine Bilinearform $b\,:\, W\times V \to K$ durch

$$b\left((x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i.$$

(i) Zeige: $\varphi\ :\ W \to \operatorname{Hom}_K(V,\, K)$ mit $(\varphi\, w)\, v := b(w,\, v)$ für $w \in W$ und $v \in V$ ist ein Isomorphismus.

(ii) Sei $n = 4$ und $K = \mathbb{R}$ und $v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4$ die folgende Basis von V:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die bezüglich b duale Basis in W.

Aufgabe 3

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

und $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^5,\, \mathbb{R}^4)$ der zugeordnete Homomorphismus bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^5$ und $\mathbb{R}^4$. Sei α^* die duale Abbildung. Finde jeweils eine Basis von

$$\operatorname{Kern}(\alpha^*), \quad (\operatorname{Kern}(\alpha^*))^{\perp}, \quad \operatorname{Bild}(\alpha)$$

und

$$\operatorname{Bild}(\alpha^*), \quad (\operatorname{Bild}(\alpha^*))^{\perp}, \quad \operatorname{Kern}(\alpha).$$

Aufgabe 4

Betrachte $V = \mathbb{R}^n$ mit dem eudlidischen "Standart-" Skalarprodukt. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenraum W_λ und $b \in V$. Zeige:

$$\text{Es gibt ein } v \in V \text{ mit } Av = b + \lambda\, v \quad \Longleftrightarrow \quad b \in W_\lambda^{\perp}.$$

Blatt 8

Aufgabe 1

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & -3 & 8 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Verwende das Cholesky Verfahren und

(i) zeige A ist positiv definit;

(ii) zerlege A in $A = R^{\mathrm{tr}} R$ mit einer oberen Dreiecksmatrix R;

(iii) finde alle $x \in \mathbb{Z}^4$ mit $x^{\mathrm{tr}} A\, x \le 3$. Gib deren genau Anzahl an.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,2,3\\j=1,2,3}} \in K^{3\times 3}$ symmetrisch mit $a_{1,1} \neq 0$ und $\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \neq 0$.

(i) Zeige: Es gibt eine Diagonalmatrix $D \in K^{3\times 3}$ und eine obere Dreicksmatrix $P \in K^{3\times 3}$ mit $\mathrm{Diag}\,(P) = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, so daß $A = P^{\mathrm{tr}} D P$ ist.

(ii) Sei $K = \mathbb{R}$ und A wie oben. Zeige, daß A genau dann positiv definit sit, wenn $a_{1,1}$, $\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ und $\det(A)$ positiv sind.

Aufgabe 3

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Finde eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und eine obere Dreiecksmatrix $P \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit Diagonale $\mathrm{Diag}\,(P) = I_4$, so daß $A = P^{\mathrm{tr}} D P$ ist.

Aufgabe 4

Seien V_1, V_2, V_3, U, W K-Vektorräume, $b : V_1 \times V_2 \to U$ und $\hat{b} : U \times V_3 \to W$ bilinear. Zeige: $m : V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$, definiert durch $m(v_1, v_2, v_3) := \hat{b}(b(v_1, v_2), v_3)$ für alle $v_i \in V_i,\ i = 1, 2, 3$, ist multilinear.

Bemerkung zur Bezeichnung in den Aufgabe 2 und 3.

Ist $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\j=1,\ldots,n}} \in K^{n\times n}$, so ist die Diagonale von A definiert durch

$$\mathrm{Diag}\,(A) := (b_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\j=1,\ldots,n}} \text{ mit } b_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ a_{i,i} & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Blatt 9

Aufgabe 1

Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\gamma_i(z) := \begin{cases} z & \text{für } i = 0 \\ \overline{z} & \text{für } i = 1 \end{cases}$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ eine Abbildung, so definiere

$$\phi : \underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi\,(z_1, \ldots, z_n) := \prod_{j=1}^{n} \gamma_{\alpha(j)}(z_j).$$

Fasse $\mathbb{C} =: V$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und zeige: $\phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to V$ ist multilinear.

Aufgabe 2

Seien U, V, W K-Vektorräume und sei

$$R := \{v \otimes w \mid v \in V \text{ und } w \in W\} \subseteq V \otimes_K W.$$

Zeige: Ist $f : R \to U$ eine Abbildung mit

(i) $f((v_1 + v_2) \otimes (w_1 + w_2)) = f(v_1 \otimes w_1) + f(v_2 \otimes w_1) + f(v_1 \otimes w_2) + f(v_2 \otimes w_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$,

(ii) $f((\lambda\, v) \otimes (\mu\, w)) = \lambda\, \mu\, f(v \otimes w)$ für alle $\lambda, \mu \in K,\ v \in V$ und $w \in W$,

so gibt es genau eine lineare Abbildung $\hat{f} : V \otimes_K W \to U$ mit $\hat{f}_{|R} = f$.

Aufgabe 3

Beweise den Hilfssatz (10.8) aus der Vorlesung.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Finde einen Isomorphismus zwischen $V \otimes_K K$ und V.

Aufgabe 5

Sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $V := K^2$ und $W := K^3$. Bestimme $\dim_K(V \otimes_K W)$ und die Anzahl der Elemente von $V \otimes_K W$.

Aufgabe 6

Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$,

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Schreibe $v_k \otimes v_l$ für $k \leq l$ als Linearkombination von Tensoren der Form $e_i \otimes e_j$. Verfahre ebenso mit $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$.

Blatt 10

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, $V := K^2$ und $\alpha, \beta \in \operatorname{End}(V)$.

(i) Finde eine Matrixdarstellung von $T(\alpha, \beta) \in \operatorname{End}(V \otimes_K V)$ etwa speziell für $K = \mathbb{R}$ und

$$\alpha \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Berechne allgemein $\operatorname{Spur}(T(\alpha, \beta))$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und

$$\psi : V \otimes_K V \longrightarrow V \otimes_K V \quad \text{mit} \quad \psi(x \otimes y) = y \otimes x \quad \text{für alle} \quad x, y \in V$$

die Vertauschungsabbildung aus Hilfssatz 10.8. Definiere

$$S := \{z \in V \otimes_K V \mid \psi(z) = z\}$$

und

$$A := \{z \in V \otimes_K V \mid \psi(z) = -z\}.$$

(i) Zeige: $V \otimes_K V = S \dot{+} A$ (direkte Summe).

(ii) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V. Gib jeweils eine Basis von S und von A an. Bestimme $\dim_K A$ und $\dim_K S$.

(iii) Zeige: Ist W ein K-Vektorraum und $\phi : V \times V \to W$ bilinear mit $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ für alle $x, y \in V$, so gibt es genau eine lineare Abbildung

$$\hat{\phi} \in \operatorname{Hom}_K(V \otimes_K V; W) \quad \text{mit} \quad \hat{\phi}(x \otimes y + y \otimes x) = 2\,\phi(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in V.$$

Aufgabe 3

Seien V, $\hat{V}$, W, $\widehat{W}$ Vektorräume beliebiger Dimension über dem Körper K und $\alpha \in \mathrm{Hom}_K(\hat{V};\, V)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_K(\widehat{W};\, W)$. Zeige:

(i) α und β surjektiv $\Rightarrow$ $T(\alpha,\, \beta) \in \mathrm{Hom}\ _K(\hat{V} \otimes_K \widehat{W};\, V \otimes_K W)$ ist surjektiv.

(ii) $\Psi\ :\ \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W;\, K) \to \mathrm{Hom}_K(V,\, W;\, K)$ mit $(\Psi\, h)\,(v,\, w) := h(v \otimes w)$ für alle $v \in V,\ w \in W$ ist ein Isomorphismus.

(iii) α injektiv $\Rightarrow$ $(T(\alpha,\, \mathrm{id}))^*\ :\ \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W;\, K) \to \mathrm{Hom}_K(\hat{V} \otimes_K W;\, K)$ ist surjektiv.

(iv) α und β injektiv $\Leftrightarrow$ $T(\alpha,\, \beta) \in \mathrm{Hom}_K(\hat{V} \otimes_K \widehat{W};\, V \otimes_K W)$ ist injektiv.

Aufgabe 4

Seien V, W Vektorräume beliebiger Dimension über dem Körper K.

(i) Verwende Korollar (10.12) und Aufgabe 3 (iv), um zu zeigen:

Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig in V und $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig in W, so ist $\{v_i \otimes w_j \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ linear unabhängig in $V \otimes_K W$.

(ii) Sei J eine Indexmenge und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W.

Zeige: Jedes Element $x \in V \otimes_K W$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{j \in J} v_j \otimes w_j \quad \text{mit} \quad v_j \in V \text{ und nur endlich viele } v_j \neq 0.$$

Blatt 11

Aufgabe 1

Seien $V := \mathbb{R}^n$ und $W := \mathbb{R}^m$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_n$ beziehungsweise $e_1, \ldots, e_m$ versehen. Sei $\varepsilon\ :\ V \times W \to V \otimes_{\mathbb{R}} W$ die bilineare Abbildung $\varepsilon\,(x,\, y) = x \otimes y$ für alle $x \in V$ und $y \in W$.

(i) Zeige: Sind $n,\, m \ge 2$, so ist $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \notin \mathrm{Bild}\,(\varepsilon)$.

(ii) Zeige: f surjektiv $\Leftrightarrow$ $n = 1$ oder $m = 1$.

Aufgabe 2

Sei $V := \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, das heißt $B^{\mathrm{tr}} = -B$.

(i) Zeige, daß $b\ :\ V \times V \to \mathbb{R}$ mit $b(x,\, y) := x^{\mathrm{tr}} B\, y$ für $x,\, y \in V$ eine alternierende Bilinearform ist.

(ii) Zeige: Ist $W \le V$ mit $b(x,\, y) = 0$ für alle $x,\, y \in W$, so ist $W \le W^{\perp}$.

Folgere induktiv: Es gibt einen Unterraum W von V mit $W = W^{\perp}$.

(iii) Sei $\det B \neq 0$, $W \le V$ mit $W = W^{\perp}$. Beweise oder widerlege: $\dim_{\mathbb{R}} W = \frac{n}{2}$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}\,(K) \neq 2$, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und A der Unterraum von $V \otimes_K V$ aus Aufgabe 10.2. Finde einen "natürlichen" Isomorphismus $A \cong \Lambda_2(V)$.

Aufgabe 4

Seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $\alpha \in \mathrm{Hom}_K(V;\, W)$.

(i) Überlege: Vermöge $\lambda_k(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) := (\alpha\, v_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha\, v_k)$ für $v_1, \ldots, v_k \in V$ wird eine K-lineare Abbildung $\lambda_k \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda_k(V);\, \Lambda_k(W))$ definiert. (λ_k hängt natürlich von α ab. Schreibweise: $\lambda_k = \lambda_k(\alpha)$.)

(ii) Sei $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$ und $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimme die zu $\lambda_k(\alpha)$ gehörige Matrix bezüglich der kanonischen Basen von $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$, $n = 3, 4$ für

$$\alpha \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Zeige: Ist $V = W$, $\dim(V) = n$ und $\alpha \in \mathrm{End}\,(V)$, so ist $\lambda_n(\alpha) = (\det\, \alpha) \cdot \mathrm{id}_{|\Lambda_n(V)}$.

Aufgabe 5

Sei $V := \mathbb{R}^n$ und $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda_n(V);\, K)$. Zeige, daß für zwei Basen $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ von V äquivalent sind:

(i) B_1 und B_2 sind gleich orientiert.

(ii) Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, mit $f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \delta\, f(w_1 \wedge \ldots \wedge w_n)$.

Aufgabe 6

Sei $\sigma \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^3)$. Zeige, daß für alle v, $w \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(i) $\sigma\,(v) \times \sigma\,(w) = \det\, \sigma \cdot \sigma\,(v \times w)$, falls $\sigma \in O_3(\mathbb{R})$.

(ii) $\sigma\,(v \times w) = \sigma\,(v) \times w + v \times \sigma\,(w)$, falls $\sigma^{\mathrm{tr}} = -\sigma$.

Anhang B: Klausuren zur Linearen Algebra II

Klausurbedingungen:

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Hilfsmittel: Aufzeichnung von den Übungen, Skript der Vorlesung und ein Lehrbuch.

Bestanden: ab 20 Punkte

B.1 Klausur

Aufgabe 1 (10P)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 1-i \\ i-1 & i & 2+i \\ 2 & 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) (5P) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J_A von A.

(b) (5P) Finden Sie eine reguläre 3×3-Matrix D mit $D^{-1} A\, D = J_A$.

Aufgabe 2 (8P)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

(a) (3P) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

(b) (5P) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A, und geben Sie eine Jordanbasis an.

Aufgabe 3 (16P)

Sei $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}.$$

(a) (3P) Berechnen Sie das Minimalpolynom m_A von A.

(b) (6P) Sei $K = \mathbb{Q}$. Berechnen Sie die 2. Normalform N_A von A und eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $T^{-1} A\, T = N_A$.

(c) (5P) Sei $K = \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Jordansche Normalform J_A von A und eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $S^{-1} A\, S = J_A$.

(d) (2P) Sei $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Jordansche Normalform J_A von A.

Aufgabe 4 (8P)

Bestimmen Sie die 2. oder, falls möglich, die Jordansche Normalform von Matrizen $A \in K^{n\times n}$ mit vorgegebenem charakteristischem Polynom und vorgegebenem Minimalpolynom. Und zwar in folgenden Fällen:

(a) (3P) $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $m_A = f_A = (t^2+1)\,(t^2-2)$,

(b) (5P) $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $f_A = (t^2+3)\,(t-1)\,(t^2-3t+2)$ und $m_A = (t^2+3)\,(t^2-3t+2)$.

Aufgabe 5 (10P)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und V der Vektorraum der reellen Polynome $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $\operatorname{grad}(f) \leq n$,

$$V := \{f \in \mathbb{R}[t] \mid \operatorname{grad} f \leq n\}.$$

Betrachte den Endomorphismus $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit

$$\sigma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_k\, t^{k+1} \qquad \left(\text{für} \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k \ \in V\right).$$

(a) (5P) Bestimmen Sie $\sigma(t^k)$ für $k = 0, \ldots, n$, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von σ.

(b) (5P) Finden Sie die Jordansche Normalform von σ und eine Jordanbasis.

Aufgabe 6 (7P)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $V := \mathbb{R}^n$ und $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Euklidische Norm. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^{\mathrm{tr}} A = A A^{\mathrm{tr}}$. Beweisen Sie:

(a) (3P) Für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| = \|A^{\mathrm{tr}} v\|$,

(b) (2P) $\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Kern}(A^{\mathrm{tr}})$.

(c) (2P) $\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Bild}(A^{\mathrm{tr}})$.

Aufgabe 7 (11P)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & -12 \\ -4 & 7 & -11 & 18 \\ 8 & -11 & 21 & -32 \\ -12 & 18 & -32 & 51 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

(a) (6P) Zerlegen Sie A in $A = R^{\mathrm{tr}} R$ mit einer oberen Dreiecksmatrix R.

(b) (5P) Finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}^4$ mit $x^{\mathrm{tr}} A\, x \leq 2$.

Aufgabe 8 (10P)

Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über dem Körper K. Sei $\alpha \in \operatorname{End}(V)$ und $\beta \in \operatorname{End}(W)$.

(a) (4P) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von α und $\mu \in K$ Eigenwert von β, so ist $\lambda \cdot \mu \in K$ Eigenwert von $T(\alpha, \beta) \in \operatorname{End}(V \otimes_K W)$.

(b) (3P) Zeigen Sie: Sind α und β diagonalisierbar, so ist $T(\alpha, \beta)$ diagonalisierbar.

(c) (3P) Sei $K = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}^2$ und $\alpha \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $\gamma := T(\alpha, \alpha)$ in Abhängigkeit von J_α.

Aufgabe 9 (10P)

Sei $B = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, $\|\ \| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Euklidische Norm und $\times$ das übliche Kreuzprodukt. Zeigen Sie, daß für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) (6P) $v \wedge w \wedge (v \times w) = \|v \times w\|^2 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ in $\Lambda_3(\mathbb{R}^3)$.

(b) (4P) Sind v und w linear unabhängig, so ist $B' := \big(v, w, (v \times w)\big)$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 10 (10P)

Sei Q die Quadrik in $\mathbb{R}^n$, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Q \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = 0.$$

Zeigen Sie, daß jede Gerade in $\mathbb{R}^n$, die ganz in Q verläuft, durch den Ursprung geht.
(Tip: $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $(x,\, y)^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

B.2 Nachklausur

Aufgabe 1 (8P)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

(a) (5P) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A, und geben Sie eine Jordanbasis an.

(a) (3P) Berechnen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von A.

Aufgabe 2 (10P)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2i & 1 & -3i \\ 2 & -i & -2 \\ i & 1 & -2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) (5P) Berechnen Sie die Jordansche Normalform J_A und das Minimalpolynom m_A von A.

(b) (5P) Finden Sie eine reguläre 3×3-Matrix D mit $D^{-1}A\,D = J_A$.

Aufgabe 3 (16P)

Sei $K = \mathbb{Q},\ K = \mathbb{C},\ K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ oder $K = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}.$$

(a) (3P) Zeigen Sie, daß 3 ein Eigenwert von A ist, und berechnen Sie das Minimalpolynom m_A und das charakteristische Polynom von A.

(b) (6P) Sei $K = \mathbb{Q}$. Berechnen Sie die 2. Normalform N_A von A und eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $T^{-1}A\,T = N_A$.

(c) (5P) Sei $K = \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Jordansche Normalform J_A von A und eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $S^{-1}A\,S = J_A$.

(d) (2P) Sei $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ oder $K = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Berechnen Sie die 2. Normalform oder, falls möglich, die Jordansche Normalform von A.

Aufgabe 4 (10P)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n.

$$V := \{f \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(f) \le n\}.$$

Betrachte den Endomorphismus $\sigma \in \operatorname{End}(V)$ mit

$$\sigma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k\right) = \sum_{k=1}^{n} (k a_k + a_{k-1})\, t^k \qquad \left(\text{für} \sum_{k=0}^{n} a_k\, t^k \ \in V\right).$$

(a) (4P) Geben Sie $\sigma(t^k)$ für $k = 0, \ldots, n$ an. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von σ (zerlegt in Linearfaktoren).

(b) (2P) Bestimmen Sie das Minimalpolynom und eine Jordansche Normalform von σ.

(c) (4P) Finden Sie eine zugehörige Jordanbasis.

Aufgabe 5 (7P)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $V := \mathbb{R}^n$ und $\|\ \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Euklidische Norm. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^{\text{tr}}A = AA^{\text{tr}}$. Beweisen Sie:

(a) (1P) Für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| = \|A^{\text{tr}}v\|$.

(b) (3P) $\text{Bild}\,(A) = \text{Bild}\,(A^{\text{tr}})$.

(c) (3P) V ist die direkte Summe $V = \text{Kern}\,(A) \dot{+} \text{Bild}\,(A)$.

Aufgabe 6 (12P)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 & 9 \\ 3 & 5 & -4 & 5 \\ -6 & -4 & 15 & -21 \\ 9 & 5 & -21 & 36 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) (6P) Zerlegen Sie A in $A = R^{\text{tr}}R$ mit einer oberen Dreiecksmatrix R.

(b) (1P) Zeigen Sie: A ist nicht positiv definit.

(c) (5P) Finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}^4$ mit $x^{\text{tr}}A\,x = 3$.

Aufgabe 7 (10P)

Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über dem Körper K. Sei $\alpha \in \text{End}\,(V)$ und $\beta \in \text{End}\,(W)$.

(a) (3P) Zeigen Sie: Ist α nilpotent, so ist auch $T(\alpha, \beta) \in \text{End}\,(V \otimes_K W)$ nilpotent.

(b) (2P) Zeigen Sie: $T(\alpha, \beta)$ nilpotent $\Rightarrow$ α nilpotent oder β nilpotent.

(c) (5P) Zeigen Sie, daß für den Grad des Minimalpolynoms von $T(\alpha, \beta)$ gilt:

$$\deg\,(m_{T(\alpha,\beta)}) \geq \min\{\deg\,(m_\alpha),\, \deg\,(m_\beta)\}.$$

Aufgabe 8 (10P)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und v_1, v_2, v_3 eine Basis von V.

(a) (4P) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Schreibe

$$x := (\alpha v_1 - v_3) \wedge (\beta v_1 + \gamma v_2) \ \in \Lambda_2(V)$$

als eine Linearkombination der kanonischen Basisvektoren von $\Lambda_2(V)$.

(b) (6P) Zeige: Ist $x \in \Lambda_2(V)$ beliebig, dann gibt es Vektoren $v, w \in V$ mit $x = v \wedge w$.

Aufgabe 9 (7P)

Sei Q die Quadrik in $\mathbb{R}^3$

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y^2 + 2xy - 2\,(x+y) + z = 1 \right\}.$$

Berechnen Sie die Hauptachsenform (Normalform) von Q.

Aufgabe 10 (10P)

Sei $n \geq 3$ und Q die Quadrik in $\mathbb{R}^n$, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Q \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 + x_n^2.$$

(a) (2P) Finden Sie eine Gerade, die ganz in Q verläuft.

(b) (2P) Sei $x \in Q,\ y \in \mathbb{R}^n$ und G die Gerade

$$G := \{x + t\,y \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie: $G \subseteq Q \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = y_n^2.$

(c) (6P) Sei U ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim U \geq 1$, der ganz in Q enthalten ist. Zeigen Sie, daß U eine Gerade ist.

Literaturverzeichnis

[1] G. Fischer, *Lineare Algebra,* Vieweg.

[2] U. Stammbach, *Lineare Algebra*, Teubner.

[3] E. Brieskorn, *Lineare Algebra und analytische Geometrie I, II,* Vieweg.

[4] H.-J. Kowalsky, *Lineare Algebra*, W. de Gruyter.

[5] S. Lipschutz, *Lineare Algebra,* McGraw-Hill, Schaum's Outline.

[6] R. A. Usmani, *Applied Linear Algebra*, Dekker.

[7] M. Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer.

[8] W. Greub, *Lineare Algebra,* Springer.

[9] F. Lorenz, *Lineare Algebra I, II,* BI-Verlag.

Symbolverzeichnis

$\neg a$	nicht a, Gegenteil von a
$a \vee b$	a oder b
$a \wedge b$	a und b
$a \Leftrightarrow b$	a und b sind gleichwertig bzw. äquivalent.
$a \Rightarrow b$	Aus a folgt b.
$a := b$	a ist definiert durch b.
$a \overset{!}{=} b$	a ist genau gleich b.
$V \cong K$	V ist isomorph zu K.
$\circ$	binäre Verknüpfung, skalare Multiplikation oder Komposition
$\forall$	für alle
$\exists$	Es existiert.
$\dot{\exists}$	Es existiert eindeutig (auch: $\exists!$).
$a\|b$	a teilt b, d.h. $\exists c\ :\ b = a\,c$.
$a \sim b$	a ist äquivalent zu b. $\sim$ heißt Äquivalenzrelation.
$a \circledR b$	Relation zwischen a und b (auch: $a \mathrm{R} b$)
$\overline{a}$	zu a konjungiert komplexe Zahl
$\mathrm{Re}\ z$	Realteil der komplexe Zahl z
$\mathrm{Im}\ z$	Imaginarteil der komplexe Zahl z
$\|a\|$	Absolutbetrag von a
$a \bmod b$	a modulo b
$a!$	Fakultät von a, d.h. $a! = 1 \cdot \ldots \cdot a$
$\mathrm{ggT}\,(a,\,b) = c$	größter gemeinsame Teiler von a und b ist c.
$\mathrm{kgV}\,(a,\,b) = c$	kleinstes gemeinsame Vielfache von a und b ist c.
δ_{ij}	Kronecker-Symbol, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, für } i = j \\ 0 & \text{, für } i \neq j \end{cases}$
$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$	Produkt über alle a_i's, d.h. $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	Summe über alle a_i's, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \ldots + a_n$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{K}$	Körper der reellen oder komplexen Zahlen
$\mathbb{P}$	Menge aller Primzahlen, d.h. $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{Z}^{>1} \| \ x$ nur durch 1 und sich selbst teilbar$\}$
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	Restklassenring, für $m \in \mathbb{P}$ Körper ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_m$)
$\mathbb{F}_m$	Ring mit $\sharp\mathbb{F}_m = m$ Elementen, für $m \in \mathbb{P}$ Körper ($\mathbb{F}_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)
$\emptyset$	leere Menge

$x \in A$	x ist in A, d.h. x gehört zur Menge A.
$x \notin A$	x nicht in A, d.h. x gehört nicht zur Menge A
$\sharp A$	Anzahl der Elemente von A
$A \subset B$	A ist echte Teilmenge von B, d.h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B, d.h. $x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$.
$A \backslash B$	Differenz von Mengen, d.h. $A \backslash B := \{x \in A \,\vert\, x \notin B\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge von A
$A \cap B$	Durchschnitt von Mengen, d.h. $A \cap B := \{x \,\vert\, x \in A \wedge x \in B\}$
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$	Durchschnitt aller A_i's mit $i \in I$, d.h. $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \,\vert\, x \in A_i,\ \forall i \in I\}$
$A \cup B$	Vereinigung von Mengen, d.h. $A \cup B := \{x \,\vert\, x \in A \vee x \in B\}$
$A \,\dot{\cup}\, B$	disjunkte Vereinigung, d.h. $A \cap B = \emptyset$
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$	Vereinigung aller A_i's mit $i \in I$, d.h. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \,\vert\, \exists i \in I \,:\, x \in A_i\}$
I_n	bezeichnet die Einheitsmatrix im $K^{n \times n}$
$A = (\alpha_{ij})$	Matrix A mit Komponenten α_{ij}
A^{tr}	transponierte Matrix zu A
A^{-1}	inverse Matrix zu A
$\overline{A}$	konjungierte Matrix zu A
A^*	Abbildung φ^* zugeordnete Matrix mit $A^* = \overline{A}^{\mathrm{tr}}$
$\mathrm{rg}\, A$	Rang der Matrix A
$\mathrm{Sp}\,(A)$	Spur der Matrix A
$\det\,(A)$	Determinante der Matrix A
$\mathrm{diag}\,(a_1, \ldots, a_n)$	bezeichnet die Diagonalelemente einer Matrix
$J(A)$	Jordan Normalform von A
$S(A)_i$	bezeichnet die i-te Spalte der Matrix A
$Z(A)_i$	bezeichnet die i-te Zeile der Matrix A
S_{ij}	vertaucht entweder zwei Zeilen oder zwei Spalten
$T_{ij}(\alpha)$	addiert das α-fache einer Zeile/Spalte auf eine Zeile/Spalte
D_j	verändert das Vorzeichen einer Zeile oder Spalte
E_{ij}	In der Spalte j und Zeile i steht eine 1, sonst Nullen.
$O(n)$	Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen
$SO(n)$	Gruppe der eigentlich orthogonalen $n \times n$-Matrizen
$U(n)$	Gruppe der unitären $n \times n$-Matrizen
$\mathrm{GL}\,(n, K)$	Gruppe der invertierbaren (regulären) $n \times n$-Matrizen
$\underline{0}$	Nullvektor
$\underline{x}$	Vektor
$\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$	Einheitsvektoren (positiv orientiert), kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$
$\Vert x \Vert$	Norm von x
$B\,(\underline{x}, \underline{y})$	Bilinearform $\underline{x}$ und $\underline{y}$
$d(\underline{x}, \underline{y})$	Abstand von $\underline{x}$ und $\underline{y}$
$\underline{x} \perp \underline{y}$	$\underline{x}$ ist orthogonal zu $\underline{y}$.
$\dim V$	Dimension der Vektorraums V
$[T]$	Lineare Hülle
$U_1 \oplus U_2$	direkte Summe zweier Untervekorräume U_1 und U_2
$U_1 \dot{+} U_2$	direkte Summe zweier Untervektorräume U_1 und U_2
V/U	Quotientenvektorraum von V nach U bzw. V faktorisiert nach U
$U^{\perp}$	orthogonales Kompliment von U
V^*	dual Raum zu V

$V = \prod_{i=1}^{r} V_i$	V ist direktes (kartesisches) Produkt der V_i's, d.h. $V = \prod_{i=1}^{r} V_i = V_1 \times \ldots \times V_r$.
$V \otimes W$	Tensorprodukt von V und W
$T(\varphi)$	tensorielles Produkt, d.h. $T(\varphi) = T(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$
$\Lambda_r(V)$	r-te äußere Potenz von V
$\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2$	äußeres Produkt von $\underline{v}_1$ und $\underline{v}_2$
$\mathcal{S}_n$	Symmetrische Gruppe mit $\sharp\mathcal{S}_n = n!$
$\mathcal{A}_n$	Alternierende Gruppe mit $\sharp\mathcal{A}_n = \frac{n!}{2}$
$\operatorname{sign}(x)$	Signum (Vorzeichen) von x
id	identische Abbildung, leeres Produkt
$\mathcal{O}$	Nullabbildung
π	Projektion
ε	Einbettung
m_σ	normiertes Minimalpolynom
$\varphi : V \to W$	φ ist eine Abbildung von V nach W.
$\varphi\|_M$	φ eingeschänkt auf $M \subset V$.
φ^{-1}	Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung φ
φ^*	zu φ duale Abbildung
$\varphi \circ \psi$	Komposition (Hintereinanderausführung) der Abbildungen ψ und φ
$\operatorname{Im} \varphi$	Bild der Abbildung φ
$\ker \varphi$	Kern der Abbildung φ
$\operatorname{rg} \varphi$	Rang der Abbildung φ
$\det(\varphi)$	Determinante des Endomorphismus φ
$\operatorname{Hom}(V, W)$	Homomorphismen (lineare Abbildungen) von V nach W
$\operatorname{End}(V)$	Endomorphismen von V, d.h. $\operatorname{End}(V) = \operatorname{Hom}(V, V)$ (Ring)
$\operatorname{Aut}(V)$	Automorphismen von V
$K[t]$	Polynomring in der Unbestimmen (Variable) t über K
$\deg(f)$	Grad des Polynoms f
$l(f)$	Leitkoeffizient des Polynoms f
f_φ	charakteristisches Polynom der Abbildung φ
$\frac{\partial}{\partial x} f$	Ableitung von f nach x
(A, V_A, T)	affiner Raum
$[M]$	affine Hülle von M
$TV(p, q, r)$	Teilungsverhältnis von p, q, r
$p \parallel q$	p parallel zu q
$\overline{M N}$	Stecke von M nach N
Q	Quadrik (Hyperfläche 2. Ordnung)
$C_1(\mathbb{R})$	Vektorraum der differenzierbaren Funktionen
$C_\infty(\mathbb{R})$	Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen
K^M	Funktionen, die eine Menge M in einen Körper K abbilden. $K^M = \{f : M \to K\}$

Stichwortverzeichnis