TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe: 17.12.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008` in der Übung

9. Übung Algebra II

(Galoistheorie III)

---

1. Aufgabe

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ferner sei der Winkel $\frac{2\pi}{n}$ mit θ_n bezeichnet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) θ_m und θ_n sind konstruierbar, falls θ_{mn} konstruierbar ist.

(b) θ_{mn} ist konstruierbar, falls θ_m und θ_n konstruierbar mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ sind.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei G eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q Primzahlen sind. Dann ist G auflösbar.

(b) Jede Nullstelle eines irreduziblen Polynoms über $\mathbb{Q}$ liegt in einer Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$, falls eine Nullstelle von f in einer Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt.

(4 Punkte)

3. Aufgabe*

(a) Es sei $f(t) = t^4 - 10t^2 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$.

(b) Sei $\alpha = \sqrt{(2+\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{3})}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ galoische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist mit $G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \cong Q_8$.

(c) Geben Sie durch ein erzeugendes Polynom Erweiterung F von $\mathbb{Q}$ vom Grad 8 an, die die Galoisgruppe $G_2 := G(F'/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie das Untergruppengitter der Quaternionengruppe Q_8. Welche echte Untergruppen von Q_8 sind normal?

(10 Punkte)

4. Aufgabe

Geben Sie alle Unterkörper des Zerfällungskörpers von

$$f(t) = t^{15} - 1 \in \mathbb{Q}[t]$$

als Radikalerweiterungen von $\mathbb{Q}$ an.

(5 Punkte)