TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe: 10.12.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008` in der Übung

8. Übung Algebra II

(Galoistheorie II)

---

1. Aufgabe

(a) Es sei p eine Primzahl. Finden Sie das p^k-te Kreisteilungspolynom $\Phi_{p^k}(t) \in \mathbb{Z}[t]$, wobei $k \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Es sei $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ eine ungerade Zahl . Zeigen Sie, dass für das $n-$te Kreisteilungspolynom $\Phi_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ die folgende Gleichung gilt:

$$\Phi_{2n}(t) = \Phi_n(-t).$$

(c) Es seien $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ und p eine Primzahl mit $\mathrm{ggT}(p,n) = 1$. Zeigen Sie, dass für das $n-$te Kreisteilungspolynom $\Phi_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ die folgende Gleichung gilt:

$$\Phi_{pn}(t) = \frac{\Phi_n(t^p)}{\Phi_n(t)}.$$

(d) Es sei $n \in \mathbb{Z}^{>1}$. Zeigen Sie, dass für das $n-$te Kreisteilungspolynom $\Phi_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ die folgende Gleichung gilt:

$$\Phi_n(t^{-1}) = \Phi_n(t)t^{-\phi(n)},$$

wobei ϕ die Eulersche Phi-Funktion ist.

(8 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei K ein Körper der Charakteristik p. Das Polynom $f(t) = t^p - t + a \in K[t]$ besitze eine Nullstelle in K. Ferner sei α eine Nullstelle von f in $\overline{K}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f(\alpha + i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{F}_p$.

(b) (*) f ist irreduzibel über K (Anleitung: $\mathrm{Tr}(x)$).

(c) $K(\alpha)/K$ ist galoisch und zyklisch.

(d) Bestimmen Sie explizit die Galoisgruppe von $K(\alpha)/K$.

(8 Punkte)

3. Aufgabe

Es seien $K = \mathbb{F}_p$ und $p \not| n$.

- Bestimmen Sie den Zerfällungskörper K_n von $t^n - 1 \in K[t]$.
- Argumentieren Sie, wie $G(K_n/K)$ aussieht.

(4+2 Punkte)