TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe: 03.12.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008` in der Übung

7. Übung Algebra II

(normale Erweiterungen, Galoistheorie)

---

1. Aufgabe

Es sei $K \subseteq L \subseteq M$ ein Körpertum.

(a) Zeigen Sie, dass M/L normal ist, falls M/K normal ist.

(b) Ferner sei $[L : K] = [M : L] = 2$. Bestimmen Sie, welche der Erweiterungen M/K, M/L und L/K normal sind.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie: Für den Zerfällungskörper M von $t^n - 2 \in \mathbb{Q}[t] \quad (n \in \mathbb{Z}^{\geq 3})$ ist Aut($M/\mathbb{Q}$) isomorph zur Diedergruppe D_n.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

(i) Vervollständigen Sie das in der Vorlesung begonnene Diagramm der Teilkörper von $\mathbb{Q}(2^{1/4}, i)$ nebst Zuordnung der entsprechenden Fixgruppen.
(ii) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ über $\mathbb{Q}$ galoissch ist, und bestimmen Sie eine Bijektion zwischen den Teilkörpern und den Untergruppen der zugehörigen Galoisgruppe.
($[L : \mathbb{Q}] = 8$ darf ohne Beweis angenommen werden.)

(6 Punkte)

4. Aufgabe

Zeigen Sie:

(a) Die Diskriminante des Polynoms $f(t) = t^3 - 7t - 7 \in \mathbb{Q}[t]$ ist 49;

(b) Für eine (jede) Nullstelle ρ von $f(t)$ ist $\mathbb{Q}(\rho)$ galoissch über $\mathbb{Q}$;

(c) (*) Bestimmen Sie die Bilder von ρ unter Aut($\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}$) in der Form $a + b\rho + c\rho^2 \quad (a, b, c \in \mathbb{Q},$ tatsächlich $a, b, c \in \mathbb{Z})$.

(5+4 Punkte)