TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol
Abgabe: 26.11.2008 in der Übung
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008`

5. Übung Algebra II

(endliche Körper, seperable und inseparable Erweiterungen)

---

1. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Für jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$ existiert eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$, so dass $f' = f$ mod $p \in \mathbb{F}_p[t]$ irreduzibel ist.
- Es gibt für jedes $q = p^r$, $r \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad r über $\mathbb{F}_p$.
- Es sei $f \in \mathbb{F}_p[t]$ irreduzibel. Dann existieren die Nullstellen von f, die verschiedene Vielfachheiten besitzen.
- Es sei $f \in \mathbb{F}_q[t]$ irreduzibel vom Grad n mit $q = p^r, r \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$. Dann ist n der Grad des Zerfällungskörpers von f.

(8 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Es seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $s, r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$(t^r - 1)|(t^s - 1) \Leftrightarrow r|s \text{ in } \mathbb{N}.$$

(b) Es seien $q = p^m, , \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$(t^{q^k} - t)|(t^{q^m} - t) \Leftrightarrow k|m \text{ in } \mathbb{N}.$$

(4 Punkte)

3. Aufgabe

Bestimmen Sie, ob die folgenden Polynome über gegebenem Körper separabel oder inseparabel sind:

- $f(t) = t^2 - 6t + 9$ über $\mathbb{Q}$;
- $g(t) = t^{60} + t^{30} - 1$ über $\mathbb{F}_2$;

- $h(t) = t^5 + xt + x$ über $\mathbb{F}_5(x)$, wobei x über $\mathbb{F}_5$ transzendent ist.

(4 Punkte)

4. Aufgabe*

Es sei L/K eine Körpererweiterung mit $\mathrm{Char}(K) = p > 0$. Ferner seien $x, y \in L$ von Null verschiedenen Elemente mit $x^p, y^p \in K$ und $[K(x, y) : K] = p^2$. Zeigen Sie, dass $K(x, y)$ kein primitives Element besitzt.

(4+3 Punkte)

5. Aufgabe

Implementieren Sie den in der Vorlesung eingeführten Berlekamp Algorithmus (Skript Seite 15).

(7 Punkte)