TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008`

Abgabe: 12.11.2008
in der Übung

4. Übung Algebra II

(algebraische Körpererweiterungen, Zerfällungskörper, endliche Körper)

---

1. Aufgabe

Es sei die algebraische Körpererweiterung $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Grad und eine Basis von L über $\mathbb{Q}$.

(b) Begründen Sie, ohne ein primitives Element zu finden, warum $L/\mathbb{Q}$ einfache algebraische Erweiterung ist.

(c) Bestimmen Sie ein primitives Element von $L/\mathbb{Q}$.

(d) Stellen Sie zu jedem Element $l \in L$, $l \neq 0$ das Inverse l^{-1} als $\mathbb{Q}$-Linearkombination der in (a) angegebenen Basis dar.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ gilt.

(10 Punkte)

2. Aufgabe

Es seien $f(t) = t^4 + 1$ und $g(t) = t^4 - 2t^2 + 2$ zwei Polynome über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Grade $[L : K]$ und $[L' : K]$ der Zerfällungskörper L bzw. L' von f bzw. g über $\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Es sei K ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom vom Grad n mit verschiedenen Nullstellen $a_1, \cdots, a_n$. Zeigen Sie, dass $K(a_1, \cdots, a_{n-1})$ der Zerfällungskörper von f über K ist.

(b) Sei $f(t) = t^3 + at + b \in \mathbb{Q}[t]$ ein irreduzibles Polynom. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $a, b \in \mathbb{Q}$, so dass für den Zerfällungskörper L von f die Gradgleichung $[L : K] = 3$ gilt.

(6 Punkte)

4. Aufgabe

Es sei p eine ungerade Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der normierten irreduziblen quadratischen Polynomen über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Wie viele verschiedenen Zerfällungkörper bis auf Isomorphie können die normierten quadratischen irreduziblen Polynome über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzen?

(+4 Punkte)