TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe: 05.11.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008` in der Übung

3. Übung Algebra II

(Körpertheorie)

---

1. Aufgabe

(a) Es seien K, L, M drei Körper mit $K \subseteq L \subseteq M$ mit $[M : K] < \infty$. Zeigen Sie die in der Vorlesung erwähnte **Gradformel**

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

(b) Es sei $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$ gegeben. Ferner sei $\mathbb{Q}(a)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a^2) = \mathbb{Q}(a)$ gilt.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei K ein Körper, I ein Integritätsring mit $I \supseteq K$. Zeigen Sie, dass I ein Körper ist, falls I ein endlich dimensionaler $K-$Vektorraum ist.

(2 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei $K = k(x)$ eine einfache transzendente Erweiterung von einem Körper k. Ferner sei $s = \frac{g(x)}{h(x)} \in K$ ein nicht konstantes Element mit $g, h \in k[t]$ und $\mathrm{ggT}(g, h) = 1$. Zeigen Sie:

(a) s ist transzendent über k.

(b) x ist algebraisch über $k(s)$ mit Minimalpolynom $f(t) = g(t) - sh(t) \in k(s)[t]$ und es gilt $[k(x) : k(s)] = \deg(s) := \mathrm{Max}\{\deg(g), \deg(h)\}$.

(c) Jeder Zwischenkörper M, $k \subset M \subseteq K$, ist einfach transzendent über k.

(d) $k(x) = k(s) \Leftrightarrow s = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in k$ und $ad - bc \neq 0$.

(e) Für jeden $k-$Automorphismus $\varphi : k(x) \rightarrow k(x)$ gilt $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in k, ad - bc \neq 0$.

(10+2 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Bestimmen Sie alle Unterringe des Körpers $\mathbb{Q}$, die 1 enthalten.

(b) Es sei $x \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms

$$h(t) = t^5 - 2t^4 + 6t + 10 \in \mathbb{Q}[t].$$

Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ und zu jedem $l \in \mathbb{Q}$ das Minimalpolynom von $x + l$ über $\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)