TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

WS 2008-2009

Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008`

Abgabe: 09.02.2009
im MA 811

13. Übung Algebra II

(Algebraische Kurven)

---

1. Aufgabe

(a) Es seien $S_1, S_2 \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$ mit $S_1 \subseteq S_2$. Zeigen Sie:

$$V(S_2) \subseteq V(S_1) \subseteq \mathbb{A}^n.$$

(b) Es sei $\{S_i\}$ eine Familie von Untermengen von $K[x_1, \cdots, x_n]$. Zeigen Sie:

$$\cap_i V(S_i) = V(\cup_i S_i) \subseteq \mathbb{A}^n.$$

(c) Es seien $S_1, S_2 \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$. Zeigen Sie:

$$V(S_1) \cup V(S_2) = V((S_1) \cdot (S_2)) \subseteq \mathbb{A}^n,$$

wobei (S_i) das von S_i erzeugte Ideal von $K[x_1, \cdots, x_n]$ für $i = 1, 2$ bezeichnet.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Finden Sie die irreduziblen Komponente folgender affin-algebraischen Kurven:

- $C_1 = V(x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 - x + 1)$,
- $C_2 = V(x^3y - x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2x^2 + 2y^2 + xy - 2y)$.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Es seien $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ mit $X_1 \subseteq X_2$. Zeigen sie, dass $I(X_2) \subseteq I(X_1) \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$ gilt.

(b) Es sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Zeigen Sie, dass $V(I(X)) = X$ gilt.

(c) Es sei $I \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $I(V(I)) = \sqrt{I}$ gilt, falls K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\sqrt{I}$ das Radikalideal von I sind.

(7 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Es sei die Parabel $\mathcal{C} : y = x^2$ über einem kommutativen Ring R mit Eins definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}, +) \cong (R, +)$ gilt, wobei $+$ mittels

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_3, y_3) \text{ für } x_3 = x_1 + x_2$$

definiert ist und $N = (0, 0)$ das Einselement der Gruppe $(\mathcal{C}, +)$ ist.

(b) Es sei die Hyperbel $\mathcal{C} : xy = 1$ über einem kommutativen Ring R mit Eins mit der Einheitengruppe $R^\times$ definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}, +) \cong R^\times$ gilt, wobei $+$ durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_3, y_3) \text{ für } x_3 = x_1 x_2$$

definiert ist und $N = (1, 1)$ das neutrale Element der Gruppe $(\mathcal{C}, +)$ ist.

(3+3 Punkte)