TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe: 14.01.2009
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008` in der Übung

11. Übung Algebra II

(Moduln über Hauptidealringe)

---

1. Aufgabe

Es sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 2}$.

- Bestimmen Sie die Hermite-Normalform von A mit der Transformationsmatrix U.
- Bestimmen Sie die Smith-Normalform von A mit den Transformationsmatritzen U und V.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Es seien R ein Hauptidealring und $M = Rb_1 \dot{+} \cdots + \dot{+} Rb_m$ ein freier $R-$Modul sowie $A \in R^{m\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $N := Rc_1 + \cdots + Rc_n$ mit $(c_1, \cdots, c_n) = (b_1, \cdots, b_m)A$ ist ein Teilmodul von M.

(b) Für $S(A) = (s_{ij}) = VAU$ (Smith-Normalform) sind

$$A_i = \{r_i \in R | r_i b_i' \in N\}$$

für $(b_1', \cdots, b_m') = (b_1, \cdots, b_m)V^{-1}$ Ideale von R.

(c) $S(A)$ ist eindeutig bestimmt, d. h. $s_{ii} \in \mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R}$ das Vertretersystem der in der Vorlesung definierten Äquivalenzklassen auf R ist.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei $N = \mathbb{Z}\cdot e_1 + \mathbb{Z}\cdot e_2 + \mathbb{Z}\cdot e_3 + \mathbb{Z}\cdot e_4 + \mathbb{Z}\cdot e_5$, wobei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$ sind. Bestimmen Sie, ob eine Basis von N mit Basisvektoren der Euklidischen Länge 1 existiert.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Es sei $M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix M positiv definit ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des in der Vorlesung erwähnten Quadratischen Ergänzung Algorithmus eine obere Dreieckmatrix $Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq 4} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^4$ die folgende Gleichung gilt:

$$x^t \cdot M \cdot x = \sum_{i=1}^{4} q_{ii} \left(x_i + \sum_{j=i+1}^{4} q_{ij} x_j \right)^2 .$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung erwähnten Auszählalgorithmus alle $0 \neq y \in \mathbb{Z}^4$ mit $y^t \cdot M \cdot y \leq 2$.

(4+4 Punkte)