TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008-2009
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe: 07.01.2009
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra2-ws2008` in der Übung

10. Übung Algebra II

(Modultheorie)

---

1. Aufgabe

Es seien A, B und C drei Untermoduln eines R-Moduls M.

(a) Zeigen Sie, dass $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$ ein Untermodul von M ist.

(b) Zeigen Sie, dass $A + (B \cap C) = (A + B) \cap C$ gilt, falls $A \subseteq C$ ist.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Es seien M ein endlich erzeugter unitärer R-Modul, U ein Untermodul von M und $a \subseteq J_R$ ein Ideal von R, wobei J_R das in der Vorlesung definierte Jacobson Radikal von R ist. Zeigen Sie, dass $M = U$ gilt, wenn $M = aM + U$ ist.

(b) Es seien A ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal m und M ein endlich erzeugter unitärer A-Modul. Zeigen Sie, dass M/mM ein A/m-Modul ist, d.H. ein endlich dimensionaler A/m-Vektorraum ist.

(c) (*) Es seien die Voraussetsungen wie im Teil (b). Ferner seien x_i $(1 \leq i \leq n)$ Elemente von M, dessen Bilder in M/mM eine A/m-Basis dieses Vektorräumes bilden. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ den Modul M erzeugen.

(8 Punkte)

3. Aufgabe

Es seien R ein kommutativer Ring mit 1 und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die unimodularen $(n \times n)-$Matrizen über R bilden eine Gruppe, die mit GL(n, R) bezeichnet wird.

(b) $A \in R^{n \times n}$ ist genau dann unimodular, falls det$(A) \in R^* = U(R)$ ist.

(6 Punkte)

4. Aufgabe*

Dagobert Duck, bekanntlich die reichste Ente der Welt, befindet sich allweichnachtlich auf den Spuren sagenhafter Schätze, die ihn in diesem Jahr in die berüchtigten Schluchten des Balkan führen. Nach erbitterten Kämpfen mit den skrupellosen Panzerknackern muss er entsetzt den Verlust seines goldenen Notizbuches feststellen, welches für jede Milliarde seines Talerreichtums eine goldene Seite besitzt. Zwar kann er sich erinnern, dass das Buch mindestens zehn und nicht mehr als sechsig Seiten hat, jedoch plagt ihn die Ungewissheit über die genaue Anzahl der Taler.

Wieder daheim in Entenhausen erteilt er deshalb seinem Neffen Donald den Auftrag, gegen Erlassen seiner Schulden, die Taler erneut zu zählen. Donald indes, der stupiden Arbeit schnell überdrüssig, beschäftigt sich lieber damit, die Taler geometrisch anzuordnen. So bemerkt er, dass er sowohl ein Quadrat als auch ein gleichschenkliges Dreieck jeweils mit allen Talern legen kann. Aber damit ist Dagobert schon zufrieden, denn nun kennt er sein Vermögen. Warum denn das?

(+8 Punkte)

Bitte die nächste Seite beachten !

Wir wünschen Euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in das neue Jahr!