TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS11
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1ss11`

11. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei $f : R \to S$ ein Ringepimorphismus der Ringe R und S und seien I und J Ideale von S. Zeigt die folgenden Aussagen:

(a) $I + J$ ist ein Ideal von S.

(b) $f^{-1}(I + j) = f^{-1}(I) + f^{-1}(J)$.

Gebt ein Beispiel für einen Ringhomomorphismus an, der diese Eigenschaft nicht besitzt.

(7 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei $M(u, v) := \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$ und $Q = \{M(u, v) \mid u, v \in \mathbb{C}\}$ der Schiefkörper der Quaternionen. Wir definieren

$$I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := IJ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } 1_Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigt, dass sich jedes Element $A \in Q$ in der Form $A = M(u, 0) + M(v, 0)J$ darstellen lässt.

(b) Zeigt, dass sich jedes Element $A \in Q$ durch eine $\mathbb{R}$-Linearkombination von $1_Q, I, J$ und K darstellen lässt.

(c) Stellt das Produkt von $x := \xi_o 1_Q + \xi_1 I + \xi_2 J + \xi_3 K$ und $y := \eta_o 1_Q + \eta_1 I + \eta_3 J + \eta_4 K$ wieder als $\mathbb{R}$-Linearkombination von $1_Q, I, J$ und K dar.

(d) Zeigt, dass in Q die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ unendlich viele Lösungen hat.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5}\}$. Wie wissen, dass wir jedes Element α von R eindeutig als $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ schreiben können mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Definiere

$$N : R \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{-5} \longmapsto a^2 + 5b^2.$$

Man nennt N die Normfunktion von R. Zeigt:

(a) N ist multiplikativ, also ein Homomorphismus zwischen den Monoiden $(R, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(b) $R^\times = \{1, -1\}$.

(c) Die Elemente $(4 + \sqrt{-5})$, $(4 - \sqrt{-5})$, $(1 + 2\sqrt{-5})$ und $(1 - 2\sqrt{-5})$ sind irreduzibel, aber nicht prim.

(7 Punkte)