

10. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei H ein Normalteiler von $GL(2, K)$ und gelte $\#K > 3$. Dann gilt $H \leq Z(GL(2, K))$ oder $SL(2, K) \leq H$. Beweist das.

(7 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Zeigt, daß

$$K := \mathbb{Q} + \sqrt{5}\mathbb{Q} = \{m + n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Q}\}$$

ein Unterring von \mathbb{R} ist und daß es für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ein $b \in K$ mit $ab = 1$ gibt.

(b) Zeige, daß mit $d = (1 + \sqrt{5})/2$ die Menge $\mathbb{Z} + d\mathbb{Z} = \{m + nd \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von K ist.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Ein Element a eines Ringes R heißt idempotent, wenn $a^2 = a$ gilt. Bestimmt die ganzen Zahlen n für die $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nur zwei idempotente Elemente besitzt.

(7 Punkte)