

8. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei G eine endliche nilpotente Gruppe, bei der jeder abelsche Quotient zyklisch ist. Dann ist G zyklisch.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

- (a) Gebt Gruppen G_1 und G_2 an mit $Z(G_1) \cong Z(G_2)$ und $G_1/Z(G_1) \cong G_2/Z(G_2)$ aber G_1 und G_2 sind nicht isomorph.
- (b) Gebt eine Gruppe G mit Untergruppe H an, für die das Zentrum von H echt größer als das Zentrum von G ist. Zum Beispiel könnte man für G mal 2×2 -Matrizen über einem Körper ausprobieren.
- (c) Berechnet für $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ und D_4 jeweils die Frattini-Untergruppe und den Quotienten nach dieser. Macht euch klar welche $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Dimension die Faktorgruppen haben und wie das mit Burnside und minimalen Erzeugendensystemen der Gruppen zusammenpasst.

(8 Punkte)

3. Aufgabe

Sei H ein Normalteiler der Gruppe G und gelte $H \cap G' = 1$, dann ist H eine Untergruppe des Zentrums von G . Folgert, dass H abelsch ist.

(6 Punkte)