TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS11
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1ss11`

6. Übung Algebra I

1. Aufgabe

(a) Sei G eine endliche Gruppe und P eine p-Sylowuntergruppe von G. Ist H ein Normalteiler von G, so ist $H \cap P$ eine p-Sylowuntergruppe von H und HP/H eine von G/H.

(b) Beschreibt wieso die Aussage nicht mehr immer richtig ist, wenn H nicht als normal vorausgesetzt ist.

(7 Punkte)

2. Aufgabe

Sei I eine 50 elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 59\}$ eurer Wahl. Entscheidet für alle i aus I, ob es eine einfache Gruppe dieser Ordnung gibt.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Zeigt, dass es bis auf Isomorphie genau zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 8 gibt. Zu diesem tollen Resultat führen verschiedene Wege, einer könnte wie folgt aussehen:

Wir haben schon zwei nicht abelsche Gruppen der Ordnung 8, die D_4 und die Quaternionengruppe Q_8. (Warum sind sie nicht isomorph?) Es gilt also zu zeigen, dass jede nicht-abelsche Gruppe G mit acht Elementen zu einer der beiden isomorph ist. Wir wissen weiterhin, dass die D_4 und die Q_8 eindeutig durch die Erzeuger und Relationen bestimmt sind, müssen also nur zeigen, dass G Elemente a, b mit bestimmten Eigenschaften besitzt. Dafür können die folgenden Überlegungen nützlich sein:

(a) Gruppen, bei denen jedes Element die Ordnung zwei hat, sind abelsch.

(b) Untergruppen vom Index zwei sind normal.

(7 Punkte)