5. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Konstruiert bitte je eine Gruppe G_i mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) G_1 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist eine 3-Gruppe.
- (b) G_2 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist keine 3-Gruppe.
- (c) G_3 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist weder eine 3-Gruppe noch abelsch.

Kann es Gruppen G_4, G_5 und G_6 mit den folgenden Eigenschaften geben?

- (a) G_4 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist eine 7-Gruppe.
- (b) G_5 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist zyklisch.
- (c) G_6 ist eine 5-Gruppe mit weniger als 61 Elementen und einer Untergruppe, die nicht normal ist.

(7 Punkte)

2. Aufgabe

Sei G eine Gruppe und H ein Normalteiler von G . Zeigt, dass die folgenden Aussagen gelten:

- (a) Ist G eine p -Gruppe, so sind auch H und G/H p -Gruppen.
- (b) Sind G/H und H p -Gruppen, so ist auch G eine p -Gruppe.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Eine Gruppe G heißt Quaternionengruppe, wenn G von zwei Elementen a, b erzeugt wird und wenn gilt

$$\text{ord}(a) = 4, a^2 = b^2, ba = a^3b.$$

- (a) Zeigt, dass jedes Element in G von der Form $a^i b^j$, $0 \leq i < 4$, $0 \leq j < 2$ ist.
- (b) Zeigt, dass G aus genau 8 Elementen besteht.
- (c) Zeigt, dass G nicht abelsch ist.
- (d) Zeigt, dass es bis auf Isomorphie maximal eine Quaternionengruppe gibt.

(e) Zeigt, dass es mindestens eine Quaternionengruppe gibt, nämlich die von

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$.

(f) Zählt die Elemente der Ordnung 4 in G .

(7 Punkte)