TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS11
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1ss11`

4. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei G eine Gruppe und X die Menge aller Untergruppen von G. Man zeige:

(a) $G \times X \to X$, $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ definiert einer Operation von G auf X.

(b) Die Bahn $Orb(H)$ eines Elements H aus X hat genau dann Länge 1, wenn H ein Normalteiler von G ist.

(c) Ist die Ordnung von G eine Primzahlpotenz p^k mit $k \geq 1$, dann unterscheidet sich die Anzahl der Untergruppen von G von der Anzahl der Normalteiler von G um ein Vielfaches von p.

(7 Punkte)

2. Aufgabe

Sei G eine Gruppe und seien N_1, N_2 Normalteiler von G mit endlichem Index. Zeigt, dass dann auch der Index von $N_1 \cap N_2$ endlich ist. Man könnte zunächst mit Hilfe der Isomorphiesätze beweisen, dass

$$G/N_1 \cong (G/N_1 \cap N_2)/(N_1N_2/N_2)$$

gilt.

(7 Punkte)

3. Aufgabe

Sei G eine Gruppe der Ordnung 55 und X eine Menge mit $\#X = 39$. Zeigt, dass G nicht fixpunktfrei auf X operieren kann.

(6 Punkte)