TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS11

Fakultät II – Institut für Mathematik

Dozent: Tobias Finis

Assistent: Gerriet Möhlmann

`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1ss11`

3. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei $\{1\} \xrightarrow{\varphi_1} G_1 \xrightarrow{\varphi_2} G_2 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \xrightarrow{\varphi_n} G_n \xrightarrow{\phi_{n+1}} \{1\}$ eine endliche exakte Sequenz endlicher Gruppen (das heißt $\ker \varphi_{i+1} = \operatorname{im} \varphi_i$). Beweist oder widerlegt die folgende Behauptung.

$$\prod_{i=1}^{n} (\#G_i)^{(-1)^i} = 1$$

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Sei $\mathbb{Q}$ die Gruppe der rationalen Zahlen mit der Addition und $\mathbb{Z}$ die Untergruppe der ganzen Zahlen. Zeigt die folgenden Behauptungen.

(a) Jedes Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ besitzt endliche Ordnung.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\phi_n : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \ x + \mathbb{Z} \mapsto nx + \mathbb{Z}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

(c) Es gilt $\ker \phi_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(7 Punkte)

3. Aufgabe

Sei G eine endliche Gruppe und seien S und T nichtleere Teilmengen von G. Zeigt das $G = ST$ oder $\#G \geq \#S + \#T$ gilt.

(7 Punkte)