

2. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und sei $N \trianglelefteq H$ ein Normalteiler. Zeigt, dass dann auch $\phi^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G ist.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

Sei G eine endliche Gruppe mit einer geraden Anzahl von Elementen. Zeigt, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung zwei ungerade ist.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

Sei G eine Gruppe und $U, V \leq G$. Beweist oder widerlegt durch ein Gegenbeispiel folgende Aussagen:

(i) Aus $U, V \trianglelefteq G$ folgt $UV \trianglelefteq G$.

(ii) Ist $U \trianglelefteq V$ und $V \trianglelefteq G$, so gilt auch $U \trianglelefteq G$.

Hinweis: Vielleicht ist die A_4 nützlich

(iii) Ist G endlich und jede Untergruppe $V \leq G$ mit $V \subsetneq G$ zyklisch, so ist G zyklisch.

(6 Punkte)

4. Aufgabe

Sei G eine Gruppe. Zeige folgende Aussagen:

(i) Besteht die Gruppe der Automorphismen von G nur aus der Identität, d.h. gilt $\text{Aut}(G) = \{id\}$, so ist G abelsch.

(ii) Ist die Abbildung $\phi : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto x^2$ ein Homomorphismus von G , so ist G abelsch.

(iii) Ist die Abbildung $\phi : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto x^{-1}$ ein Automorphismus, so ist G abelsch.

(6 Punkte)