TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS10/11
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Tobias Finis
Assistent: Gerriet Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1ss11`

1. Übung Algebra I

1. Aufgabe

(i) Seien $(X, \circ)$ und $(Y, \Box)$ Gruppen mit den Verknüpfungen $\circ$ bzw. $\Box$ sowie den neutralen Elementen e bzw. ϵ. Gegeben sei ein Homomorphismus

$$f : X \longrightarrow Y \text{ mit } f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) \Box f(x_2).$$

Zeigt, dass

$$f(x_1)^{-1} = f(x_1^{-1}) \quad \text{und} \quad f(e) = \epsilon$$

gilt.

(ii) Seien $G := (\mathbb{R}, +)$ und $H := (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$. Verifiziert, dass die Abbildung

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}, \quad a \longmapsto \exp(a)$$

ein Homomorphismus ist. Handelt es sich hier um ein Mono-, Epi-, Endo- und/ oder Isomorphismus?

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Zeigt folgende Aussagen:

(i) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $h \in G$. Dann ist

$$\phi : G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto h \circ g$$

injektiv.

(ii) Eine Gruppe G mit $g^2 = 1$ für alle $g \in G$ ist abelsch.

(iii) Jede Gruppe mit weniger als 6 Elementen ist abelsch.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

In einem Monoid $(M, e, \circ)$ sei für $a, b \in M$ eine Teilmenge $L_{a,b}$ durch $L_{a,b} := \{x \in M | a \circ x = b\}$ definiert. Gebt für jede der folgenden Eigenschaften einen Monoid an, in dem diese erfüllt ist:

(a) Es existieren Elemente $a \neq e$ und b in M, so dass $\#L_{a,b} = 0$ gilt.

(b) Es existieren Elemente $a \neq e$ und b, so dass $\#L_{a,b} = 1$ gilt.

(c) Es existieren Elemente $a \neq e$ und b, so dass $\#L_{a,b} = 2$ gilt.

(d) Es existieren Elemente $a \neq e$ und b, so dass $\#L_{a,b} = \infty$ gilt.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigt, dass die Teilmenge

$$Z(G) = \{x \in G | x \circ y = y \circ x \text{ für alle } y \in G\}$$

eine Untergruppe von G ist. Wie sieht es aus, wenn man nur voraussetzt, dass G eine Halbgruppe ist.

(5 Punkte)