

Algebra 1 ÜB 13.7.11

Aufgaben, die so ähnlich wie die folgenden sind, könnten vielleicht bei der Klausur rankommen.

- 1) • Definiere die Begriffe Stabilisator und Bahn.
• Formuliere die Klassengleichung oder Stabilisator-Bahn-Formel oder wie die heißt.
• Zeigt, dass eine Gruppe mit 55 Elementen nicht fixpunktfrei auf 18 Elementiger Menge operieren kann.

2) • Definiere den Begriff Ideal

- Sei K ein Körper und I ein Ideal, zeige, dass $I = K$ oder $I = 0$ gilt.
- Sei $\varphi: K \rightarrow R$ Ringhomomorphismus und gelte $\varphi(1) \neq 0$. zeige φ ist injektiv

3) • Definiere den Begriff Normalteiler

- Beweise oder widerlege: besitzt G genau ein Element der Ordnung n , so gilt $n = 2$ und $d(1, g) \trianglelefteq G$

4) • Beschreibe bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 36. Warum gibt es genau diese?

5) • Definiere den Begriff Kompositionsreihe.

(Formuliert den Satz von Jordan-Hölder)
liebeso:

Habe G die Kompositionsreihe $G \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq 1$
und H die Kompositionsreihe $H \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq 1$
gelte

$$G/G_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$G_1/G_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$G_2 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$H/H_1 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$H_1/H_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$H_2 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

Sind G und H isomorph. Wieviele Elemente besitzen sie.

- 6) Gibt ohne Begründung Beispiele für
- euklidischen Ring R mit $R \neq \mathbb{Z}$ und R kein Körper
 - ~~Ring~~ Integritätsring, der kein Hauptidealring ist.
 - nicht nullteilerfreien Ring mit unendlich vielen Elementen.

Lösungen:

- 1) • Bahn / Stab. steht in jedem Buch.

• ~~$\#G \neq \#Fix$~~

• $\# \Pi = \# Fix + \sum_{a \in U} (G : \text{Stab}(a))$

• $\uparrow$ verbleibendes der Bahnen der Länge ≥ 2
 ist zu kombinieren

2) • ...

• Sei $u \in R^\times$ und $u \in I$, dann $I = R$, weil
 für beliebiges $r \in R$ gilt $r \cdot u^{-1} \cdot u \in I \Rightarrow r \in I$
 in Körper ist jedes von 0 verschiedene Element
 invertierbar.
 • Kerne von Items sind Ideale

3) • ...

• gilt! g und g^{-1} haben die selbe Ordnung
 also $\varphi, g = g^{-1}$ wegen $n \neq 1$ gilt $n=2$
 konjugierte von g haben selbe Ordnung, also
 $d_1, g_3 \trianglelefteq G$.

4) • $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Hauptsatz endl. abel. Gruppen.

nicht unbedingt

5)

sind isomorph. Satz von Jordan-Hölder sagt

$\#G = 360 = \# \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot \# \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cdot \# A_5$

6)	$\mathbb{Z}[i], \mathbb{Q}[\epsilon]$
	$\mathbb{Q}[\epsilon_1, \epsilon_2]$
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[\epsilon]$

das nicht