TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe:19.06.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1-ss2008` in der Übung

9. Übung Algebra I

(Maximale Ideale, Lokale Ringe)

---

1. Aufgabe

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei R ein Ring mit 1 ohne Nullteiler. Dann ist R kommutativ, falls jeder Teilring von R ein Ideal in R ist.

(b) Es sei I ein echtes Ideal in einem Ring R. I ist genau dann ein maximales Ideal, falls für jedes Ideal J von R entweder $J \subseteq I$ oder $I + J = R$ gilt.

(c) Es sei R ein nicht-trivialer kommutativer Ring ohne Nullteiler, in dem jeder echte Unterring endlich viele Elemente hat. Dann ist R ein Körper.

(d) Ein Ideal $I \neq \{0\}$ in einem kommutativen Ring R mit 1 heißt ein **minimales Ideal**, falls es kein Ideal J gibt mit $\{0\} \neq J \subset I$ gibt. Für ein minimales Ideal I gilt entweder $I^2 = \{0\}$ oder $I = eR$, wobei $e \in R$ eine Idempotente ist.

(8 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei I ein Ideal in einem kommutativen Ring R mit 1.

(a) Zeigen Sie, dass $I = \sqrt{I}$ gilt, falls I ein maximales Ideal ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Produkt $xy \in I$ und $y \notin \sqrt{I}$ das Element $x \in I$ ist, falls $\sqrt{I}$ ein maximales Ideal ist.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

Man definiert **Jacobson Radikal** in einem Ring R mit 1 durch

$$\mathrm{rad}(R) = \cap\{M \mid M \text{ ist ein maximales Ideal}\}.$$

Es sei $b \in R$. Beweisen Sie, dass $b \in \mathrm{rad}(R)$ genau dann gilt, falls für alle $a \in R$, $1 - ab$ eine Einheit in R ist.

(3 Punkte)

4. Aufgabe

Es seien K ein Körper und $\varphi : K \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- Es gelten für alle $a \in K$, $\varphi(a) \geq 0$ und $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- Es gilt für alle $a, b \in K$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
- Es gilt für alle $a, b \in K$, $\varphi(a + b) \leq \max(\varphi(a), \varphi(b))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O} = \{a \in K \mid \varphi(a) \leq 1\}$ ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1 ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ ein lokaler Ring ist.

(c) Bestimmen Sie das maximale Ideal von $\mathcal{O}$.

(5 Punkte)