

8. Übung Algebra I

(Ideale, Faktorrings, Chinesischer Restsatz)

1. Aufgabe

Wir bezeichnen mit $A^{m \times n}$ die $m \times n$ -Matritzen über A . Geben Sie die Charakteristik folgender Ringe an:

- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
- $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^{2 \times 2}$,
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{3 \times 3}$.

(3 Punkte)

2. Aufgabe

- (a) Bestimmen Sie alle Idempotenten von $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$. Welche davon sind orthogonal?
- (b) Es seien p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Idempotenten von $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Welche davon sind orthogonal?

(4 Punkte)

3. Aufgabe

- (a) Es sei I ein Ideal eines kommutativen Ringes R . Der **Annihilator** von I ist definiert durch

$$\text{Ann}(I) := \{x \in R \mid xa = 0 \text{ für alle } a \in I\}.$$

Zeigen Sie, dass $\text{Ann}(I)$ ein Ideal von R ist.

- (b) Zeigen Sie, dass $I = \{[n] \in \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ ist. Bestimmen Sie den Annihilator von I .

(4 Punkte)

4. Aufgabe

Es seien p eine Primzahl und n_p das Produkt aller Primzahlen q , für die $q - 1$ ein Teiler von $p - 1$ ist. Zeigen Sie, dass das von der Menge $\{m^p - m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}$ gerade (n_p) ist.

(4 Punkte)

5. Aufgabe

Man kann den chinesischen Restsatz für einen kommutativen Ring R mit 1 so formulieren:

$$R/a_1 \cdots a_n \cong \prod_{i=1}^n R/a_i,$$

wobei die Ideale a_i komaximal sind ($1 \leq i \leq n$) (d.h. $a_i + a_j = R$ für $1 \leq i < j \leq n$).

Nach Voraussetzung existieren $e_{ij} \in a_i$ und $e_{ji} \in a_j$ mit $1 = e_{ij} + e_{ji}$ ($1 \leq i < j \leq n$). Es sei

$$e_i := \prod_{l=1}^{i-1} e_{li} \quad (1 < i \leq n).$$

Eine explizite Berechnung des Urbildes von $(x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$ ist mittels Newton-Verfahrens möglich. Dies läuft so: Setze $y_1 = x_1$ und berechne iterativ $y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - y_k)e_{k+1}$. Dann ist $x = y_n$ das gewünschte Element.

- (a) Erklären Sie, warum das Newton-Verfahren funktioniert.
- (b) Implementieren Sie den chinesischen Restsatz für ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$ in mittels Newton-Verfahrens.

(5+2 Punkte)

Hinweis: Die 5. Aufgabe kann bis 19.06.2008 abgegeben werden.