TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe:05.06.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1-ss2008` in der Übung

7. Übung Algebra I

(Sylowsätze II, Ringe und Ideale)

---

1. Aufgabe

Es seien G eine Gruppe, X eine $G-$Menge und $\mathbb{S}(X)$ die Symmetriegruppe von X. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Es gibt einen Homomorphismus von G in $\mathbb{S}(X)$.
- Es gilt $G = MN(U)$, falls G eine endliche Gruppe mit dem Normalteiler M ist und $p-$Sylow-Untergruppe U von G mit dem Normalisator $N(U)$ ist.
- Es existiert ein nicht trivialler echter Normalteiler von G, falls G eine nicht abelsche Gruppe $p-$Gruppe ist.
- Es gibt eine einfache Gruppe der Ordnung 56.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

Definition 1: $\mathcal{P}(X) :=$ Die Menge aller Teilmengen von X.

Definition 2: $A \bigtriangleup B := (A \cup B) - (A \cap B)$ für die Mengen A und B.

Es sei X eine unendliche Menge. Dann ist $(\mathcal{P}(X), \bigtriangleup, \cap)$ ein Ring mit 1. Ferner sei

$$R = \{A \in \mathcal{P}(X) | A \text{ ist endlich}\}.$$

Zeigen Sie den folgenden Behauptungen:

- R ist ein Unterring von $\mathcal{P}(X)$;
- R ist ein Ring ohne 1.
- A ist ein Nullteiler von R, falls $A \in R$ und $A \neq \emptyset$ sind.
- B ist ein Nullteiler von $\mathcal{P}(X)$, falls $B \in \mathcal{P}(X)$, $B \neq \emptyset$ und $B \neq X$ sind.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Es seien R ein Ring und $x^2 + x$ ein Element des Zentrums von R für alle $x \in R$. Zeigen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

(b) Es seien R ein Ring mit 1 und $y^3 = y$ für alle $y \in R$. Zeigen Sie, dass $6y = 0$ für alle $y \in R$ gilt und R kommutativ ist.

(3 Punkte)

4. Aufgabe

Beweisen Sie den in der Vorlesung erwähnten Homomorphiesatz und die Isomorphiesätze für Ringe.

(3 Punkte)

5. Aufgabe

(a) R_1 sei ein Ring mit 1 und $\varphi : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\varphi(1)$ Einselement von $\varphi(R_1)$ ist. Ist $\varphi(1)$ auch notwendig ein Einselement von R_2?

(b) S sei ein kommutativer Ring und I ein Ideal von S. Das Radikal von I ist definiert als

$$\sqrt{I} := \{x \in S | x^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}.$$

Sei nun $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ferner seien I, J Ideale von S. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

- $\phi^{-1}(I + J) = \phi^{-1}(I) + \phi^{-1}(J)$.
- $\phi^{-1}(IJ) \supseteq \phi^{-1}(I) \cap \phi^{-1}(J)$.
- $\sqrt{I}$ ist ein Ideal von S, und es gilt $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
- $\phi^{-1}(\sqrt{I}) = \sqrt{\phi^{-1}(I)}$.

(6 Punkte)