TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe:29.05.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1-ss2008` in der Übung

6. Übung Algebra I

(Sylowsätze I)

---

1. Aufgabe

Es seien G eine Gruppe, X eine $G-$Menge und $\mathbb{S}(X)$ die Symmetriegruppe von X. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Jeder Homomorphismus von G in $\mathbb{S}(X)$ liefert eine Operation von G auf X.
- Fixgruppen zweier Elemente $x, y \in X$ sind konjugiert.
- Es gibt wenigstens einen Fixpunkt $x \in X$, falls $(G : 1) = p^r$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt.
- Es gibt genau 5 verschiedene abelschen Gruppe der Ordnung 8.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass in einer nicht abelschen Gruppe der Ordnung p^3 mit $p \in \mathbb{P}$ das Zentrum die Ordnung p besitzt.

(b) Es sei G eine endliche Gruppe mit einer $p-$Sylow-Untergruppe P von G. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(p, (N(P) : P)) = 1$ gilt.

(c) Es sei G eine endliche Gruppe mit $N \trianglelefteq G$ und einer $p-$Sylow-Untergruppe P von N. Zeigen Sie, dass es eine $p-$Sylow-Gruppe im Normalisator von P gibt.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

(a) U sei eine echte Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass $G \neq \bigcup_{x \in G} xUx^{-1}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 12.

(6 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 105.

(b) Geben Sie eine $2-$Sylow-Untergruppe und eine $3-$Sylow-Untergruppe von $\mathbb{S}_4$ an.

Hinweis: Man kann den Teil (b) entweder per Hand oder mit KASH lösen.

(4+2 Punkte)