TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe:22.05.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1-ss2008` in der Übung

5. Übung Algebra I

(Operationen von Gruppen auf Mengen)

---

1. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass $G = \{A \in \mathrm{Gl}(2,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ auf $S = \mathbb{R}^2$ durch

$$(A, (x,y)^{\mathbf{T}}) \mapsto A(x,y)^{\mathbf{T}}$$

operiert.

(b) Bestimmen Sie den Stabilisator G_s und die Bahn $G \cdot s$ für $s \in \{(0,0)^{\mathbf{T}}, (1,3)^{\mathbf{T}}\}$.

(c) Beschreiben Sie alle Bahnen $G \cdot s$.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Eine Gruppe G der Ordnung 55 operiere auf einer Menge X mit 18 Elementen. Argumentieren Sie, was man über die Anzahl der Fixpunkte von G auf X sagen kann.

(b) Eine Gruppe H der Ordnung 77 operiere auf einer Menge S mit 20 Elementen. Argumentieren Sie, was man über die Anzahl der Fixpunkte von H auf S sagen kann.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

Erinnerung: Eine Gruppe G heißt *einfache Gruppe,* falls es keine Normalteiler von G außer G und $\{1_G\}$ gibt.

(a) Es sei G eine Gruppe der Ordnung $p \cdot k$, wobei p eine Primzahl mit $p > k$ ist. Ferner sei U eine Untergruppe von G der Ordnung p. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist.

(b) Es sei G eine Gruppe der Ordnung $2n$, wobei n eine ungerade Zahl ist. Zeigen Sie, dass es einen Normalteiler von G der Ordnung n gibt.

(c) Zeigen Sie, dass es keine einfachen Gruppen der Ordnung 22, 93 oder 11448598 existieren.

(8 Punkte)

4. Aufgabe

Es seien U und V zwei Untergruppen einer endlichen Gruppe G.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung für alle $g \in G$ gilt:

$$|UgV| = \frac{|U||V|}{|U \cap gVg^{-1}|}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung für alle $u \in U$ gilt:

$$|U \cap V| = |U \cap uVu^{-1}|.$$

(4 Punkte)