4. Übung Algebra I

(Automorphismen, Isomorphiesätze, direkte Produkte)

---

1. Aufgabe

(a) Es seien G, H, K und U Gruppen mit $G \cong K$ und $H \cong U$. Zeigen Sie, dass

$$G \times H \cong K \times U$$

gilt.

(b) Es seien N und U zwei Normalteiler einer Gruppe G mit $G = NU$. Zeigen Sie, dass für $K = N \cap U$ die folgende Isomorphie gilt:

$$G/K \cong N/K \times U/K.$$

(4 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Epimorphismus. Ferner seien U ein Normalteiler von G und $\varphi\mid_U\colon U \to H : u \mapsto \varphi(u)$ ein Isomorphismus zwischen U und H. Zeigen Sie, dass

$$G = U \times \mathrm{Ker}\varphi$$

gilt. Gilt diese Aussage auch, falls nur $U \leq G$ ist?

(b) Der Normalteiler N einer Gruppe G sei maximal, d. h. $N \neq G$ und für jede Untergruppe $H \neq G$ mit $N \subseteq H$ gilt $N = H$. Zeigen Sie, dass zwei von $\{1_G\}$ verschiedene Untergruppen U, V von G mit $U \cap N = V \cap N = \{1_G\}$ isomorph sind.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

In einer abelschen Gruppe G gelte für ein $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$

$$\left|\{x \in G : \varphi(x) = x^{-1}\}\right| > \frac{3}{4}(G:1).$$

Zeigen Sie, dass für diesen Automorphismus $\varphi(g) = g^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt .

(2 Punkte)

4. Aufgabe

Es seien G eine endliche Gruppe mit n Elementen, $\sigma : G \to G : g \mapsto g^3$ ein Automorphismus von G der Ordnung $k \geq \log_3(n+1)$. Zeigen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

Hinweis: 2. Übungsblatt Aufgabe 2 (c).

(4+2 Punkte)