TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe:30.04.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1-ss2008` im Tutorium

2. Übung Algebra I

(Untergruppen, Satz von Lagrange)

---

1. Aufgabe

Es seien $(X, \circ)$ und $(Y, *)$ Gruppen mit jeweils binären inneren Verknüpfungen $\circ$ und $*$ sowie Einselementen 1_X bzw. 1_Y. Ferner seien U eine Untergruppe von X und V eine Untergruppe von Y. Gegeben sei ein Homorphismus

$$f : X \longrightarrow Y, \text{ mit } f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in X.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ für alle $x \in X$.

(b) Es gilt $f(1_X) = 1_Y$.

(c) Das Bild $f(U) := \{f(u) \in Y | u \in U\}$ bildet eine Untergruppe von Y.

(d) Das Urbild $f(V)^{-1} := \{x \in X | f(x) = v \text{ für ein } v \in V\}$ bildet eine Untergruppe von X.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei die folgende Abbildung gegeben:

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, a \mapsto [a] := a + n\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Operationen $[a] \oplus [b] := [a + b]$ und $[a] \odot [b] = [ab]$ sind wohldefiniert, d. h. unabghängig der Repräsentanten der Äquivalenzklassse.

(b) Die Abbildung ϕ ist ein Epimorphismus zwischen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$. Für den Kern gilt $\ker \phi = n\mathbb{Z}$.

(c) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\text{ggT}(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{es existieren } u, v \in \mathbb{Z} \text{ mit } ua + vb = 1.$$

(d) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \odot)$ ist ein Monoid mit Einselement $[1]$. Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\text{ggT}(a, n) = 1 \Leftrightarrow \text{es existiert ein } b \in \mathbb{Z} \text{ mit } [a] \odot [b] = [1].$$

(e) Gibt es geeignete $n \in \mathbb{N}^{>0}$ so dass $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\backslash\{[0]\}, \odot)$ eine Gruppe bildet?

(f) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie den Index und die Nebenklassen von $n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

(7 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Es seien U und V Untergruppen einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von G ist, falls $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.

(b) Es seien U und V echte Untergruppen einer Gruppe G. Dann gilt $U \cup V \neq G$.

(c) Es seien I eine Indexmenge und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen einer Gruppe G. Ferner existiert ein $k \in I$ für alle $i, j \in I$ mit $U_i, U_j \subseteq U_k$. Dann bildet $\cup_{i \in I} U_i$ eine Untergruppe von G.

(4 Punkte)

4. Aufgabe

Es seien $\mathbb{S}_n$ die symmetrische Gruppe und $\pi = (1, 2, \cdots, n)$ ein $n-$Zykel. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\mathbb{S}_n =< \tau, \pi >$ für eine beliebige Transposition τ. (Anleitung: Betrachten Sie $\mathbb{S}_4$.)

(b) $\mathbb{S}_n =< (1, 2), \pi >$.

(5 Punkte)