

12. Übung Algebra I

(ZPE-Ringe, euklidische Ringe, Polynomringe)

1. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\mathbb{Z}[t]$ ist ein Hauptidealring.
- (b) Jeder Körper ist ein ZPE-Ring.
- (c) Es gibt Spezialisierungen, die keine Ringhomomorphismen sind.
- (d) Es sei S die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ für $p = 3$. Dann liefert die Abbildung $t \mapsto 2t + 4$ einen S -Isomorphismus von $S[t]$.
- (e) Falls ein Ring R ein euklidischer Ring ist, dann ist $R[t]$ auch ein euklidischer Ring.

(9 Punkte)

2. Aufgabe

- (a) Es sei $f \in \mathbb{Z}[t]$. Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, $a - b$ ein Teiler von $f(a) - f(b)$ in $\mathbb{Z}$ ist.
- (b) Es seien R ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ und $f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m \in R[t]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass das Polynom f genau dann invertierbar ist, falls a_0 eine Einheit in R ist und die Elemente a_i , $1 \leq i \leq m$ nilpotent sind.
- (c) Es sei $f \in R[t]$ ein Nullteiler, wobei R ein kommutativer Ring mit 1 ist. Zeigen Sie, dass es bereits ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $rf = 0$ gibt.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

Es seien F ein Körper und $E = Q(F[t])$ der Körper der rationalen Funktionen in t (Quotientenbildung):

$$E = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid f, g \in F[t], g \neq 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass alle F -Automorphismen von E mittels $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ mit $a, b, c, d \in F$ und $ad - bc \neq 0$ gegeben ist.

(5 Punkte)