TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2008
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Michael Pohst
Assistent: Osmanbey Uzunkol Abgabe:03.07.2008
`www.math.tu-berlin.de/~kant/algebra1-ss2008` in der Übung

11. Übung Algebra I

(Teilbarkeit in Ringen, ZPE-Ringe, euklidische Ringe)

---

1. Aufgabe

(a) Zeigen Sie, dass der Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ für $n = -1, -2, 2, 3$ euklidischer Ring ist.

(b) Bestimmen Sie ggT$(2 - i, 2 + i)$ und ggT$(5 + 3i, 13 + 8i)$ im Ring $R = \mathbb{Z}[i]$.

(c) Zerlegen Sie die Zahlen $2, 3, 5$ in Primfaktoren im Ring $R = \mathbb{Z}[i]$.

(4 Punkte)

2. Aufgabe

Es sei T der Unterring der 2×2 Matritzen über $\mathbb{Z}$:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}; m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Nullteiler, Einheiten, irreduziblen Elemente und Primelemente von T.

(b) Zeigen Sie, dass in T jedes Ideal ein Hauptideal ist.

(c) Ist $\begin{pmatrix} r & r \\ r & r \end{pmatrix}$ reduzibel in T, dann ist es nur dann bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen darstellbar, falls $r = -2$ gilt.

(d) Geben Sie zwei verschiedene isomorphe Darstellungen von T in der Menge $\mathbb{Z}$ an.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Es sei R ein ZPE-Ring, für den die Menge $R^* \cup \{0\}$ ein echter Unterring ist. Zeigen Sie, dass R unendlich viele nichtassozierte Primelemente enthält.

(3 Punkte)

4. Aufgabe*

Beweisen Sie, dass ein Integritätsring R mit 1 genau dann ein ZPE-Ring ist, falls jedes Primideal P von R mit $P \neq \{0\}$ ein Primelement besitzt.

(4 Punkte)

5. Aufgabe

Implementieren Sie den chinesischen Restsatz für Polynomen über $\mathbb{Q}$ in KASH3 mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

(4 Punkte)

Hinweis: Die 5. Aufgabe kann bis 10.07.2008 abgegeben werden.