

1. Übung Algebra I

(Grundbegriffe, Gruppen)

1. Aufgabe

(a) Welche der folgenden inneren Verknüpfungen sind assoziativ?

- $(\mathbb{R}, \star)$, wobei $x \star y = |x + y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist.
- $(\mathbb{Z}, *)$, wobei $x * y = (x + y) - x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ ist.
- $(\mathbb{N}, \circ)$, wobei $x \circ y = \text{KgV}(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist.
- $(\mathbb{N}, \bullet)$, wobei $x \bullet y = y^x$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Welche Verknüpfungen vom Teil (a) sind kommutativ?

(c) Welche algebraischen Strukturen vom Teil (a) besitzen ein Einselement?

(5 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $x, a, b \in G$. Ferner seien $c = x \cdot a \cdot x^{-1}$ und $d = x \cdot b \cdot x^{-1}$. Zeigen Sie, dass $a \cdot b = b \cdot a$ genau dann gilt, falls $c \cdot d = d \cdot c$ ist.

(b) Es sei $(H, \star)$ eine Gruppe mit $x, y \in H$. Zeigen Sie, dass $y^5 = 1_H$ gilt, falls $x^2 = 1_H$ und $x^{-1} \star y^2 \star x = y^3$ sind.

(4 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Es sei $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist, wobei

$$a \circ b = a + b + ab \text{ für alle } a, b \in G \text{ ist.}$$

(b) Lösen Sie die Gleichung $4 \circ a \circ 2 = 11$ für die Gruppe $(G, \circ)$ vom Teil (a).

(3 Punkte)

4. Aufgabe

- (a) Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe gerader Ordnung. Zeigen Sie, dass mindestens ein Element $1_G \neq a \in G$ mit $a^2 = 1_G$ existiert. Welche Aussage kann man über die Anzahl der Elemente der Menge $\{x \in G \mid x^2 = 1_G\}$ treffen?
- (b) Beweisen Sie, dass jede Gruppe mit weniger als 6 Elementen kommutativ ist. Ist jede Gruppe mit 6 Elementen auch kommutativ?
- (c) Es sei $(H, *)$ eine Gruppe, zu der es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$ab^{k+i} = a^{k+i} * b^{k+i} \text{ für } 0 \leq i \leq 2 \text{ und alle } a, b \in H \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie, dass $(H, *)$ eine kommutative Gruppe ist.

(8 Punkte)