Technische Universität Berlin Sommersemester 06

Dr. S. Pauli

M. Wagner

www.math.tu-berlin.de/~kant/Codierungstheorie

8. Übung Codierungstheorie

1. Aufgabe BCH-Codes im engeren Sinne (4 Punkte)

Zeige folgende Aussage: Ist C ein primitiver BCH-Code im engeren Sinne über $\mathbb{F}_q$ zum Abstand d, so gilt $d \leq d(C) \leq qd - 1$.

2. Aufgabe Beispiel zu zwei Fehler korrigierende BCH-Codes (2 Punkte)

Sei $K = \mathbb{F}_{2^4}$ und α ein Erzeuger der Einheitengruppe von K. Ein Element $a = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \alpha^i$ wird mit dem Vektor $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^t \in \mathbb{F}_2^4$ identifiziert. Wir betrachten die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 & \alpha^8 & \alpha^9 & \alpha^{10} & \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} & \alpha^{14} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \alpha^{12} & 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \alpha^{12} & 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^9 & \alpha^{12} \end{pmatrix}$$

wobei α das Minimaplpolynom $x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ hat. Die Matrix H soll die Prüfmatrix eines zyklischen Codes C sein. Berechne das Erzeuger-Polynom und eine Erzeugermatrix von C.

3. Aufgabe Zyklotomische Nebenklassen (4 Punkte)

Sei p Primzahl und s ein Vertreter einer Nebenklasse von $\mathbb{Z}/(p^m - 1)\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Für solch ein s definieren wir

$$C_s := \{s, ps, p^2 s, \ldots, p^{m_s - 1} s\}$$

wobei $m_s \in \mathbb{N}$ minimal ist mit $p^{m_s} s \equiv s \mod (p^m - 1)$. Solch eine Menge nennt man **Zyklotomische Nebenklasse**. Bezeichne $M^{(i)}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ das Minimalpolynom von $\alpha^i \in \mathbb{F}_{p^m}$. Zeige, dass $M^{(i)}(x) = \prod_{j \in C_s} (x - \alpha^j)$ ist wenn $i \in C_s$ gilt.

4. Aufgabe **Zwei Fehler korrigierende BCH-Codes** **(4 Punkte)**

Zeige, dass der zwei Fehler korriegierende BCH-Code C ein zyklischer

$$[n = 2^m - 1, k = n - 2m, d \geq 5] \quad (m \geq 3)$$

Code ist mit dem Generatorpolynom $M^{(1)}(x)M^{(3)}(x)$.

5. Aufgabe **Newton-Relationen in Charakteristik p >0** **(2 Punkte)**

Seien $r \in \mathbb{N}$ und $X_1, \ldots, X_r$ Unbestimmte gegeben. Ferner bezeichne $\sigma_i (0 \leq i \leq r)$ die elementarsymmetrischen Funktionen in $X_1, \ldots, X_r$. Wir definieren

$$P_i = \sum_{j=1}^{r} X_j^i$$

für alle $i \geq 0$. Angemommen, die X_j liegen in einem Körper der Charakteristic $p > 0$. Zeige, dass für ein fixiertes $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq l \leq s$ dann $P_l = 0$ gilt, wenn $\sigma_l = 0$ ist für alle $l \in \{1, \ldots, s\}$ mit $p \nmid l$. Dabei setzen wir $\sigma_i = 0$ für $i > r$.