

### 3. Übung Codierungstheorie

#### 1. Aufgabe Shannon-Entropie

(8 Punkte)

Sei  $H_n : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$  eine symmetrische Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(a)  $H_n$  ist stetig

(b)  $H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$

(c) Es gibt eine stetige monoton wachsende Funktion  $A : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  mit

$$A(n) = H_n\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

(d)  $H_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = H_2(p_1, 1 - p_1) + (1 - p_1) \cdot H_{n-1}\left(\frac{p_2}{1-p_1}, \dots, \frac{p_n}{1-p_1}\right)$

wobei die  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben. Dann ist  $H_n$  durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt und  $H_n(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$

#### 2. Aufgabe

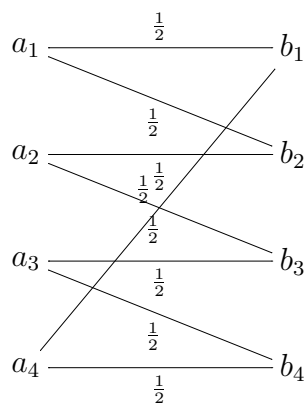
(2 Punkte)

Sei  $C$  ein binärer Single-Error-Correcting-Code von gerader Länge  $n$ . Zeige, dass  $|C| \leq \frac{2^n}{n+1}$  ist.

### 3. Aufgabe Kapazität eines Kanals mit Rauschen

(6 Punkte)

Gegeben sind zwei Quellen  $A_1 := \{a_1, a_2\}$ ,  $A_2 := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  ohne Gedächtnis mit maximaler Entropie und das Alphabet  $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ . Im folgendem sind zwei Kanäle mit Rauschen als Graphen dargestellt. An den Kanten sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten dass wenn  $a_i$  gesendet dann  $b_j$  empfangen wird. Berechne die Kapazitäten folgender Kanäle:



und

