Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2005
6. Juli 2005

6. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Multivariate Division mit Rest)

Gegeben seien $f := x^2y^2 + xy^2 - 1$, $g_1 := x^2$ und $g_2 := xy + z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$. Stellen Sie mithilfe des in der Vorlesung vorgestellten multivariaten Divisionsverfahrens f in der Form

$$f = a_1g_1 + a_2g_2 + r$$

dar, wobei $a_1, a_2, r \in \mathbb{Q}[x, y, z]$, und entweder $r = 0$ oder r ist nicht durch einen der Leitterme $lt(g_1), lt(g_2)$ teilbar.

Verwenden Sie dabei einmal die Ordnung (g_1, g_2) und einmal die Ordnung (g_2, g_1) der Polynome g_1, g_2 und dabei jeweils die Monomordnung *lex* $(x > y > z)$.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Lösungen, die Sie mittels der Funktionen `reduce` bzw. `PolynomialReduce` von `Maple` bzw. `Mathematica` erhalten.

Aufgabe G2 (S–Polynome)

Geben Sie das S–Polynom $S(f, g)$ für $f := x^3y - xy^2 + 1, g := x^2y^2 - y^3 - 1$ mit der Monomordnung *lex* sowie der Monomordnung *grevlex* an (jeweils $y > x$).

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Lösungen, die Sie mittels der Funktion `spoly` von `Maple` erhalten.

Aufgabe G3 (*Buchberger*–Algorithmus)

Berechnen Sie mithilfe des *Buchberger*–Algorithmus für $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\rangle$ eine Gröbner–Basis. Verwenden Sie dabei die Monomordnung *grevlex* mit $x > y$ Geben Sie anschließend eine minimale und die reduzierte Gröbner–Basis an.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Lösungen, die Sie durch `Singular, Maple oder Mathematica` erhalten.

Aufgabe G4 (Ganzzahlige Lineare Optimierung mit Gröbner–Basen)

In dieser Aufgabe suchen wir eine optimale Lösung für das System

$$\begin{array}{ll} \min & c^T \cdot x \\ s.t. & A \cdot x = b \\ & x \in \mathbb{N}^n \end{array}$$

mit $A \in \mathbb{N}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{N}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Ein Algorithmus von Conti und Traverso zum Lösen von ganzzahligen linearen Programmen mittels Gröbner–Basen besteht aus den folgenden drei Schritten:

1. Berechne eine Gröbner–Basis $G_{\prec_c}$ für $I = \langle s_1 - t_1^{a_{11}} t_2^{a_{21}} \cdots t_m^{a_{m1}}, \ldots, s_n - t_1^{a_{1n}} t_2^{a_{2n}} \cdots t_m^{a_{mn}} \rangle$ bezüglich einer Monomordnung $\prec_c$, bei der alle Variablen t_i größer als die Variablen s_j (*Elimination*) sind und mit folgender Eigenschaft (*Kompatibilität mit* c): Sei $\prec$ eine Monomordnung auf $\mathbb{N}^n$, z.B. *lex*, dann sei $\prec_c$ eine Monomordnung mit

$$x^\alpha \prec_c x^\beta :\Leftrightarrow c \cdot \alpha < c \cdot \beta \text{ oder } (c \cdot \alpha = c \cdot \beta \text{ und } x^\alpha \prec x^\beta).$$

   .

2. Sei r der Rest bei Division von $t_1^{b_1} \cdots t_m^{b_m}$ durch $G_{\prec_c}$.
   Falls $r \notin K[s_1, \ldots, s_n]$ ist, so gibt es keine Lösung.
   Falls $r = {s_1}^{x_1} {s_2}^{x_2} \cdots {s_n}^{x_n}$, dann ist $x \in \mathbb{N}^n$ ein Lösung, GOTO 3.
3. Berechne die Normalform ${s_1}^{x_1^*} {s_2}^{x_2^*} \cdots {s_n}^{x_n^*}$ von $r = {s_1}^{x_1} {s_2}^{x_2} \cdots {s_n}^{x_n}$ bezüglich $G_{\prec_c}$, $x^* \in \mathbb{N}^n$ ist eine optimale Lösung.

Aufgabe: Berechnen Sie das Minimum $\min\{c^T x | Ax = b, x \in \mathbb{N}^n\}$ für

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 37 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 35 \\ 21 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$