Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2005
9. Juni 2005

4. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Trennungsatz für kompakte Mengen)

Man sagt, eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x = c\}$ mit $p \neq 0$ *trennt* zwei nichtleere Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, falls

$$p \cdot x \begin{cases} \geq c & : \quad \forall x \in X \\ \leq c & : \quad \forall x \in Y. \end{cases}$$

Beweisen Sie folgenden Trennungsatz für kompakte Mengen:

Satz 1. *Seien X und Y zwei nicht–leere kompakte und konvexe Mengen des $\mathbb{R}^n$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Dann existiert eine Hyperebene, die X und Y trennt.*

Aufgabe G2 (Knapsack–Problem)

Gegeben Sei folgendes Optimierungsproblem:

Equality–Knapsack–Problem	
Instanz:	$a_i, w_i \in \mathbb{R}_+$ mit $i = 1, \ldots, n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Aufgabe:	Finde $x \in \mathbb{N}^n$, so dass $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ maximal ist und $\sum_{i=1}^n w_i x_i = \lambda$ gilt.

(a) Berechnen Sie mithilfe von `CPLEX` ein Optimum für die Instanz I mit $a = (213, -1928, -11111, -2345, 9123)$, $w = (12223, 12224, 36674, 61119, 85569)$ und $\lambda = 89643482$. Schreiben Sie dafür eine Datei *knapsack.lp*, die Sie anschließend in `CPLEX` einlesen. Eine Dokumentation für `CPLEX` finden Sie beispielsweise im Verzeichnis `/opt/cplex/cplex81/doc/userman/onlinedoc/`.

Hinweis: Der Optimierer `optimize` von `CPLEX` benötigt für diese Instanz sehr viel Zeit. Ich zeige Ihnen anschließend, wie es mit einem anderen Programm (`LattE`) schneller geht.

Es stehen nur 10 `CPLEX`–Lizenzen zur Verfügung. Wenn Sie mit dieser Aufgabe fertig sind, beenden Sie das Programm bitte mit `quit`.

(b) Betrachten Sie nun das entsprechende relaxierte Unbounded–Knapsack–Problem, d. h. $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq \lambda$ und $x_i \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Stellen Sie für I das resultierende Knapsack–Polytop mithilfe von `polymake` graphisch dar. Nutzen Sie dazu die Funktionen `facet, proj` und `polymake VISUAL`, wobei `facet` eine gegebene Facette eines Polyeders als neues Polyeder speichert und `proj` eine orthogonale Projektion eines Polyeders liefert.

(c) Berechnen Sie mithilfe von `Mathematica` oder `polymake MAXIMAL_VALUE` ein Optimum für das relaxierte Problem.

Aufgabe G3 (Klee–Minty–Würfel)

In der letzten Vorlesung wurde mit `mathematica` über einem Klee–Minty–Würfel optimiert. Jetzt werden wir analog mit `polymake` und `CPLEX` über einem Klee–Minty–Würfel optimieren.

Erzeugen Sie dazu mit `Goldfarb ex.poly 30` einen 30–dimensionalen Klee–Minty–Würfel und konvertieren Sie diesen mit `poly2lp` in ein lineares Programm, das von `CPLEX` gelesen werden kann. Berechnen Sie nun das Maximum bezüglich der Zielfunktion max x_{30} mithilfe der Optimierer `optimize` und `baropt`.