Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

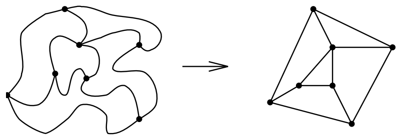
SS 2005
18. Mai 2005

3. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gummiband–Einbettung, vom letzten Übungsblatt)

Ziel dieser Aufgabe ist es, für einen gegebenen planaren 3–zusammenhängenden Graphen G eine sogenannte *Gummiband–Einbettung* zu konstruieren. Diese ist eine planare Zeichnung von G in der Ebene, in der die Kanten des Graphen als gerade Linien gezeichnet werden und die Teilflächen des Graphen konvexen Polygonen entsprechen (siehe Abbildung).



Doch zunächst einige Definitionen:

- Ein *Graph* $G = (V, E)$ ist ein Paar mit einer endlichen Menge von Knoten V und einer Menge von *Kanten* $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in V; v \neq w\}$ zwischen den Knoten. Wir betrachten hier nur einfache Graphen ohne parallele Kanten. Der *Grad* d_v eines Knoten $v \in V$ ist die Anzahl der Kanten, die v als Endknoten besitzen.
- Ein Graph heißt *3–zusammenhängend*, wenn der Graph trotz Entfernen von zwei Knoten und der damit inzidenten Kanten immer noch zusammenhängend ist.
- Ein Graph G heißt *planar*, wenn er in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten kreuzen. Die zusammenhängenden offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ heißen *Flächen*. Da G beschränkt ist, gibt es genau eine unbeschränkte (die äußere) Fläche. Entsprechend unterscheiden wir zwischen *inneren* und *äußeren* Knoten und zwischen *inneren* und *äußeren* Kanten.
- Für einen Graphen $G = (V, E)$, eine Gewichtsfunktion $\omega : E \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $p : V \to \mathbb{R}^2$, die jedem Knoten eine Position im $\mathbb{R}^2$ zuweist, ist ein Knoten $v \in V$ im *Equilibrium*, falls gilt:

$$\sum_{\{v,w\} \in E} \omega_{v,w}(p_v - p_w) = 0. \tag{1}$$

Nach William Thomas Tutte gilt folgender Satz:

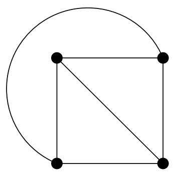
Satz 1 (1962). *Sei $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ ein 3–zusammenhängender planarer Graph mit einer äußeren Fläche $(k+1, \ldots, n)$für $k < n$. Seien $p_{k+1}, \ldots, p_n$ die Knoten eines konvexen $(n-k)$–gons (in dieser Reihenfolge). Sei weiter $\omega : E' \to \mathbb{R}^+$ eine (positive) Gewichtsfunktion der inneren Kanten. Dann gibt es eindeutige Positionen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^2$ für die inneren Knoten, so dass sich jeder innere Knoten im Equilibrium befindet und alle inneren Flächen konvex sind.*

Dazu definieren wir die Gewichte der inneren Knoten wie folgt:

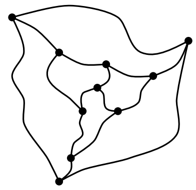
$$\omega_{vw} = \begin{cases} 1 & : \ \forall \{v, w\} \in E \\ 0 & : \ \forall \{v, w\} \notin E, v \neq w \qquad (v, w \in \{1, \ldots, k\}), \\ d_v & : \ v = w \end{cases} \tag{2}$$

und legen die Koordinaten der äußeren Knoten fest. Dann können wir gemäß der Gleichungen in (1) das Equilibrium der inneren Knoten berechnen.

Stellen Sie für folgende Graphen ein entsprechendes lineares Gleichungssystem auf. Berechnen Sie mithilfe von Mathematica, Maple oder Octave ein Equilibrium der inneren Knoten und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.



(a)



(b)

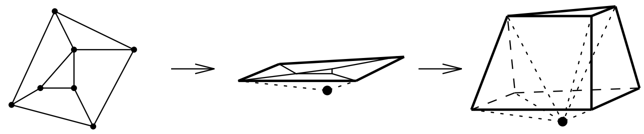
Aufgabe G2 (Tutte Lifting)

Diese Aufgabe schließt an die vorige an. Die zuvor konstruierte Gummiband–Einbettung eines 3–zusammenhängenden planaren Graphen interpretieren wir nun als sogenannten *Ecken–Kanten–Graphen* eines dreidimensionalen Polytopes.

Definition 2 (Ecken–Kanten–Graph). *Sei P ein dreidimensionales Polytop. Der Ecken–Kanten–Graph von P ist der Graph, der für jede Ecke (0–dimensionale Seite) von P einen Knoten besitzt und in dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die entsprechenden Ecken in P durch eine Kante (1–dimensionale Seite) verbunden sind.*

Im Theorem von *Steinitz* heißt es:

Satz 3 (Steinitz, 1922). *Jeder 3–zusammenhängende planare Graph ist der Ecken–Kanten–Graph eines dreidimensionalen konvexen Polytopes.*



Das Programm `polymake` stellt hierfür die Funktion `tutte_lifting` zur Verfügung.

Aufgabe:

(a) Setzen Sie die Pfade, die Sie für das Aufrufen von `polymake` benötigen:
`PATH=/home/polymake/bin:$PATH`
`export LD_LIBRARY_PATH=/opt/gnu/lib`.

(b) Erzeugen Sie eine Datei `tuttelifting.poly`, die unter `POINTS` die Positionen der Punkte p_v aus Aufgabe G1 (b) und unter `GRAPH` die Adjazenzlisten der Knoten des Graphen enthält. Dabei werden die Knoten von 0 aus beginnend indiziert.

(c) Generieren Sie mit der Funktion `tutte_lifting` ein dreidimensionales Polytop, das den gegebenen Graphen als Ecken–Kanten–Graph besitzt. Lassen Sie sich das Ergebnis mithilfe von `polymake VISUAL` anzeigen.

(d) Erzeugen Sie mithilfe von `polymake SCHLEGEL` das Schlegel–Diagramm für das in (c) entstandene Polytop.