Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2005
3. Mai 2005

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zweierkomplement)

(a) Schreiben Sie eine Funktion `twoc(n, d)` in Octave, Maple oder Mathematica, die eine ganzzahlige Dezimalzahl `d` bekommt und deren Zweierkomplement–Darstellung ausgibt. Die Anzahl der Bits sei dabei auf `n` beschränkt.

(b) Geben Sie die folgenden Dezimalzahlen in Zweierkomplement–Darstellung mit 10 Bits an:

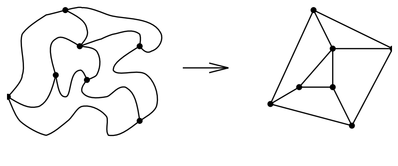
$$325, \quad -128, \quad 87, \quad -897.$$

(c) Rechnen Sie binär (10 Bits, Zweierkomplement–Darstellung):

$$87+13, \quad -15+326, \quad 35\cdot 7, \quad -4\cdot 4.$$

Aufgabe G2 (Gummiband–Einbettung)

Ziel dieser Aufgabe ist es, für einen gegebenen planaren 3–zusammenhängenden Graphen G eine sogenannte *Gummiband–Einbettung* zu konstruieren. Diese ist eine planare Zeichnung von G in der Ebene, in der die Kanten des Graphen als gerade Linien gezeichnet werden und die Teilflächen des Graphen konvexen Polygonen entsprechen (siehe Abbildung).



Doch zunächst einige Definitionen:

- Ein *Graph* $G=(V,E)$ ist ein Paar mit einer endlichen Menge von Knoten V und einer Menge von *Kanten* $E \subseteq \{\{v,w\} \mid v,w \in V; v \neq w\}$ zwischen den Knoten. Wir betrachten hier nur einfache Graphen ohne parallele Kanten. Der *Grad* d_v eines Knoten $v \in V$ ist die Anzahl der Kanten, die v als Endknoten besitzen.
- Ein Graph heißt *3–zusammenhängend*, wenn der Graph trotz Entfernen von zwei Knoten und der damit inzidenten Kanten immer noch zusammenhängend ist.

- Ein Graph G heißt *planar*, wenn er in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten kreuzen. Die zusammenhängenden offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2 \backslash G$ heißen *Flächen*. Da G beschränkt ist, gibt es genau eine unbeschränkte (die äußere) Fläche. Entsprechend unterscheiden wir zwischen *inneren* und *äußeren* Knoten und zwischen *inneren* und *äußeren* Kanten.
- Für einen Graphen $G = (V, E)$, eine Gewichtsfunktion $\omega : E \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $p : V \to \mathbb{R}^2$, die jedem Knoten eine Position im $\mathbb{R}^2$ zuweist, ist ein Knoten $v \in V$ im *Equilibrium*, falls gilt:

$$\sum_{\{v,w\} \in E} \omega_{v,w}(p_v - p_w) = 0. \tag{1}$$

Nach William Thomas Tutte gilt folgender Satz:

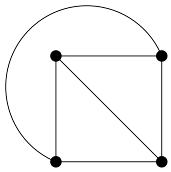
Satz 1 (1962). *Sei $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ ein 3–zusammenhängender planarer Graph mit einer äußeren Fläche $(k+1, \ldots, n)$für $k < n$. Seien $p_{k+1}, \ldots, p_n$ die Knoten eines konvexen $(n-k)$–gons (in dieser Reihenfolge). Sei weiter $\omega : E' \to \mathbb{R}^+$ eine (positive) Gewichtsfunktion der inneren Kanten. Dann gibt es eindeutige Positionen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^2$ für die inneren Knoten, so dass sich jeder innere Knoten im Equilibrium befindet und alle inneren Flächen konvex sind.*

Dazu definieren wir die Gewichte der inneren Knoten wie folgt:

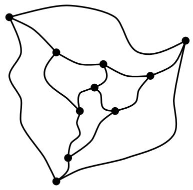
$$\omega_{vw} = \begin{cases} 1 & : \ \forall \{v, w\} \in E \\ 0 & : \ \forall \{v, w\} \notin E, v \neq w \\ d_v & : \ v = w \end{cases} \qquad (v, w \in \{1, \ldots, k\}), \tag{2}$$

und legen die Koordinaten der äußeren Knoten fest. Dann können wir gemäß der Gleichungen in (1) das Equilibrium der inneren Knoten berechnen.

Stellt für folgende Graphen ein entsprechendes lineares Gleichungssystem auf. Berechnet mithilfe von Mathematica, Maple oder Octave ein Equilibrium der inneren Knoten und stellt das Ergebnis graphisch dar.



(a)



(b)

*

Literatur

[1] Jürgen Richter-Gebert. *Realization spaces of polytopes*, volume 1643 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.