Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2005
28. Juni 2005

# 5. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

## Hausübung
**(Abgabe bis zum 12.07.2005)**

**Aufgabe H1** (Größter gemeinsamer Teiler von Polynomen)

(a) Sei $K$ ein Körper und $K[x]$ der Polynomring der Polynome über $K$ in einer Unbestimmten. Zeigen Sie: Seien $f_1, \ldots, f_m \in K[x]$ $(m \geq 2)$, dann existiert $GCD(f_1, \ldots, f_m)$ und ist eindeutig bis auf skalare Vielfache bestimmt.

Verwenden Sie dabei folgende Eigenschaft von $K[x]$: Für jedes Ideal $I$ von $K[x]$, existiert ein $f \in K[x]$, so dass $I = \langle f \rangle$.

(b) Benutzen Sie `Maple`, `Mathematica` oder `Singular`, um die $GCDs$ der folgenden rationalen Polynome zu berechnen:

- $GCD(x^4 + x^2 + 1, x^4 - x^2 - 2x - 1, x^3 - 1)$
- $GCD(x^3 + 2x^2 - x - 2, x^3 - 2x^2 - x + 2, x^3 - x^2 - 4x + 4)$

(c) Überprüfen Sie, ob $x^2 - 4 \in \langle x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2 \rangle$.

**Aufgabe H2** (Monomordnung)

(a) Schreiben Sie folgende Polynome um, indem Sie die Monome entsprechend der Ordnungen *lex* und *grevlex* neu sortieren.

- $2x + 3y + z + x^2 - z^2 + x^3$,
- $2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$.

(b) Zeigen Sie, dass $grevlex$ eine Monomordnung ist.

**Aufgabe H3** (Gröbner–Basen in Abhängigkeit von der Monomordnung)

Berechnen Sie mithilfe eines Computeralgebra–Systems Ihrer Wahl eine Gröbner–Basis von

- $I_1 := \langle x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^2 + z^2 - 1 \rangle$ bezüglich der Monomordnung *grevlex* mit $x > y > z$,
- $I_1$ bezüglich der Monomordnung *lex* mit $x > y > z$,
- $I_2 := \langle x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^3 + z^2 - 1 \rangle$ bezüglich der Monomordnung *grevlex* mit $x > y > z$,
- $I_2$ bezüglich der Monomordnung *lex* mit $x > y > z$.

**Aufgabe H4** (Gröbner–Basis)

Betrachten Sie die Polynome

$$x^{n+1} - yz^{n-1}w, xy^{n-1} - z^n, x^n z - y^n w$$

für $n \in \mathbb{N}$. Teo Mora hat in [2] gezeigt, dass die (reduzierte) Gröbner–Basis bezüglich der Monomordnung *grevlex* mit $x > y > z > w$ das Polynom $z^{n^2+1} - y^{n^2} w$ enthält. Überprüfen Sie dessen Gültigkeit für $n = 2, \ldots, 5$. Welche Kardinalität haben die Gröbner–Basen?

*

Literatur

[1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[2] D. Lazard. Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations. In *Computer algebra (London, 1983)*, volume 162 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 146–156. Springer, Berlin, 1983.