Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2005
24. Mai 2005

3. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Hausübung
(Abgabe bis zum 14.06.2005)

Aufgabe H1 (Seiten eines Polytopes)

(a) Sei $P = conv\{v_1, \dots, v_n\}$ ein d–Polytop. Zeigen Sie, dass ein Punkt $v_k \in P$ genau dann eine Ecke von P ist, wenn v_k nicht als Konvexkombination aus $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_k\}$ dargestellt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass der Schnitt von zwei Seiten eines Polytops P wiederum eine Seite von P ist.

Aufgabe H2 (Polar eines Polyeders)

(a) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polyeder. Zeigen Sie: $(P^*)^* = P \Longleftrightarrow \mathbf{0} \in P$.

(b) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein d–Polytop und $\mathbf{0}$ ein innerer Punkt von P. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \text{ ist Ecke von } P &\iff \mathbf{v}^T\mathbf{y} \leq 1 \text{ ist Facette von } P^* \\ \mathbf{u} \text{ ist Ecke von } P^* &\iff \mathbf{u}^T\mathbf{x} \leq 1 \text{ ist Facette von } P. \end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Konvexe–Hülle–Algorithmen)

`polymake` stellt drei verschiedene Konvexe–Hülle–Verfahren zur Verfügung: `cdd`, `lrs` und `beneath_beyond`. Testen Sie diese auf den folgenden Polytopen in den Dimensionen 4, 8, 12 und 16:

- dem Würfel
- dem Polar eines verzwergten Würfels (siehe Definition 1)
- einem zufälligen Polytop mit 6 Ecken auf der Einheitskugel

(siehe `cube`, `dwarfed_cube` und `rand_sphere` in `polymake`).

Definition 1 (Verzwergter Würfel). *Sei $C_d = [0,1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H_d^+ = \{x \in \mathbb{R}^d | \sum x_i \leq \frac{3}{2}\}$. Dann heißt $DC_d = C_d \cap H_d^+$ verzwergter Würfel der Dimension d.*

Beispielsweise erhält man mit den folgenden Aufrufen die Laufzeit, die man für die Berechnung der konvexen Hülle des Polaren eines verzwergten vierdimensionalen Würfels benötigt:

```
dwarfed_cube dwarfedcube4.poly 4
center dwarfedcube4centered.poly dwarfedcube4.poly
polarize dwarfedcube12centeredpolar.poly dwarfedcube12centered.poly
time beneath_beyond dwarfedcube12centeredpolar.poly VERTICES.
```

Stellen Sie Ihre Laufzeitergebnisse graphisch dar.

Aufgabe H4 (Worst–Case–Beispiel für den Beneath–and–Beyond–Algorithmus)

(a) Visualisieren Sie mithilfe von `polymake VISUAL_TRIANGULATION` eine Triangulierung des verzwergten dreidimensionalen Würfels DC_3 und dessen Polar DC_3^*.

(b) Zeigen Sie: DC_d hat $d^2 + 1$ Ecken und $2d + 1$ Facetten.

(c) Seien die Ecken $v_1, \ldots, v_{2d+1}$ von DC_d^* so sortiert, dass der letzte Knoten v_{2d+1} der Facette $H_d = \{x \in \mathbb{R}^d | \sum x_i = \frac{3}{2}\}$ von DC_d entspricht. Zeigen Sie, dass der Beneath–and–Beyond–Algorithmus mit dieser Eckenreihenfolge $\Omega(2^d)$ Schritte (siehe Definition 2) benötigt. Betrachten Sie dafür die Triangulierung T von DC_d^*, die durch den Algorithmus entsteht und die Anzahl der d–Simplizes in T, die v_{2d+1} als Ecke enthalten.

Definition 2 (Asymptotische Notation, Komplexität von Algorithmen). *Seien* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *und* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *zwei Funktionen. Dann sagt man*

- f *ist asymptotisch kleiner oder gleich* g*, kurz* $f \in O(g)$*, falls gilt:*

$$\exists\ c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall\ n \geq n_0$$

- f *ist asymptotisch grösser oder gleich* g*, kurz* $f \in \Omega(g)$*, falls gilt:*

$$\exists\ c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : c \cdot g(n) \leq f(n)\ \forall\ n \geq n_0$$

- f *und* g *sind asymptotisch gleich, kurz* $f \in \Theta(g)$*, falls gilt:*

$$f \in O(g) \text{ und } f \in \Omega(g)$$

- f *ist asymptotisch streng kleiner als* g*, kurz* $f \in o(g)$*, falls gilt:*

$$\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : f(n) < c \cdot g(n)\ \forall\ n \geq n_0.$$