Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
06.06.2007

Diskrete Optimierung II

8. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Gegeben sei die Familie ganzzahliger Programme mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lrrl} \max & & x_2 & \\ \text{s. t.} & kx_1 & +x_2 & \leq k \\ & -kx_1 & +x_2 & \leq 0 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

mit den zugehörigen Polyedern P_k.

(i) Zeigen Sie, dass P_k^1 durch das folgende System beschrieben wird:

$$\begin{array}{lrrl} \max & & x_2 & \\ \text{s. t.} & (k-1)x_1 & +x_2 & \leq k-1 \\ & -(k-1)x_1 & +x_2 & \leq 0 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

(ii) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse aus Teil a), um zu zeigen, dass in diesem Beispiel die Zahl t mit $t = \min_{s \in \mathbb{N}} P_k^s = (P_k)_I$ (siehe Satz 3.9 im Skript) exponentiell in der Kodierungslänge der Eingabe (A, b) ist.

Aufgabe G2 Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem mit Hilfe von Gomory-Schnitten:

$$\begin{array}{lrrl} \max & 4x_1 & -x_2 & \\ \text{s. t.} & 7x_1 & -2x_2 & \leq 14 \\ & & +x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \\ & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}, \end{array}$$

Hausübungen

Abgabe am 13.06.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(i) Sei a ein ganzzahliger Vektor und β eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $ax \leq \beta$ genau dann TDI ist, wenn die Einträge von a teilerfremd sind.

(ii) Sei $Ax \leq b$ TDI, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$ eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{k}Ax \leq \alpha b$ ebenfalls TDI ist.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Das *stabile Mengen* Problem lautet:

> Gegeben sei ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$. Finde eine größte Menge $U \subseteq V$, so dass es keine Kanten $\{v, w\}$ mit $v, w \in U$ gibt.

Sei $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ und Variablen $x \in \{0, 1\}^n$, so dass jedes x eine Teilmenge $V' \subset V$ kodiert, mit $i \in V'$ genau dann wenn $x_i = 1$. So ist eine 0/1-IP-Formulierung des stabilen Mengen Problems gegeben durch:

$$\max\{\mathbb{1}x | \forall \{i, j\} \in E : x_i + x_j \leq 1, x \in \{0, 1\}^n\}.$$

(i) Lösen Sie die LP-Relaxierung des stabilen Mengen Problems für den Graphen C_5 (Kreis mit fünf Knoten).

(ii) Finden Sie eine Ungleichung, die die LP-Lösung abschneidet und berechnen Sie wieder den Optimalwert der LP-Relaxierung.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 3.2 aus dem Skript:

Sei P ein Polyeder. Dann enthält jede minimale Seitenfläche von P ganzzahlige Punkte genau dann, wenn jede Stützhyperebene ganzzahlige Punkte enthält.

Hinweis: Benutzen Sie das ganzzahlige Analogon des Farkas-Lemma (Satz 2.27).

Die OWO steht an. Die Fachschaft und die Studienberatung suchen für das kommende Wintersemester OWO Tutoren und studentische Mentoren.

Bei Interesse einfach bei:

- *Markus Helmerich (Raum 424):* helmerich@mathematik.tu-darmstadt.de
  oder
- *Artus und Pavol (Raum 345):* owo-orga@mathebau.de

melden.

Etwas mehr Info. Im Wintersemester erwartet der Fachbereich Mathematik der TU wieder ca. 150 Studienanfänger. Dabei stehen unsere neuen “Kleinen„vor einer besonders grossen Herausforderung: Sie sind die erste Generation des neuen Bachelors. Wir alle hatten in unserer OWO und danach viele Vorteile dadurch, dass erfahrene Studenten uns erklären konnten, “wo der Hase langläuft„. Das wird ab dem nächsten Wintersemester nicht mehr so einfach. Denn erfahrene Bachelor-Studenten gibt es noch nicht.
Umso wichtiger ist es, dass viele von uns sich die Zeit nehmen, die Studienordnung des Bachelors zu lernen und für die nächste Generation im Mathebau eine ausgezeichnete OWO auf die Beine stellen.
Auch über die OWO hinaus wollen wir aber die Erstis so gut es geht unterstützen. Offene Türen, Ohren und Augen sind im Mathebau nichts neues. Dazu kommt mit dem Wintersemester das studentische Mentorensystem.
Dabei übernimmt ein Student höheren Semesters die Mentorenschaft für eine kleine Gruppe von Studienanfängern, ist für diese als Ansprechpartner da, trifft sich regelmässig mit ihnen etc.
Wer das Glück hatte, ein ähnliches Verhältnis mit seinen OWO-Eltern aufzubauen, weiss, dass ein solches System funktionieren und den Erstis eine grosse Hilfe sein kann. Die studentischen Mentoren werden dabei von der Studienberatung betreut und geschult und arbeiten eng mit den professoralen Mentoren zusammen. Das kostet Zeit, wird vom Fachbereich aber auch bezahlt. Selbstverständlich klappt das aber nur dann, wenn sich genügend Leute finden, die sich als deutsch- oder englischsprachiger OWO-Tutor und Mentor (idealerweise gleich beides Hand in Hand) anbieten.
Wenn Du jetzt Lust bekommen hast, die OWO-liche Elternliebe weiterzugeben und/oder Dir vorstellen könntest, Mentor für eine Gruppe hilfsbedürftiger Erstis zu sein, dann erklären Dir Markus Helmerich (Raum 424) und die OWO-Orga (Artus und Pavol : owo-orga@mathebau.de) gern alles Weitere.