Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
23.05.2007

Diskrete Optimierung II

6. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1

Gegeben sei das Polyeder

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Ist Ihr System eine minimale Beschreibung von P?

Aufgabe G2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und C ein ungerader Kreis in G. Betrachten Sie das lineare Programm

$$\max\{c^{\mathsf{T}}x \mid 0 \leq x,\ x_i + x_j \leq 1\ \forall \{i, j\} \in E\}$$

mit $c = \chi^{V(C)}$.

Zeigen Sie:

(i) $x_i^* = \frac{1}{2}$ für alle Knoten $i \in V(C)$, $x_i^* = 0$ für $i \notin V(C)$, löst das lineare Programm.

(ii) x^* ist keine Konvexkombination von Inzidenzvektoren von stabilen Mengen in G.

Aufgabe G3 Zeigen Sie, dass die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen total unimodular ist.
Bemerkung: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, falls $A, B \neq \emptyset$ existieren mit $V = A \mathring{\cup} B$ und $E = \{\{v, w\} | (v \in A \wedge w \in B) \vee (v \in B \wedge w \in A)\}$.

Aufgabe G4 Zeigen Sie, dass eine ganzzahlige Matrix A genau dann total unimodular ist, wenn das System $Ax \leq b$, $x \geq 0$ für jeden Vektor b TDI ist.

Hausübungen

Abgabe am 30.05.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Hermitesche Normalform A' der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die entsprechende Matrix U mit $A \cdot U = A'$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Hermitesche Normalform einer Matrix eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Seien $[B, 0]$ und $[B', 0]$ zwei verschiedene Hermitesche Normalformen der Matrix A. Sei i minimal mit $b_{ij} \neq b'_{ij}$ für ein j. Betrachten Sie nun den Gittervektor $b_{.j} - b'_{.j}$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationaler, polyedrischer und spitzer Kegel und sei $H(C)$ die eindeutige minimale (ganzzahlige) Hilbertbasis des Kegels C. Weiterhin sei $F \subseteq C$ eine nichtleere Seitenfläche des Kegels C.

Zeigen Sie: $H(F) := F \cap H(C)$ ist die eindeutige minimale (ganzzahlige) Hilbertbasis von F.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei C ein rationaler polyedrischer Kegel und $b_1, \ldots, b_k$ ganzzahlige Erzeuger der Extremalstrahlen von C.

Zeigen Sie:

(i) Die ganzzahligen Vektoren in dem von den Vektoren b_i erzeugten Zonotop bilden eine Hilbert-Basis.
Bemerkung: Daraus folgt insbesondere, dass jeder rationale polyedrische Kegel von einer ganzzahligen Hilbert-Basis erzeugt wird.

(ii) Ist C spitz, so gibt es eine eindeutige minimale Hilbert-Basis, die C erzeugt.