Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
25.04.2007

Diskrete Optimierung II

2. Übung

Fourier-Motzkin-Elimination, Projektion und Farkas-Lemma

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Gegeben sei das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^3 | Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 | -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6\} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Projektionsalgorithmus die Projektion von P auf H entlang c.

Aufgabe G2 Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder in H-Darstellung (d.h. P ist als Schnitt von endlich vielen Halbräumen gegeben) und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine trennende Hyperebene ausgibt, falls x nicht in P liegt, oder die Meldung ausgibt, dass x in P liegt.

Was ändert sich, falls P in V-Darstellung, also als konvexe Hülle seiner Ecken, gegeben ist?

Aufgabe G3 Sei $x(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ die Momentenkurve in $\mathbb{R}^d$. Wählt man $n \geq d+1$ Punkte $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ aus $\mathbb{R}$, so heißt $C_{d,n} := \operatorname{conv}(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n))$ *zyklisches Polytop* in $\mathbb{R}^d$ auf n Ecken.
Zeigen Sie, dass je $d+1$ Ecken $x(t_{i_0}), \dots, x(t_{i_d})$ von $C_{d,n}$ affin unabhängig sind.

Aufgabe G4 Zeigen Sie, dass jedes Polytop eine Projektion eines Simplex ist.

Hausübungen

Abgabe am 02.05.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Wenden Sie die Fourier-Motzkin-Elimination an, um festzustellen, ob das folgende Ungleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & \leq & 2 \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & \leq & -3 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 2 \end{array}.$$

D.h. führen Sie das Projektionsverfahren sukzessiv für das obige System mit den Richtungsvektoren e_1, e_2, e_3 und e_4 durch.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $D \in \mathbb{R}^{r\times n}$ und $d \in \mathbb{R}^r$ durch Fourier-Motzkin-Elimination der j-ten Variablen im Ungleichungssystem $Ax \leq b$ berechnet worden. Es seien ferner $I, J \subseteq M = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = M$, und $E \cap F = R = \{1, 2, \ldots, r\}$ definiere eine Partition der Zeilenindexmenge von D wie folgt:

$$E := p^{-1}((Z \cap I) \cup ((N \times P) \cap (I \times I))),$$
$$F := R \setminus E.$$

Dann hat das System

$$A_{I.}x \leq b_I, \quad A_{J.}x < b_J$$

eine Lösung genau dann, wenn das System

$$D_{E.}x \leq d_E, \quad D_{F.}x < d_F$$

eine Lösung hat.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden Verknüpfungen auf $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\begin{array}{rcccc} \oplus & : & (x,y) & \mapsto & \min\{x,y\} \\ \odot & : & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, \odot)$ und $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, \oplus)$ kommutative Halbgruppen sind, die außerdem die Distributivgesetze erfüllen. Das Tupel $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, \oplus, \odot)$ heißt *tropischer Halbring*.

Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{k\times m}$ und $B \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{m\times n}$ ist dann das *tropische Matrizenprodukt* definert durch

$$(A \odot B)_{ij} = (a_{i1} \odot b_{1j}) \oplus (a_{i2} \odot b_{2j}) \oplus \cdots \oplus (a_{im} \odot b_{mj}).$$

Entsprechend werden *tropische Matrixpotenzen* definiert durch

$$A^{\odot 1} := A, \quad A^{\odot k+1} := A \odot A^{\odot k}.$$

Weiter sei $\Gamma = (\{1, \ldots, n\}, A)$ ein (gerichteter) Graph, in dem jeder Kante $(i,j) \in A$ ein Gewicht $w_{ij} \in \mathbb{R}_+$ zugeordnet wird. Setze

$$A_\Gamma := (a_{ij}) \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^{n\times n}, \quad \text{wobei } a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & : \quad (i,j) \in A, \\ 0 & : \quad i = j, \\ +\infty & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass der Eintrag von $A_\Gamma^{\odot n-1}$ in Zeile i und Spalte j genau die Länge eines kürzesten Weges vom Knoten i zum Knoten j ist.