Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
27.06.2007

Diskrete Optimierung II

11. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Zeigen Sie, dass ein Unabhängigkeitssystem $(E, \mathcal{I})$ genau dann ein Matroid ist, falls gilt

$$X, Y \in \mathcal{I} \text{ mit } |X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y : Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}.$$

Aufgabe G2 Ein *Wald* ist ein Graph der keine Kreise enthält, d.h. ein Wald ist die Vereinigung von Bäumen.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{I} := \{F \subseteq E | \, F \text{ ist ein Wald}\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.

(ii) Sei $c : E \to \mathbb{R}$ eine Kantengewichtsfunktion und $\mathcal{I} := \{F \subseteq E | \, F \text{ ist ein aufspannender Baum}\}$. Zeigen Sie, dass der Algorithmus *Greedy-Min* für $(E, \mathcal{I})$ einen minimal aufspannenden Baum bezüglich c in $O(m \cdot n)$ bestimmt.
Hinweis: Das Sortieren einer Menge mit m Elementen ist in $O(m \log(m))$ möglich. Ob ein Graph mit n Knoten und m Kanten kreisfrei ist, kann in $O(m + n)$ getestet werden.

Aufgabe G3 Gegeben sei eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{I}$ die Menge der (über $\mathbb{R}$) affin unabhängigen Teilmengen von S.

a) Weisen Sie nach, dass $(S, \mathcal{I})$ ein Matroid ist.

b) Sei nun

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Lösen Sie das kombinatorische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{X \in \mathcal{I}} & \sum\limits_{x \in X} x_1^2 \cdot x_3 \\ \text{s. t.} & X \text{ ist (bzgl. Mengeninklusion) maximal in } \mathcal{I}. \end{array}$$

Hausübungen

Abgabe am 03.07.2007

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass folgende Unabhängigkeitssysteme im allgemeinen keine Matroide sind.

(i) $\mathcal{F} := \{F \subseteq V | F \text{ ist eine stabile Menge in } G.\}$

(ii) $\mathcal{F} := \{F \subseteq E | F \text{ ist ein Matching in } G.\}$

(iii) $\mathcal{F} := \{F \subseteq E | F \text{ ist ein Teilpfad eines s-t-Pfades in } G\}$, wobei s und t Knoten in V sind und t von s in G erreichbar ist.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Berechnen Sie eine straffe untere Schranke für die Rang-Quotienten $q = \min\{\frac{r_u(F)}{r(F)} | F \subseteq E\}$ für die Unabhängigkeitssysteme der vorigen Aufgabe. Geben Sie jeweils ein Beispiel an, bei dem dieser Rang-Quotient angenommen wird und zeigen Sie, dass für alle anderen Instanzen der Rang-Quotient nicht kleiner als die untere Schranke ist.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

(i) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und sei

$$\mathcal{U} = \{F \subseteq E \mid \text{keine zwei gerichteten Kanten von } F \text{ haben einen gemeinsamen Anfangsknoten}\}.$$

Ist $\mathcal{U}$ ein Matroid über E?

(ii) Sei E eine endliche Menge und $k \in \mathbb{Z}$. Ist $\mathcal{U} = \{F \subseteq E | \, |F| \leq k\}$ ein Matroid?

(iii) Existiert ein Matroid auf der Menge $\{1, \ldots, 7\}$ vom Rang 3, in dem jedes Element aus E in genau drei Basen enthalten ist?