Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
18.04.2007

Diskrete Optimierung II

1. Übung

Wiederholung zur Linearen Optimierung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$
(P) \qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

(i) Formulieren Sie das duale Problem zu (P).

(ii) Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung von (P) ist.

Aufgabe G2 Lösen Sie mit dem Simplex-Algorithmus:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
& x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
& 3x_1 & - & 5x_2 & & & = & 4 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Benutzen Sie die Phase I des Simplex-Algorithmus um eine zulässige Basislösung zu finden.

Aufgabe G3 Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Zeige:

(i) P hat endlich viele Ecken.

(ii) Ein Punkt $x \in P$ ist genau dann eine Ecke von P, wenn $P \setminus \{x\}$ konvex ist.

(iii) Eine Kante von P verbindet zwei Ecken von P.

(iv) Sei F eine Seitenfläche von P. Dann entsprechen die Ecken von F genau den Ecken von P, die in F enthalten sind.

Hausübungen

Abgabe am 25.04.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Betrachten Sie die beiden zueinander dualen linearen Programme:

$$\begin{array}{rcl} \max & c^T x & \\ & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \min & b^T y & \\ & A^T y & \geq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Geben Sie für jede mögliche Kombination in Hinblick auf die Lösbarkeit der beiden linearen Programme („endlich“, „unbeschränkt“, „unzulässig“) ein Beispiel.

Aufgabe H2 (7 Punkte)

Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel:

(i) Zykelt das Simplexverfahren, so tritt eine degenierte Basislösung wiederholt auf.

(ii) Jedes unlösbare Ungleichungssystem $Ax \leq b$ in n Variablen enthält ein unzulässiges Teilsystem von $n+1$ Ungleichungen.

(iii) Hat das lineare Programm $\min c^T x$ s.t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das lineare Programm $\min c^T x$ s.t. $Ax = b$‘, $x \geq 0$ für alle b‘ beschränkt.

(iv) Besitzt ein LP keine degenerierte Basislösung, so gibt es im Simplexverfahren nach Wahl der Pivotspalte höchstens (genau) eine Variable, die die Basis verlassen kann.

(v) Wenn $Ax \leq b$, $x \geq 0$ keine Lösung hat, dann gibt es eine Lösung von $A^T y = 0$, $b^T y < 0$, $y \leq 0$.

(vi) Das LP $Ax \leq b$, $x \geq 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ kann $\binom{m+n}{m}$ zulässige Basen haben.

(vii) Wenn ein lineares Programm (P) und sein duales Programm (D) beide zulässig sind, dann sind alle Lösung von (P) optimal.

Aufgabe H3 (3 Punkte)

Für $1 \leq k \leq d$ ist der *Hypersimplex* $\Delta_d(k)$ definert durch

$$\Delta_d(k) := \{x \in [0,1]^d \, : \, k-1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_d \leq k\}.$$

$\Delta_d(1)$ ist ein d–dimensionaler Simplex.

Wieviele Ecken und Facetten haben $\Delta_3(2)$ und $\Delta_4(2)$?