**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
07./08.06.2006

# Diskrete Mathematik

## 8. Übung

### Gruppenübungen

**Aufgabe G1** Wählen Sie eines der Computeralgebrasysteme Maple oder Mathematica aus und finden Sie heraus, welche Unterstützung Ihnen diese Systeme für graphentheoretische Probleme liefern. Untersuchen Sie dabei folgende Punkte:

(i) Pakete, die geladen werden müssen, um Graphen zu behandeln

(ii) Eingabe und Repräsentation von Graphen

(iii) Erzeugen einfacher Standardgraphen (z.B. vollständiger Graph, Kreis, Petersengraph) und zufälliger Graphen

(iv) Prüfung von Eigenschaften von Graphen (z.B. Zusammenhang, Gradfolgen, Planarität, chromatische Zahl)

(v) einfache Graphenmanipulationen (z.B. Komplementbildung, Entfernen von Knoten bzw. Kanten)

(vi) Auffinden von (minimal) aufspannenden Bäumen

**Aufgabe G2** In Anlehnung an die Mittelseminaraufgabe folgt hier eine kleine Aufgabe zur Färbung von Graphen. Dabei ist für ein $k \in \mathbb{N}$ die *$k$-(Knoten)-Färbung* eines ungerichteten Graphen $\Gamma = (V, E)$ definiert als eine Abbildung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ mit $f(v) \neq f(w)$ für jede Kante $\{v, w\} \in E$. Die Zahl $f(v)$ heißt *Farbe* von $v$. Die *chromatische Zahl* $\chi(\Gamma)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Knotenfärbung von $\Gamma$ benötigt werden.

Bestimmen Sie die chromatische Zahl des Graphen $G = (V, E)$ mit

(i) $G = K_n$ ist der vollständige Graph mit $n$ Knoten,

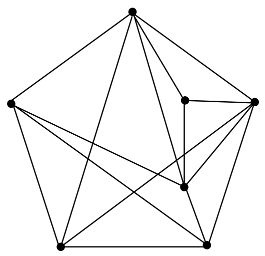
(ii) $G = K_{m,n}$ ist der vollständige bipartite Graph mit $m$ bzw. $n$ Knoten,

(iii) $G$ ist ein Baum mit $n$ Knoten,

(iv) $G = C_n$ ist der einfache Kreis mit $n$ Knoten.

**Aufgabe G3**

(i) Zeigen Sie, dass der folgende Graph planar ist:



(ii) Ist das Komplement des Kreises $C_6$ planar?

(iii) Zeigen Sie, dass der duale Graph eines zusammenhängenden endlichen Graphen $\Gamma$ planar und zusammenhängend ist. Zeigen Sie weiter, dass $(\Gamma^*)^* = \Gamma$ gilt, falls $\Gamma$ zusammenhängend ist.

**Aufgabe G4** Beweisen Sie, dass der Algorithmus von Prim einen minimal aufspannenden Baum konstruiert.

## Hausübungen

Abgabe am 14./16.06.2006

**Aufgabe H1** (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder planare Graph mindestens einen Knoten vom Grad $\leq 5$ besitzt.

**Hinweis:** Folgen Sie dabei folgender Anleitung:

- Konstruieren Sie einen indirekten Beweis. Nehmen Sie an, es gäbe einen in der Ebene ohne Überschneidungen gezeichneten Graphen, bei dem alle Knoten Grad $> 5$ haben. Bezeichen Sie mit $n$ die Anzahl der Knoten des Graphen, mit $m$ die Anzahl der Kanten und mit $f$ die Anzahl der Flächenstücke, in die der Graph die Ebene teilt.
- Seien $p_6, p_7, p_8, \ldots$ die Anzahlen der Knoten vom Grad $6, 7, 8, \ldots$. Zeigen Sie, dass

$$p_6 + p_7 + p_8 + \cdots \leq \frac{m}{3}.$$

- Seien $f_3, f_4, f_5, \ldots$ die Anzahlen der Flächen, die jeweils genau $3, 4, 5, \ldots$ Kanten auf dem Rand haben. Warum gilt $f = f_3 + f_4 + f_5 + \cdots$? Beweisen Sie die Ungleichung $f \leq \frac{2m}{3}$.
- Wenden Sie die Eulersche Polyederformel an.

**Aufgabe H2** (5 Punkte)

Ein Graph heißt *outerplanar*, falls er eine planare Einbettung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand des unbeschränkten äußeren Landes liegt. Beweisen Sie, dass weder $K_4$ noch $K_{2,3}$ outerplanar sind.

**Aufgabe H3** (5 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Jordanschen Kurvensatzes, dass der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$ nicht planar ist.

**Aufgabe H4** (5 Punkte)

(i) Sei $G$ der Graph mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und folgenden Kanten und Kantengewichten:

| e | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | (1,7) | (2,3) | (3,4) | (4,5) | (5,6) | (6,7) | (7,1) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w(e) | 6 | 3 | 2 | 4 | 3 | 7 | 6 | 2 | 3 | 1 | 8 | 6 |

Finden Sie alle minimal aufspannenden Bäume von $G$.

(ii) Sei $G$ ein zusammenhängender Graph mit injektiver Gewichtsfunktion auf den Kanten. Beweisen Sie, dass $G$ einen eindeutigen minimal aufspannenden Baum besitzt.